一次元縦波模型としての波動方程式

平成 29 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

空間一次元 (時空二次元) 縦波模型としての波動方程式の初期値問題の解法に就いて考える。

1. 縦波模型

一次元的な弦 string (或は撥条 spring) を伝播する縦波模型 longitudinal wave model として次の波動方程式を考える：

$$\partial_t^2 q = c^2 \partial^2 q \tag{LW}$$

ここに q は二次元時空に於けるスカラー場、即ち実数値未知函数 $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \longmapsto q(t, x) \in \mathbb{R}$ とし ∂_t 及び ∂ は夫々時間及び空間変数に就いての偏微分作用素 $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial = \partial_x = \partial/\partial x$ で正の実定数 $c > 0$ は波の伝播速度 propagation speed である。上の方程式 (LW) に現れる作用素 $\partial_t^2 - c^2\partial^2$ は

$$\partial_t^2 - c^2\partial^2 = (\partial_t + c\partial)(\partial_t - c\partial) = (\partial_t - c\partial)(\partial_t + c\partial)$$

と因数分解されるので (LW) の解 q から導かれる二つの函数

$$u_\pm = (\partial_t \mp c\partial)q$$

は夫々一階の線型偏微分方程式

$$(\partial_t \pm c\partial)u_\pm = 0 \tag{LW$_\pm$}$$

を満たしている事になる。

2　特性曲線法

一階の線型偏微分方程式の典型的な解法は**特性曲線法** method of characteristics である。これを多少一般的な設定で纏めて置こう。

次の一階の線型偏微分方程式

$$\partial_t u + \alpha\partial u = \beta u + \gamma \tag{2.1}$$

を考えよう。ここに α, β, γ は初期時刻 0 を含む時間区間を I とする $1+1$ 次元の時空 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の部分集合 $I \times \mathbb{R}$ で定義された実数値函数とし時間変数を独立変数とする $L^\infty(\mathbb{R})$ 値函数として連続である：

$$\alpha, \beta, \gamma \in C(I; L^\infty(\mathbb{R}))$$

と仮定しよう。方程式 (2.1) の左辺は未知函数 $u : I \times \mathbb{R} \ni (t,x) \longmapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ のベクトル $(1, \alpha(t,x)) \in \mathbb{R}^2$ の方向微分と見做す事が出来る。実際

$$\begin{cases} \partial_t \xi(t,x) = \alpha(t, \xi(t,x)), \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R} \\ \xi(0,x) = x \end{cases} \tag{2.2}$$

を満たす解 $\xi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し $v(t,x) = u(t, \xi(t,x))$ と置いて定まる $v : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) &= \partial_t u(t, \xi(t,x)) + \partial u(t, \xi(t,x)) \partial_t \xi(t,x) \\ &= (\partial_t u + \alpha \partial u)(t, \xi(t,x)) = ((1,\alpha) \cdot (\partial_t u, \partial u))(t, \xi(t,x)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

と計算されるので (2.1) の左辺を本質的に再現しているものと考えられる。方程式 (2.2) を (2.1) の**特性微分方程式**と謂い、各点 $x \in \mathbb{R}$ 毎に (2.2) から導かれる曲線 $I \ni t \longmapsto \xi(t,x) \in \mathbb{R}$ を (2.1) の**特性曲線**と謂う。そこで (2.2) の解に就いて考えよう。微分方程式の初期値問題 (2.2) の解 ξ は積分方程式

$$\xi(t,x) = x + \int_0^t \alpha(t', \xi(t',x)) dt' \tag{2.4}$$

の解 ξ 即ち (2.4) の右辺の定める (非線型) 積分作用素の不動点として捉えられる。そこで具体的に (2.4) を解く設定を与えよう。いま α は

$$\alpha \in (C \cap L^1)(I; W^1_\infty) = \{\alpha \in (C \cap L^1)(I; L^\infty); \partial\alpha \in (C \cap L^1)(I; L^\infty)\}$$

且つ任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ 及び $0 \in K \subset I$ なる任意の有界閉区間 K に対し

$$\lim_{x \to x_0} \int_K |\partial\alpha(t,x) - \partial\alpha(t,x_0)| dt = 0$$

なる滑らかさと可積分性を持つものとし $M_0, M_1 \geq 0$ を

$$M_0 = \int_I \|\alpha(t)\|_\infty dt, \quad M_1 = \int_I \|\partial\alpha(t)\|_\infty dt$$

と定義する。積分方程式 (2.4) の解を函数空間

$$\mathscr{X} = C^1(I \times \mathbb{R}) \cap C(I; \dot{W}^1_\infty)$$

に於いて構成しよう。ここに

$$\begin{aligned} \dot{W}^1_\infty &= \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}); \partial f \in L^\infty(\mathbb{R})\}, \\ C(I; \dot{W}^1_\infty) &= \{u : I \to L^1_{\mathrm{loc}}; \partial u \in C(I; L^\infty)\} \end{aligned}$$

とする。

定理 1　微分方程式の初期値問題 (2.2) 及び積分方程式 (2.4) は $\xi \in \mathscr{X}$ なる解を唯一つ持つ。解 ξ は $0 \in J$ なる任意の部分区間 $J \subset I$ に対し

$$\sup_{t \in J} \|\xi(t) - x\|_\infty \ (:= \sup_{t \in J} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\xi(t,x) - x|) \leq \int_J \|\alpha(t)\|_\infty dt, \tag{2.5}$$

$$\sup_{t\in J}\|\partial\xi(t)\|_\infty \le \exp\left(\int_J \|\partial\alpha(t)\|_\infty dt\right) \tag{2.6}$$

なる評価を満たす。また、各 $t\in I$ に対し $\xi(t)$ はリプシッツ連続で C^1 級の函数となる。

（証明）　記述を簡単にする為 $t\ge 0$ の場合のみ扱う事にして I は或る $T>0$ に就いて $I=[0,T]$ の形を取るか、または $I=[0,\infty)$ であるものとする。仮定 $\partial\alpha\in L^1(I;L^\infty)$ より $\delta_0>0$ が存在し

$$\sup_{t\in J}\int_{[t,t+\delta_0]\cap I}\|\partial a(t')\|_\infty dt' \le \frac{1}{2}$$

