一次元横波模型としての波動方程式

平成 31 年 3 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

空間一次元（時空二次元）縦型模型の考察（『一次元縦波模型としての波動方程式』以下 [縦] として引用する）に引き続き横波模型としての波動方程式の初期値問題の解法に就いて考える。

１．横波模型

一次元的な弦 string（或は撥条 spring）を伝播する横波模型 transversal wave model として次の方程式を考える：

$$\text{(TW)}_\mathrm{c} \qquad \partial_t^2 q = c^2 \partial \left((1 + (\partial q)^2)^{-1/2} \partial q \right)$$

ここに q は二次元時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の部分領域 $I \times \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ は初期時刻 0 を含む時間区間) に於けるスカラー場

$$q : I \times \mathbb{R} \ni (t, x) \longmapsto q(t, x) \in \mathbb{R}$$

であり (TW)_c は q に就いての二階準線型偏微分方程式 quasilinear partial differential equation of second order の形を取っている。時間軸の尺度変換 $t \longmapsto c^{\pm 1} t$ に依り $c = 1$ の場合

$$\text{(TW)} \qquad \partial_t^2 q = \partial \left((1 + (\partial q)^2)^{-1/2} \partial q \right)$$

を考察の対象としても一般性を失わないので、以下では専ら (TW) の解法に就いて論じる。

２．一階双曲系への帰着

(TW) の一階化を図る為、新たな未知函数 u 及び v を

$$u = \partial_t q, \quad v = \partial q \tag{2.1}$$

と置いて (TW) から新たに u, v の満たすべき方程式 (の系) を求めよう。(TW) は (2.1) に依り

$$\partial_t u = \partial \left((1 + v^2)^{-1/2} v \right) \tag{2.2}$$

と表される。(2.2) の右辺の微分を実行すると

$$\begin{aligned} \partial_t u &= (1 + v^2)^{-1/2} \partial v - (1 + v^2)^{-3/2} v^2 \partial v \\ &= (1 + v^2)^{-3/2} \left((1 + v^2) - v^2 \right) \partial v \\ &= (1 + v^2)^{-3/2} \partial v \end{aligned} \tag{2.3}$$

なる一階の方程式が得られる。そこでベクトル値未知函数

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : I \times \mathbb{R} \ni (t,x) \longmapsto \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を導入すると、その満たすべき方程式系は

$$\text{(HS)} \qquad \partial_t U + A(U)\partial U = 0$$

の形で与えられる。ここに

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & -(1+v^2)^{-3/2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

であり (HS) は (2.3) に加えて自明と期待される関係式

$$\partial_t v = \partial u \tag{2.5}$$

を取り入れた方程式系に外ならない事が分かる。(2.4) を対角化して、二つの単独一階偏微分方程式から成る新しい系に書き換えよう。行列 $A(U)$ の固有値は $\pm(1+v^2)^{-3/4}$ である。実際

$$\det(\lambda I - A(U)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & (1+v^2)^{-3/2} \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (1+v^2)^{-3/2}$$

となるからである。そこで $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ となる様に

$$\lambda_\pm := \pm(1+v^2)^{-3/4} \tag{2.5$_\pm$}$$

と置こう。対応する固有ベクトル $e_\pm(U)$ は

$$e_\pm(U) := \begin{pmatrix} \mp(1+v^2)^{-3/4} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.6$_\pm$}$$

で与えられる。実際

$$A(U)e_\pm(U) = \begin{pmatrix} 0 & -(1+v^2)^{-3/2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp(1+v^2)^{-3/4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+v^2)^{-3/2} \\ \pm(1+v^2)^{-3/4} \end{pmatrix}$$

$$= \pm(1+v^2)^{-3/4} \begin{pmatrix} \mp(1+v^2)^{-3/4} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_\pm e_\pm(U)$$

となるからである。二つの固有空間 $\mathbb{R}e_\pm(U)$ の成す直和分解 $\mathbb{R}^2 = \bigoplus_\pm \mathbb{R}e_\pm(U)$ に対する U の分解を考え、その係数に相当する成分を時空二変数函数として $v_\pm$ と表そう:

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_\pm v_\pm e_\pm(U) = v_+ e_+(U) + v_- e_-(U) = \begin{pmatrix} (1+v^2)^{-3/4}(v_- - v_+) \\ v_+ + v_- \end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{cases}(1+v^2)^{3/4}u = v_- - v_+ \\ v = v_+ + v_-\end{cases} \tag{2.7}$$

が従い $v_\pm$ は u 及び v に依って

$$v_\pm = \frac{1}{2}(v \mp (1+v^2)^{3/4}u) \tag*{$(2.8)_\pm$}$$

と表される。波動函数 U の (空間) 導函数 ∂U の $\mathbb{R}e_\pm(U)$ 上への分解も同様に考え、その係数に相当する函数を $w_\pm$ と表そう。

$$\partial U = \begin{pmatrix}\partial u \\ \partial v\end{pmatrix} = \sum_\pm w_\pm e_\pm(U) = \begin{pmatrix}(1+v^2)^{-3/4}(w_- - w_+) \\ w_+ + w_-\end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{cases}(1+v^2)^{3/4}\partial u = w_- - w_+ \\ \partial v = w_+ + w_-\end{cases} \tag{2.9}$$

が従い $w_\pm$ は ∂u 及び ∂v に依って

$$w_\pm = \frac{1}{2}(\partial v \mp (1+v^2)^{3/4}\partial u) \tag*{$(2.10)_\pm$}$$

と表され、更に $v_\pm$ に依って

$$\begin{aligned}
w_\pm &= \frac{1}{2}\left(\partial(v_+ + v_-) \mp (1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-3/4}(v_- - v_+)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial(v_+ + v_-) \pm \partial(v_+ - v_-) \pm [(1+v^2)^{3/4}\partial((1+v^2)^{-3/4})](v_+ - v_-)\right) \\
&= \partial v_\pm \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\partial v(v_+ - v_-) \\
&= \partial v_\pm \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}(v_+ + v_-)(\partial v_+ + \partial v_-)(v_+ - v_-) \\
&= \frac{1}{4}(1+v^2)^{-1}[4(1+v^2)\partial v_\pm \mp 3(v_+^2 - v_-^2)(\partial v_+ + \partial v_-)] \\
&= \frac{1}{4}(1+v^2)^{-1}[4(1+v_+^2 + 2v_+v_- + v_-^2)\partial v_\pm \mp 3(v_+^2 - v_-^2)\partial v_+ \mp 3(v_+^2 - v_-^2)\partial v_-] \\
&= \frac{1}{4}(1+v^2)^{-1}[(4 + v_\pm^2 + 7v_\mp^2 + 8v_+v_-)\partial v_\pm \mp 3(v_+^2 - v_-^2)\partial v_\mp] \qquad (2.11)_\pm
\end{aligned}$$

と表される。

u 及び v の方程式 (HS) から (2.7)-$(2.10)_\pm$ に依り $v_\pm, w_\pm$ の方程式を導出しよう。$A(U)$ の固有値 $\lambda_\pm$ が $(2.5)_\pm$ で与えられると云う事情に鑑み $v_\pm, w_\pm$ に $\partial_t + \lambda_\pm\partial$ を作用させ

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)v_\pm \\
&= \frac{1}{2}(\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)(v \mp (1+v^2)^{3/4}u) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_t v \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial v) \mp \frac{1}{2}(1+v^2)^{3/4}(\partial_t u \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial u) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mp \frac{1}{2}\left[(\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)(1+v^2)^{3/4}\right]u \\
&= \frac{1}{2}(\partial u \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial v) \mp \frac{1}{2}(1+v^2)^{3/4}((1+v^2)^{-3/2}\partial v \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial u) \\
&\quad \mp \frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-1/4}v\partial_t v \pm (1+v^2)^{-1}v\partial v\right]u \\
&= \frac{1}{2}(\partial u \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial v) \mp \frac{1}{2}(1+v^2)^{-3/4}\partial v - \frac{1}{2}\partial u \\
&\quad \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1/4}vu\partial u - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}vu\partial v \\
&= -\frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}\left[\pm(1+v^2)^{3/4}\partial u + \partial v\right]uv \\
&= -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}w_\mp\left((1+v^2)^{-3/4}(v_- - v_+)\right)(v_+ + v_-) \\
&= \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_\pm \\
&= \frac{3}{2}\left(1+(v_+ + v_-)^2)\right)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_\pm, \qquad (2.12)_\pm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)w_\pm \\
&= \frac{1}{2}(\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)(\partial v \mp (1+v^2)^{3/4}\partial u) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_t\partial v \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial^2 v) \mp \frac{1}{2}(1+v^2)^{3/4}(\partial_t\partial u \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial^2 u) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mp \frac{1}{2}[(\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)(1+v^2)^{3/4}]\partial u \\
&= \frac{1}{2}(\partial^2 u \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial^2 v) \mp \frac{1}{2}(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-3/2}\partial v\right) - \frac{1}{2}\partial^2 u \\
&\quad \mp \frac{3}{4}\left[(1+v^2)^{-1/4}v\partial_t v \pm (1+v^2)^{-1}v\partial v\right]\partial u \\
&= \mp \frac{1}{2}\left[(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-3/2}\right)\right]\partial u \\
&\quad \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1/4}v(\partial u)^2 - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\partial v\partial u \\
&= \pm\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v(\partial v)^2 \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1/4}v(\partial u)^2 - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\partial v\partial u \\
&= \pm\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v(w_+ + w_-)^2 \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1/4}v\left((1+v^2)^{-3/4}(w_+ - w_-)\right)^2 \\
&\quad + \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v(w_+ + w_-)(1+v^2)^{-3/4}(w_+ - w_-) \\
&= \pm\frac{3}{4}(1+v^2)^{-7/4}v\left[2(w_+ + w_-)^2 - (w_+ - w_-)^2 \pm (w_+^2 - w_-^2)\right] \qquad (2.13)_\pm
\end{aligned}
$$