が成立つ。さて $I_0=[t_0,t_1]=[0,\delta_0]$ とし

$$\begin{aligned}\mathscr{X}_0=\{\xi\in C(I_0\times\mathbb{R})\cap C(I_0;\dot{W}^1_\infty);\ &\sup_{t\in I_0}\|\xi(t)-x\|_\infty\le M_0,\\ &\sup_{t\in I_0}\|\partial\xi(t)-1\|_\infty\le 1\}\end{aligned}$$

と置く。$\mathscr{X}_0$ は

$$d_0(\xi,\eta)=\sup_{t\in I_0}\|\xi(t)-\eta(t)\|_\infty,\quad \xi,\eta\in\mathscr{X}_0$$

で定まる距離 d_0 で完備となる。$\xi\in\mathscr{X}_0$ に対し $\Phi_0(\xi)$ を

$$\left((\Phi_0(\xi))(t)\right)(x)=(\Phi_0(\xi))(t,x)=x+\int_0^t\alpha(t',\xi(t',x))dt',\quad (t,x)\in I_0\times\mathbb{R}$$

に拠り定義する。このとき $\Phi_0(\xi)\in C(I_0\times\mathbb{R})\cap C(I_0;\dot{W}^1_\infty)$ であり

$$(\partial\Phi_0(\xi))(t)=(\partial\Phi_0(\xi))(t,\cdot)=1+\int_0^t\partial\alpha(t',\xi(t',\cdot))\partial\xi(t',\cdot)dt'$$

が従う。更に

$$\begin{aligned}\sup_{t\in I_0}\|(\Phi_0(\xi))(t)-x\|_\infty &\le \int_I\|\alpha(t')\|_\infty dt'=M_0,\\ \sup_{t\in I_0}\|(\partial\Phi_0(\xi))(t)-1\|_\infty &\le \int_{I_0}\|\partial\alpha(t')\|_\infty\|\partial\xi(t')\|_\infty dt'\\ &\le \int_{I_0}\|\partial\alpha(t')\|_\infty(\sup_{t\in I_0}\|\partial\xi(t)-1\|_\infty+1)dt'\\ &\le 2\int_{I_0}\|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\le 1\end{aligned}$$

なる評価より $\Phi_0:\xi\longmapsto\Phi_0(\xi)$ は $\mathscr{X}_0$ からそれ自身への写像となる。また $\xi,\eta\in\mathscr{X}_0$ に対し

$$\begin{aligned}(\Phi_0(\xi)-\Phi_0(\eta))(t)&=\int_0^t(\alpha(t',\xi(t',\cdot))-\alpha(t',\eta(t',\cdot)))dt'\\ &=\int_0^t\int_0^1\partial\alpha(t',\theta\xi(t',\cdot)+(1-\theta)\eta(t',\cdot))d\theta(\xi(t',\cdot)-\eta(t',\cdot))dt'\end{aligned}$$

なる等式が成立つので次の不等式

$$d_0(\Phi_0(\xi),\Phi_0(\eta))\le\frac{1}{2}d_0(\xi,\eta)$$

が任意の $\xi, \eta \in \mathscr{X}_0$ に対して成立つ。以上より Φ_0 は $\mathscr{X}_0$ 上の縮小写像となり唯一つの不動点 $\xi_0 \in \mathscr{X}_0$ を持つ：$\Phi_0(\xi_0) = \xi_0$
また、このとき評価

$$\|\partial \xi_0(t_1)\|_\infty \le 2$$

が成立つ。次に $t_j = j\delta_0,\ I_1 = [t_1, t_2] \cap I = [\delta_0, 2\delta_0] \cap I$ とし

$$\begin{aligned}\mathscr{X}_1 = \{\xi \in C(I_1; W^1_\infty);\ &\sup_{t \in I_1} \|\xi(t) - \xi_0(t_1)\|_\infty \le M_0, \\ &\sup_{t \in I_1} \|\partial\xi(t) - \partial\xi_0(t_1)\|_\infty \le 2\}\end{aligned}$$

と置き

$$d_1(\xi, \eta) = \sup_{t \in I_1} \|\xi(t) - \eta(t)\|_\infty, \quad \xi, \eta \in \mathscr{X}_1$$

で定まる距離 d_1 に依る完備距離空間と見做そう。$\xi \in \mathscr{X}_1$ に対し $\Phi_1(\xi)$ を

$$(\Phi_1(\xi))(t) = \xi_0(t_1) + \int_{t_1}^t \alpha(t', \xi(t', \cdot))dt', \quad t \in I_1$$

に拠り定義する。このとき $\Phi_1(\xi) \in C(I_1; W^1_\infty)$ であり

$$(\partial\Phi_1(\xi))(t) = \partial\xi_0(t_1) + \int_{t_1}^t \partial\alpha(t', \xi(t', \cdot))\partial\xi(t', \cdot)dt'$$

が成立つ。更に

$$\begin{aligned}\sup_{t \in I_1} \|(\Phi_1(\xi))(t) - \xi_0(t_1)\|_\infty &\le \int_I \|\alpha(t')\|_\infty dt' = M_0, \\ \sup_{t \in I_1} \|(\partial\Phi_1(\xi))(t) - \partial\xi_0(t_1)\|_\infty &\le \int_{I_1} \|\partial\alpha(t')\|_\infty \|\partial\xi(t')\|_\infty dt' \\ &\le \int_{I_1} \|\partial\alpha(t')\|_\infty \bigg(\sup_{t \in I_1} \|\partial\xi(t') - \partial\xi_0(t_1)\|_\infty \\ &\qquad\qquad + \|\partial\xi_0(t_1)\|_\infty \bigg) dt' \\ &\le 4 \int_{I_1} \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt' \le 2\end{aligned}$$

なる評価より $\Phi_1 : \xi \longmapsto \Phi_1(\xi)$ は $\mathscr{X}_1$ からそれ自身への写像となる。また、等式

$$\begin{aligned}&(\Phi_1(\xi) - \Phi_1(\eta))(t) \\ &= \int_{t_1}^t \int_0^1 \partial\alpha(t', \theta\xi(t', \cdot) + (1 - \theta)\eta(t', \cdot))d\theta(\xi(t', \cdot) - \eta(t', \cdot))dt'\end{aligned}$$

より不等式

$$d_1(\Phi_1(\xi), \Phi_1(\eta)) \le \frac{1}{2} d_1(\xi, \eta)$$

が任意の $\xi, \eta \in \mathscr{X}_1$ に対して成立つ。以上より Φ_1 は $\mathscr{X}_1$ 上の縮小写像となり唯一つの不動点 $\xi_1 \in \mathscr{X}_1$ を持つ：$\Phi_1(\xi_1) = \xi_1$

　また、このとき ξ_1 は評価

$$\|\partial\xi_1(t_2)\|_\infty \leq 4 = 2^2$$

を満たし

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_0(t), & t \in I_0 \\ \xi_1(t), & t \in I_1 \end{cases}$$

と置くと $\xi \in C((I_0 \cup I_1) \times \mathbb{R}) \cap C(I_0 \cup I_1; \dot{W}^1_\infty)$ は I_1 上

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0(t_1) + \int_{t_1}^t \alpha(t', \xi_1(t', \cdot))dt' \\ &= x + \int_0^{t_1} \alpha(t', \xi_0(t', \cdot))dt' + \int_{t_1}^t \alpha(t', \xi_1(t', \cdot))dt' \\ &= x + \int_0^t \alpha(t', \xi(t', \cdot))dt' \end{aligned}$$

を満たすので ξ は (2.4) の $[0, t_2] = I_0 \cup I_1$ 上の解となっている。

　そこで $n \geq 2$ とし $0 \leq k \leq n-1$ なる全ての k に対し次の $(P)_k$ が成立つものと仮定する：

$(P)_k : \xi_k \in \mathscr{X}_k$ が一意的に存在し積分方程式

$$\xi_k(t) = \xi_{k-1}(t_k) + \int_{t_k}^t \alpha\left(t', \xi_k(t', \cdot)\right)dt',\ t \in I_k = [t_k, t_{k+1}] \cap I = [k\delta_0, (k+1)\delta_0] \cap I$$

を満たす。ここに

$$\begin{aligned} \mathscr{X}_k = \{\xi \in C(I_k; W^1_\infty);\ &\sup_{t \in I_k} \|\xi(t) - \xi_{k-1}(t_k)\|_\infty \leq M_0, \\ &\sup_{t \in I_k} \|\partial\xi(t) - \partial\xi_{k-1}(t_k)\|_\infty \leq 2^k\} \end{aligned}$$

は $d_k(\xi, \eta) = \sup_{t \in I_k} \|\xi(t) - \eta(t)\|_\infty$ で定まる距離 d_k を備えた完備距離空間であり ξ_k は評価

$$\|\partial\xi_k(t_{k+1})\|_\infty \leq 2^{k+1}$$

を満たす。

　以上の仮定の下に ($k = n$ とした)$(P)_n$ を示そう。
$\xi \in \mathscr{X}_n$ に対し

$$\left(\Phi_n(\xi)\right)(t) = \xi_{n-1}(t_n) + \int_{t_n}^t \alpha\left(t', \xi(t', \cdot)\right)dt',\ t \in I_n$$

と置く。このとき $\Phi_n(\xi) \in C(I_n; W^1_\infty)$ であり

$$\left(\partial\Phi_n(\xi)\right)(t) = \partial\xi_{n-1}(t_n) + \int_{t_n}^t \partial\alpha\left(t', \xi(t', \cdot)\right)\partial\xi(t', \cdot)dt'$$

が成立つ。更に

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in I_n}\|\left(\Phi_n(\xi)\right)(t)-\xi_{n-1}(t_n)\|_\infty\leq\int_I\|\alpha(t')\|_\infty dt'=M_0,\\
&\sup_{t\in I_n}\|\left(\partial\Phi_n(\xi)\right)(t)-\partial\xi_{n-1}(t_n)\|_\infty\\
\leq&\int_{I_n}\|\partial\alpha(t')\|_\infty\|\partial\xi(t')\|_\infty dt'\\
\leq&\int_{I_n}\|\partial\alpha(t')\|_\infty\left(\sup_{t\in I_n}\|\partial\xi(t)-\partial\xi_{n-1}(t_n)\|_\infty+\|\partial\xi_{n-1}(t_n)\|_\infty\right)dt'\\
\leq&(2^n+2^n)\int_{I_n}\|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\leq 2^n
\end{aligned}
$$

なる評価より $\Phi_n:\xi\longmapsto\Phi_n(\xi)$ は $\mathscr{X}_n$ からそれ自身への写像となる。また、等式

$$
\begin{aligned}
&\left(\Phi_n(\xi)-\Phi_n(\eta)\right)(t)\\
=&\int_{t_n}^t\int_0^1\partial\alpha\left(t',\theta\xi(t',\cdot)+(1-\theta)\eta(t',\cdot)\right)d\theta\left(\xi(t',\cdot)-\eta(t',\cdot)\right)dt'
\end{aligned}
$$

より不等式

$$
d_n\left(\Phi_n(\xi),\Phi_n(\eta)\right)\leq\frac{1}{2}d_n(\xi,\eta)
$$

が任意の $\xi,\eta\in\mathscr{X}_n$ に対して成立つ。以上より Φ_n は $\mathscr{X}_n$ 上の縮小写像となり唯一つの不動点 $\xi_n\in\mathscr{X}_n$ を持つ：$\Phi_n(\xi_n)=\xi_n$
また、このとき ξ_n は評価

$$
\begin{aligned}
\|\partial\xi_n(t_{n+1})\|_\infty&\leq\sup_{t\in I_n}\|\partial\xi_n(t)-\partial\xi_{n-1}(t_n)\|_\infty+\|\partial\xi_{n-1}(t_n)\|_\infty\\
&\leq 2^n+2^n=2^{n+1}
\end{aligned}
$$

を満たす。以上より $(P)_n$ が導かれ、全ての $n\geq 0$ に対し $(P)_n$ が成立つ事となる。

$I=\displaystyle\bigcup_{n\geq 0}I_n$ であるから $\xi:I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$
\xi|I_n=\xi_n
$$

と定めると $\xi\in C(I\times\mathbb{R})\cap C(I;\dot{W}^1_\infty)$ となり ξ は積分方程式

$$
\xi(t)=x+\int_0^t\alpha(t',\xi(t',\cdot))dt',\quad t\in I
$$

を満たす事が分かる。次に一意性を示す。η をもう一つの解とすると

$$
\begin{aligned}
\xi(t)-\eta(t)&=\int_0^t\left(\alpha(t',\xi(t',\cdot))-\alpha\left(t',\eta(t',\cdot)\right)\right)dt'\\
&=\int_0^t\int_0^1\partial\alpha\left(t',\theta\xi(t',\cdot)+(1-\theta)\eta(t',\cdot)\right)d\theta\left(\xi(t',\cdot)-\eta(t',\cdot)\right)dt'
\end{aligned}
$$

より不等式

$$\|\xi(t)-\eta(t)\|_\infty \le \int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty \|\xi(t')-\eta(t')\|_\infty dt'$$

が従いグロンウォールの補題より $\xi=\eta$ が従う。評価 (2.5) は (2.4) から直接従い、(2.6) を示すには

$$\partial\xi(t) = 1 + \int_0^t \partial\alpha\left(t', \xi(t', \cdot)\right)\partial\xi(t', \cdot)dt'$$

から得られる不等式

$$\|\partial\xi(t)\|_\infty \le 1 + \int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty \|\partial\xi(t')\|_\infty dt'$$

にグロンウォールの補題を適用すれば良い。

さて $x, y \in \mathbb{R}$ に対し等式

$$\begin{aligned} &\xi(t,x)-\xi(t,y) \\ &= x - y + \int_0^t \int_0^1 \partial\alpha\left(t', \theta\xi(t',x)+(1-\theta)\xi(t',y)\right)d\theta\left(\xi(t',x)-\xi(t',y)\right)dt' \end{aligned} \tag{2.7}$$

が成立つので、不等式

$$|\xi(t,x)-\xi(t,y)| \le |x-y| + \int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty |\xi(t',x)-\xi(t',y)|\, dt'$$

が従う。グロンウォールの補題をこの不等式に適用すれば $\xi(t)$ のリプシッツ評価

$$|\xi(t,x)-\xi(t,y)| \le \exp\left(\int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\right)|x-y| \tag{2.8}$$

が得られる。また $x, y \in \mathbb{R}$ に対し等式

$$\begin{aligned} &\partial\xi(t,x)-\partial\xi(t,y) \\ &= \int_0^t \left(\partial\alpha(t', \xi(t',x)) - \partial\alpha\left(t', \xi(t',y)\right)\right)\partial\xi(t',x)dt' \\ &\quad + \int_0^t \partial\alpha\left(t', \xi(t',y)\right)\left(\partial\xi(t',x)-\partial\xi(t',y)\right)dt' \end{aligned}$$

から得られる不等式

$$\begin{aligned} &|\partial\xi(t,x)-\partial\xi(t,y)| \\ &\le \int_0^t |\partial\alpha(t',\xi(t',x)) - \partial\alpha(t',\xi(t',y))|\, |\partial\xi(t',x)|\, dt' \\ &\quad + \int_0^t |\partial\alpha(t',\xi(t',y))|\, |\partial\xi(t',x)-\partial\xi(t',y)|\, dt' \end{aligned}$$

に再びグロンウォールの補題を適用すれば

$$
\begin{aligned}
&|\partial\xi(t,x)-\partial\xi(t,y)| \\
&\leq \int_0^t \exp\left(\int_{t'}^t |\partial\alpha(t'',\xi(t'',y))|dt''\right) |\partial\alpha(t',\xi(t',x))-\partial\alpha(t',\xi(t',y))|\,|\partial\xi(t',x)|\,dt' \\
&\leq \int_0^t \exp\left(\int_{t'}^t \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) \\
&\qquad \cdot |\partial\alpha(t',\xi(t',x))-\partial\alpha(t',\xi(t',y))| \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) dt' \\
&= \int_0^t \exp\left(\int_0^t \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) |\partial\alpha\left(t',\xi(t',x)\right)-\partial\alpha\left(t',\xi(t',y)\right)|\,dt'
\end{aligned}
$$

$\partial\alpha$ に就いての滑らかさの仮定及び $\xi(t)$ のリプシッツ評価を最後の右辺に適用すれば $\partial\xi(t)$ の連続性が得られる。これで定理 1 の証明が完結した。

定理 1 より任意の $t\in I$ に対し $\mathbb{R}$ 上の変換

$$
T_t:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}
$$

が $T_t(x)=\xi(t,x),\ x\in\mathbb{R}$ で定義される。この一径数変換族 $(T_t;t\in I)$ に就いて纏めて置こう。

定理 2　定理 1 の設定の下で次が成立つ。

(1) 任意の $t\in I$ に対し $T_t\in(\mathrm{Lip}\cap C^1)(\mathbb{R};\mathbb{R})$

(2) 任意の $t\in I$ に対し $\partial T_t\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ であり、写像

$$
I\ni t\longmapsto\partial T_t\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})
$$

は連続である。

(3) $T_0=id$ (即ち任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $T_0(x)=x$)

(4) $I_0\subset I$ を $0\in I_0$ 且つ

$$
M:=\int_{I_0}\|\partial\alpha(t)\|_\infty dt\cdot\exp\left(\int_{I_0}\|\partial\alpha(t)\|_\infty dt\right)<1 \tag{2.9}
$$

を満たす区間とする。このとき $t\in I_0$ に対し T_t との逆変換 $T_t^{-1}=(T_t)^{-1}$ が存在し $T_t^{-1}\in(\mathrm{Lip}\cap C^1)(\mathbb{R};\mathbb{R})$

(5) 任意の $t\in I_0$ に対し $\partial(T_t^{-1})\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ であり、等式

$$
\begin{aligned}
&\partial(T_t^{-1})\circ T_t=1/(\partial T_t), \\
&\partial(T_t^{-1})=1/(\partial T_t\circ T_t^{-1})
\end{aligned}
$$

が成立つ。更に

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{|y|\le\delta}\int_{I_0}\|\tau_y\partial\alpha(t)-\partial\alpha(t)\|_\infty dt=0 \tag{2.10}$$

であると仮定すると、写像

$$I_0\ni t\longmapsto\partial(T_t^{-1})\in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

は連続である。ここに $(\tau_y\partial\alpha(t))(x)=\partial\alpha(t,x-y)$ とする。

(証明)　簡単の為 $t>0$ として考える。(2.4) より T_t は

$$T_t(x)=x+\int_0^t\alpha\left(t',T_{t'}(x)\right)dt', \tag{2.11}$$

$$\partial T_t(x)=1+\int_0^t\partial\alpha\left(t',T_{t'}(x)\right)\partial T_{t'}(x)dt' \tag{2.12}$$

を満たす。(1) と (3) は定理 1 より直ちに従う。また (2.6) より

$$\|\partial T_t\|_\infty=\|\partial\xi(t)\|_\infty\le\exp\left(\int_0^t\|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\right)$$

が従い $t>s$ なる $t,s\in I$ に対し、等式

$$\partial T_t(x)-\partial T_s(x)=\int_s^t\partial\alpha\left(t',T_{t'}(x)\right)\partial T_{t'}(x)dt'$$

より、連続性を示す評価

$$\begin{aligned}\|\partial T_t-\partial T_s\|_\infty&\le\int_s^t\|\partial\alpha(t')\|_\infty\|\partial T_{t'}\|_\infty dt'\\&\le\int_s^t\|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\cdot\exp\left(\int_I\|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\right)\end{aligned}$$

を得る。(4) の仮定 (2.9) の下で任意の $t\in I_0$ に対し

$$\begin{aligned}\partial T_t(x)&\ge 1-\int_0^t\|\partial\alpha(t')\|_\infty\|\partial T_{t'}\|_\infty dt'\\&\ge 1-\int_0^t\|\partial\alpha(t')\|_\infty\exp\left(\int_0^{t'}\|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right)dt'\\&\ge 1-\int_{I_0}\|\partial\alpha(t)\|_\infty dt\cdot\exp\left(\int_{I_0}\|\partial\alpha(t)\|_\infty dt\right)\\&=1-M>0\end{aligned}$$

となるので逆函数定理より T_t の逆 $T_t^{-1}=(T_t)^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が C^1 函数として存在する。(2.11) より

$$\begin{aligned}&T_t(x)-T_t(y)\\&=x-y+\int_0^t\int_0^1\partial\alpha\left(t',\theta T_{t'}(x)+(1-\theta)T_{t'}(y)\right)d\theta\left(T_{t'}(x)-T_{t'}(y)\right)dt'\end{aligned}$$

を得るが $x, y \in \mathbb{R}$ は任意故 x 及び y に夫々 $T_t^{-1}(x)$ 及び $T_t^{-1}(y)$ を代入し

$$
\begin{aligned}
x - y = {} & T_t^{-1}(x) - T_t^{-1}(y) \\
& + \int_0^t \int_0^1 \partial\alpha\left(t', \theta T_{t'}(T_t^{-1}(x)) + (1-\theta)T_{t'}(T_t^{-1}(y))\right) d\theta \left(T_{t'}(T_t^{-1}(x)) - T_{t'}(T_t^{-1}(y))\right) dt'
\end{aligned}
$$

を得る。これより

$$
\begin{aligned}
& |T_t^{-1}(x) - T_t^{-1}(y)| \\
& \leq |x-y| + \int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty |T_{t'}(T_t^{-1}(x)) - T_{t'}(T_t^{-1}(y))| dt' \\
& \leq |x-y| + \int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) |T_t^{-1}(x) - T_t^{-1}(y)| dt' \\
& \leq |x-y| + \int_{I_0} \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt' \cdot \exp\left(\int_{I_0} \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\right) |T_t^{-1}(x) - T_t^{-1}(y)|
\end{aligned}
$$

を得る。ここに T_t のリプシッツ評価 (2.8)

$$
|T_t(x) - T_t(y)| \leq \exp\left(\int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'\right) |x-y| \tag{2.13}
$$

を用いた。仮定 (2.9) より T_t のリプシッツ評価

$$
|T_t^{-1}(x) - T_t^{-1}(y)| \leq \frac{1}{1-M}|x-y| \tag{2.14}
$$

が従う。以上より (4) が示された。最後に (5) を示そう。任意の $t \in I_0$ に対し

$$
T_t \circ T_t^{-1}(x) = T_t^{-1} \circ T_t(x) = x
$$

が成立つから合成函数の微分法より

$$
\partial T_t(T_t^{-1}(x)) \cdot \partial(T_t^{-1})(x) = \partial(T_t^{-1})(T_t(x)) \cdot \partial T_t(x) = 1
$$

を得る。また

$$
0 \leq \partial(T_t^{-1})(x) = \frac{1}{\partial T_t(T_t^{-1}(x))} \leq \frac{1}{1-M}
$$

より $\partial(T_t^{-1}) \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を得る。最後に (2.10) の仮定の下で $I_0 \ni t \longmapsto \partial(T_t^{-1}) \in L^\infty$ は連続である事を示そう。以下では $t, s \in I_0$ は $0 < s < t$ なるものとする。
等式

$$
\begin{aligned}
& T_t^{-1}(x) - T_s^{-1}(x) \\
& = -\int_0^t \alpha\left(t', T_{t'}(T_t^{-1}(x))\right) dt' + \int_0^s \alpha\left(t', T_{t'}(T_s^{-1}(x))\right) dt' \\
& = -\int_s^t \alpha\left(t', T_{t'}(T_t^{-1}(x))\right) dt' - \int_0^s \left(\alpha(t', T_{t'}(T_t^{-1}(x))) - \alpha(t', T_{t'}(T_s^{-1}(x)))\right) dt' \\
& = -\int_s^t \alpha\left(t', T_{t'}(T_t^{-1}(x))\right) dt' \\
& \quad - \int_0^s \int_0^1 \partial\alpha\left(t', \theta T_{t'}(T_t^{-1}(x)) + (1-\theta)T_{t'}(T_s^{-1}(x))\right) d\theta \left(T_{t'}(T_t^{-1}(x)) - T_{t'}(T_s^{-1}(x))\right) dt'
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&|T_t^{-1}(x) - T_s^{-1}(x)| \\
&\leq \int_s^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt' + \int_0^s \|\partial\alpha(t')\|_\infty \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) dt' |T_t^{-1}(x) - T_s^{-1}(x)| \\
&\leq \int_s^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt' + M' |T_t^{-1}(x) - T_s^{-1}(x)|
\end{aligned}
$$

を得るので

$$
|T_t^{-1}(x) - T_s^{-1}(x)| \leq \frac{1}{1-M} \int_s^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt'
$$

更には (2.14) より任意の $t' \in I$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\|T_{t'} \circ T_t^{-1} - T_{t'} \circ T_s^{-1}\|_\infty \\
&\leq \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) \cdot \frac{1}{1-M} \int_s^t \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt'' \\
&\leq \frac{e^{M_1}}{1-M} \int_s^t \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt'' =: \delta(t,s)
\end{aligned}
$$

を得る。従って

$$
\begin{aligned}
&\partial T_t(T_t^{-1}(x)) - \partial T_t(T_s^{-1}(x)) \\
=& \int_0^t \left(\partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_t^{-1}(x)) \partial T_{t'}(T_t^{-1}(x)) - \partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_s^{-1}(x)) \partial T_{t'}(T_s^{-1}(x))\right) dt' \\
=& \int_0^t \partial\alpha\left(t', T_{t'} \circ T_t^{-1}(x))(\partial T_{t'}(T_t^{-1}(x)\right) - \partial T_{t'}\left(T_s^{-1}(x))\right) dt' \\
&+ \int_0^t \left(\partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_t^{-1}(x)) - \partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_s^{-1}(x))\right) \partial T_{t'}(T_s^{-1}(x)) dt'
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&|\partial T_t(T_t^{-1}(x)) - \partial T_t(T_s^{-1}(x))| \\
&\leq \int_0^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty |\partial T_{t'}(T_t^{-1}(x)) - \partial T_{t'}(T_s^{-1}(x))| dt' \\
&+ \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) |\partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_t^{-1}(x)) - \partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_s^{-1}(x))| dt'
\end{aligned}
$$

を得る。グロンウォールの補題より

$$
\begin{aligned}
&|\partial T_t(T_t^{-1}(x)) - \partial T_t(T_s^{-1}(x))| \\
&\leq \int_0^t \exp\left(\int_{t'}^t \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) |\partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_t^{-1}(x)) - \partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_s^{-1}(x))| dt' \\
&= \int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) |\partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_t^{-1}(x)) - \partial\alpha(t', T_{t'} \circ T_s^{-1}(x))| dt'
\end{aligned}
$$

が従い、評価

$$
\begin{aligned}
&\|\partial T_t \circ T_t^{-1} - \partial T_t \circ T_s^{-1}\|_\infty \\
&\le \exp\left(\int_{I_0} \|\partial\alpha(t'')\|_\infty dt''\right) \sup_{|y|\le\delta(t,s)} \int_0^t \|\tau_y \partial\alpha(t') - \partial\alpha(t')\|_\infty dt',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\partial T_t \circ T_t^{-1} - \partial T_s \circ T_s^{-1}\|_\infty \\
&\le \|\partial T_t \circ T_t^{-1} - \partial T_t \circ T_s^{-1}\|_\infty + \|\partial T_t \circ T_s^{-1} - \partial T_s \circ T_s^{-1}\|_\infty \\
&\le e^{M_1} \sup_{|y|\le\delta(t,s)} \int_{I_0} \|\tau_y \partial\alpha(t') - \partial\alpha(t')\|_\infty dt' + \|\partial T_t - \partial T_s\|_\infty \\
&\le e^{M_1} \left(\sup_{|y|\le\delta(t,s)} \int_{I_0} \|\tau_y \partial\alpha(t') - \partial\alpha(t')\|_\infty dt' + \int_s^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt' \right)
\end{aligned}
$$

が成立つ。これを

$$
\partial(T_t^{-1}) - \partial(T_s^{-1}) = \frac{\partial T_s \circ T_s^{-1} - \partial T_t \circ T_t^{-1}}{(\partial T_t \circ T_t^{-1})(\partial T_s \circ T_s^{-1})}
$$

に用いて

$$
\begin{aligned}
&\|\partial(T_t^{-1}) - \partial(T_s^{-1})\|_\infty \\
&\le \frac{e^{M_1}}{(1-M)^2} \left(\sup_{|y|\le\delta(t,s)} \int_{I_0} \|\tau_y \partial\alpha(t') - \partial\alpha(t')\|_\infty dt' + \int_s^t \|\partial\alpha(t')\|_\infty dt' \right)
\end{aligned}
$$

を得るので $I_0 \ni t \longmapsto \partial(T_t^{-1}) \in L^\infty$ の連続性が従う。

さて定理 2 で与えられる一径数変換族 $(T_t; t \in I_0)$ を用いて、一階偏微分方程式 (2.1) の初期値問題の解の表示公式を与えて置こう。

定理３　$\alpha, \beta, \gamma \in C(I; L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ とし、定理 1 の設定の下で定理 2 で与えられる一径数変換族を $(T_t; t \in I_0)$ とする。このとき $u \in C^1(I_0; W^1_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ 及び $u_0 \in W^1_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) u は (2.1) の初期値問題

$$
\begin{cases}
\partial_t u + \alpha \partial u = \beta u + \gamma, \\
u(0) = u_0
\end{cases}
$$

の解である。

(2) u は任意の $(t, x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$
\begin{aligned}
u(t, T_t(x)) = &\exp\left(\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) u_0(x) \\
&+ \int_0^t \exp\left(\int_s^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) \gamma(s, T_s(x)) ds
\end{aligned}
$$

と表示される。

(3) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \exp\left(\int_0^t \beta\left(t', T_{t'}(T_t^{-1}(x))\right) dt'\right) u_0(T_t^{-1}(x)) \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \beta\left(t', T_{t'}(T_t^{-1}(x))\right) dt'\right) \gamma\left(s, T_s(T_t^{-1}(x))\right) ds \end{aligned}$$

と表示される。

系 1　$u \in C^1(I_0; W^1_\infty)$ 及び $u_0 \in W^1_\infty$ に対し次は同値である。

(1) u は初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha \partial u = \gamma, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の解である。

(2) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$u(t, T_t(x)) = u_0(x) + \int_0^t \gamma(s, T_s(x)) ds$$

と表示される。

(3) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$u(t,x) = u_0(T_t^{-1}(x)) + \int_0^t \gamma\left(s, T_s(T_t^{-1}(x))\right) ds$$

と表示される。

系 2　$u \in C^1(I_0; W^1_\infty)$ 及び $u_0 \in W^1_\infty$ に対し次は同値である。

(1) u は初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha \partial u = \beta u, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の解である。

(2) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$u(t, T_t(x)) = \exp\left(\int_0^t \beta\left(t', T_{t'}(x)\right) dt'\right) u_0(x)$$

と表示される。

(3) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$u(t,x) = \exp\left(\int_0^t \beta(t', T_{t'}\left(T_t^{-1}(x)\right))\, dt'\right) u_0(T_t^{-1}(x))$$

と表示される。

系３　$u \in C^1(I_0; W^1_\infty)$ 及び $u_0 \in W^1_\infty$ に対し次は同値である。

(1) u は初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha \partial u = 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の解である。

(2) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$u(t, T_t(x)) = u_0(x)$$

と表示される。

(3) u は任意の $(t,x) \in I_0 \times \mathbb{R}$ に対し

$$u(t,x) = u_0(T_t^{-1}(x))$$

と表示される。

(定理３の証明)　(2) $\Leftrightarrow$ (3) は明らかなので (1) $\Leftrightarrow$ (2) を示そう。

(1) $\Rightarrow$ (2):

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left(\exp\left(-\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) u(t, T_t(x))\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) (-\beta(t, T_t(x)) u(t, T_t(x)) \\
&\qquad\qquad + \partial_t u(t, T_t(x)) + \partial_t (T_t(x)) \partial u(t, T_t(x))) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) (-\beta(t, T_t(x)) u(t, T_t(x)) \\
&\qquad\qquad + \partial_t u(t, T_t(x)) + \alpha(t, T_t(x)) \partial u(t, T_t(x))) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) (\partial_t u + \alpha \partial u - \beta u)(t, T_t(x)) \\
&= \exp\left(-\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x)) dt'\right) \gamma(t, T_t(x))
\end{aligned}$$

を 0 から t まで積分すれば良い。

(2) ⇒ (1): (2) に $t=0$ を代入すれば $u(0,x)=u_0(x)$ が従う。また、(2) の左辺を t で微分すると

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u(t, T_t(x)) + \partial_t (T_t(x)) \partial u(t, T_t(x)) \\
&= (\partial_t u + \alpha \partial u)(t, T_t(x))
\end{aligned}
$$

が得られ、右辺を t で微分すると

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x))dt'\right)\beta(t, T_t(x))u_0(x) \\
&\quad + \gamma(t, T_t(x)) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \beta(t', T_{t'}(x))dt'\right)\beta(t, T_t(x))\gamma(s, T_s(x))ds \\
&= \beta(t, T_t(x))\left(\exp\left(\int_0^t \beta(t', T_{t'}(x))dt'\right)u_0(x) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \beta(t', T_{t'}(x))dt'\right)\gamma(s, T_s(x))ds\right) \\
&\quad + \gamma(t, T_t(x)) \\
&= \beta(t, T_t(x))u(t, T_t(x)) + \gamma(t, T_t(x)) \\
&= (\beta u + \gamma)(t, T_t(x))
\end{aligned}
$$

が得られるので x に $T_t^{-1}(x)$ を代入すれば (1) が従う。

3 自励系の場合

前節では α は $(t,x) \in I \times \mathbb{R}$ の函数として論じてきた。特別な場合として自励系、即ち α が $x \in \mathbb{R}$ のみの函数である場合を考えよう。

定理４ $\alpha \in (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R})$ に対し次が成立つ。

(1) 微分方程式の初期値問題

$$
\begin{cases}
\partial_t \xi(t,x) = \alpha(\xi(t,x)), \\
\xi(0,x) = x
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

は $\xi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}; \dot{W}^1_\infty)$ なる一意的な解を持つ。

(2) (1) で与えられる ξ 及び $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$
T_t(x) = \xi(t,x), \quad x \in \mathbb{R}
$$

と置くと $\mathbb{R}$ 上の変換 $T_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が定まる。この $(T_t; t \in \mathbb{R})$ は次を満たす。

(a) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $T_t \in (\mathrm{Lip} \cap C^1)(\mathbb{R};\mathbb{R})$

(b) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\partial T_t \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ であり、写像

$$
\mathbb{R} \ni t \longmapsto \partial T_t \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})
$$

は連続である。

(c) 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対し

$$T_t \circ T_s = T_{t+s}$$

(d) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$(T_t)^{-1} = T_{-t}$$

(証明)　簡単の為に $t \geq 0$ の場合を考える。微分方程式の初期値問題 (3.1) を書き換えた積分方程式

$$\xi(t,x) = x + \int_0^t \alpha(\xi(t',x))dt' \tag{3.2}$$

を函数空間 $\mathscr{X} = C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}; \dot{W}^1_\infty)$ の閉球 $\mathscr{Y}$ を

$$\mathscr{Y} = \{\xi \in \mathscr{X};\ \sup_{t\geq 0} e^{-Lt}\|\xi(t) - x\|_\infty \leq \frac{\|\alpha\|_\infty}{eL},\ \sup_{t\geq 0} e^{-Lt}\|\partial\xi(t) - 1\|_\infty \leq 1\}$$

と定める。ここに $L = 2\|\partial\alpha\|_\infty + 1$ とする。$\mathscr{Y}$ は $d(\xi,\eta) = \sup_{t\geq 0} e^{-Lt}\|\xi(t) - \eta(t)\|_\infty$ で定まる距離 d で完備となる。$\xi \in \mathscr{Y}$ に対し (3.2) の右辺を $\Phi(\xi)$ とする：

$$(\Phi(\xi))(t,x) = x + \int_0^t \alpha(\xi(t',x))dt'$$

このとき二つの評価

$$\begin{aligned}
e^{-Lt}\|(\Phi(\xi))(t) - x\|_\infty &\leq e^{-Lt}t\|\alpha\|_\infty \leq \frac{\|\alpha\|_\infty}{eL}, \\
e^{-Lt}\|\partial(\Phi(\xi))(t) - 1\|_\infty &\leq e^{-Lt}\int_0^t \|\partial\alpha\|_\infty \|\partial\xi(t')\|_\infty dt' \\
&\leq e^{-Lt}\|\partial\alpha\|_\infty \int_0^t (e^{Lt'} + 1)dt' \\
&= e^{-Lt}\|\partial\alpha\|_\infty \left(\frac{1}{L}(e^{Lt} - 1) + t\right) \\
&\leq \frac{2}{L}\|\partial\alpha\|_\infty \leq 1
\end{aligned}$$

より $\Phi : \xi \longmapsto \Phi(\xi)$ は $\mathscr{Y}$ からそれ自身への写像となる。また $\xi, \eta \in \mathscr{Y}$ に対して成立つ等式

$$\begin{aligned}
\left(\Phi(\xi) - \Phi(\eta)\right)(t) &= \int_0^t \left(\alpha(\xi(t')) - \alpha(\eta(t'))\right) dt' \\
&= \int_0^t \int_0^1 \partial\alpha(\theta\xi(t') + (1-\theta)\eta(t'))d\theta \left(\xi(t') - \eta(t')\right) dt'
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
e^{-Lt}\|\left(\Phi(\xi) - \Phi(\eta)\right)(t)\|_\infty &\leq e^{-Lt}\int_0^t \|\partial\alpha\|_\infty \|\xi(t') - \eta(t')\|_\infty dt' \\
&\leq e^{-Lt}\|\partial\alpha\|_\infty \int_0^t e^{Lt'}dt' \cdot d(\xi,\eta) \\
&\leq \|\partial\alpha\|_\infty \frac{1}{L} d(\xi,\eta)
\end{aligned}$$

を得るので

$$d\left(\Phi(\xi), \Phi(\eta)\right) \leq \frac{1}{2} d(\xi, \eta)$$

が従い Φ は $\mathscr{Y}$ 上の縮小写像となり $\mathscr{Y}$ に唯一つの不動点を持つ。これが (3.1) の解を与える。(3.1) の解の $\mathscr{X}$ に於ける一意性は $\partial\alpha$ の有界性とグロンウォールの補題から従う。
$(T_t; t \in \mathbb{R})$ の性質 (a)(b) は定理 2 で示したので (c)(d) を示そう。T_t の定義より

$$T_t(x) = x + \int_0^t \alpha(T_{t'}(x))dt'$$

が任意の $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して成立つ。故に二つの等式

$$\begin{aligned} T_{t+s}(x) &= x + \int_0^{t+s} \alpha(T_{t'}(x))dt', \\ T_t(T_s(x)) &= T_s(x) + \int_0^t \alpha\left(T_{t'}(T_s(x))\right)dt' \end{aligned}$$

が成立つ。これらは t を独立変数とする発展方程式の初期値問題の解となる:

$$\begin{cases} \partial_t(T_{t+s}(x)) = \alpha(T_{t+s}(x)), \\ T_{t+s}(x)|_{t=0} = x + \displaystyle\int_0^s \alpha(T_{t'}(x))dt' = T_s(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t\left(T_t(T_s(x))\right) = \alpha\left(T_t(T_s(x))\right), \\ T_t(T_s(x))|_{t=0} = T_s(x) \end{cases}$$

解の一意性より $T_{t+s}(x) = T_t(T_s(x))$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ 及び任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して成立つ。これより (c)(d) が従う。

以上の結果を $(\mathrm{LW})_\pm$ に適用しよう。$\alpha(t, x) = \pm c$ であるから (2.2)(または (3.1)) は

$$\begin{cases} \partial_t \xi(t, x) = \pm c, \\ \xi(0, x) = x \end{cases}$$

となり $\xi_\pm(t, x) = x \pm ct$ が一意的な時間大域解となる。対応する一径数変換群 $(T_t^\pm; t \in \mathbb{R})$ は

$$T_t^\pm(x) = x \pm ct$$

で与えられ

$$(T_t^\pm)^{-1}(x) = x \mp ct = T_t^\mp(x) = T_{-t}^\pm(x)$$

を逆変換として持つ。従って初期条件 $u_\pm(0) = u_\pm^0 \in W_\infty^1$ を満たす $(\mathrm{LW})_\pm$ の解 $u_\pm \in \mathscr{X}$ は定理 3 の系 3 より

$$u_\pm(t) = u_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} = u_\pm^0 \circ T_t^\mp, \quad t \in \mathbb{R}$$

で与えられる。これは所謂ダランベールの解に外ならない。

さて初期条件 $(u(0), \partial_t u(0)) = (u_0, u_1)$ を満たす (LW) の解 u は

$$u_\pm^0 = u_1 \mp c\partial u_0 \in W_\infty^1$$

を初期値とする $(\mathrm{LW})_\pm$ の解 $u_\pm \in \mathscr{X}$ を外力とする一階の偏微分方程式

$$\begin{cases} (\partial_t \mp c\partial)u = u_\pm \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

の解で与えられる。定理 3 の系 1 により、この解 u は

$$u(t,x) = u_0\left((T_t^\mp)^{-1}(x)\right) + \int_0^t u_\pm\left(s, T_s^\mp \circ \left(T_t^\mp\right)^{-1}(x)\right) ds$$

と表される。この右辺を更に書き換えれば、所謂ダランベールの公式

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= u_0\left(T_t^\pm(x)\right) + \int_0^t u_\pm\left(s, T_{t-s}^\pm(x)\right) ds \\
&= u_0(x \pm ct) + \int_0^t u_\pm\left(s, x \pm c(t-s)\right) ds \\
&= u_0(x \pm ct) + \int_0^t u_\pm^0\left((x \pm c(t-s) \mp cs\right) ds \\
&= u_0(x \pm ct) + \int_0^t (u_1 \mp c\partial u_0)(x \pm ct \mp 2cs) ds \\
&= u_0(x \pm ct) + \int_0^t u_1(x \pm ct \mp 2cs) ds \mp c \int_0^t \partial u_0(x \pm ct \mp 2cs) ds \\
&= u_0(x \pm ct) \mp \frac{1}{2c} \int_{x \pm ct}^{x \mp ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\mp 2ct} \partial u_0(x \pm ct + \tau) d\tau \\
&= u_0(x \pm ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2}\left(u_0(x \mp ct) - u_0(x \pm ct)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy
\end{aligned}$$

が従う。

参考文献：
L.C.Evans, “Partial Differential Equations,” AMS
熊ノ郷 準, 『偏微分方程式』, 共立出版