を得る。

以上を纏めると次の様になる:

$$\boxed{\text{横波模型}\quad \partial_t^2 q = \partial((1+(\partial q)^2)^{-1/2}\partial q)} \tag{TW}$$

一階化 $\quad \Big\downarrow \quad u = \partial_t q,\ v = \partial q$

$$\boxed{\text{一階双曲系}\quad \begin{aligned} &\partial_t u = (1+v^2)^{-3/2}\partial v \\ &\partial_t v = \partial u \end{aligned}} \tag{HS}$$

対角化

微分損失消滅化

$$v_\pm = \frac{1}{2}(v \mp (1+v^2)^{3/4}u) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (1+v^2)^{3/4}\ u = v_- - v_+ \\ \qquad\qquad v = v_+ + v_- \end{cases}$$

$$w_\pm = \frac{1}{2}(\partial v \mp (1+v^2)^{3/4}\partial u) \Leftrightarrow \begin{cases} (1+v^2)^{3/4}\ \partial u = w_- - w_+ \\ \qquad\qquad \partial v = w_+ + w_- \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{微分非損失型} & (\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)v_\pm = \dfrac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_\pm \\ \text{一階双曲系} & (\partial_t \pm (1+v^2)^{-3/4}\partial)w_\pm \\ & = \pm\dfrac{3}{4}(1+v^2)^{-7/4}v\left(2(w_+ + w_-)^2 - (w_+ - w_-)^2 \pm (w_+^2 - w_-^2)\right) \end{array}} \tag{DHS}$$

3．微分非損失型一階双曲系の初期値問題に関する基礎定理

微分非損失型一階双曲系 (DHS) を特性曲線法を用いて更に書き換えよう。時間区間 $I = [-T, T]$ 上の $C^1 \cap W^1_\infty$ 値連続函数 $v_\pm \in C(I; (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R}))$ が一組与えられたものとして、一階非線型微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t \xi_\pm(t,x) = \mp\left(1 + v(t, \xi_\pm(t,x))^2\right)^{-3/4} \\ \qquad\qquad\quad = \mp\left(1 + (v_+(t,\xi_\pm(t,x)) + v_-(t,\xi_\pm(t,x)))^2\right)^{-3/4}, \\ \xi_\pm(0,x) = x \end{cases} \tag{3.1$_\pm$}$$

を与える。これは [縦] 第 2 節 (2.2) の α を

$$\alpha = \mp(1+v^2)^{-3/4} = \mp(1+(v_+ + v_-)^2)^{-3/4}$$

としたものに外ならない。$T > 0$ を充分小さく取れば、[縦] 定理 1 及び 2 より $(3.1)_\pm$ は $I = [-T, T]$ 上に一意的な解 $\xi_\pm \in \mathscr{X} = C^1(I \times \mathbb{R}) \cap C(I; \dot{W}^1_\infty)$ を持ち

$$T_t^\pm(x) = \xi_\pm(t,x), \quad (t,x) \in I \times \mathbb{R}$$

で定まる一径数変換族 $(T_t^\pm; t \in I)$ は [縦] 定理 2 の性質を $I_0 = I = [-T, T]$ 上で満たしている事が分かる。更に [縦] 定理 3 の系 1 を (DHS) に適用すれば $(v_\pm, w_\pm)$ の満たすべき積

分方程式

$$
\begin{aligned}
v_\pm(t) &= v_\pm(t,\cdot) \\
&= v^0_\pm \circ (T^\pm_t)^{-1} + \int_0^t F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)(s, T^\pm_s \circ (T^\pm_t)^{-1}(\cdot))ds, \qquad (3.2)_\pm \\
w_\pm(t) &= w_\pm(t,\cdot) \\
&= w^0_\pm \circ (T^\pm_t)^{-1} + \int_0^t F^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm)(s, T^\pm_s \circ (T^\pm_t)^{-1}(\cdot))ds \qquad (3.3)_\pm
\end{aligned}
$$

が導かれる。ここに $F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)$ 及び $F^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm)$ は

$$
F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm) = \frac{3}{2}(1+(v_+ + v_-)^2)^{-7/4}(v_-^2 - v_-^2)w_\pm, \qquad (3.4)_\pm
$$

$$
F^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm) = \pm\frac{3}{4}(1+(v_+ + v_-)^2)^{-7/4}(v_+ + v_-)\left(2(w_+ + w_-)^2 - (w_+ - w_-)^2 \pm (w_+^2 - w_-^2)\right) \qquad (3.5)_\pm
$$

とし $(v^0_\pm, w^0_\pm)$ は $(v_\pm, w_\pm)$ の初期値とする:

$$
\left(v^0_\pm(x), w^0_\pm(x)\right) = (v_\pm(0,x), w_\pm(0,x)), \quad x \in \mathbb{R}
$$

I 上の $C^1 \cap W^1_\infty$ 値連続函数を 4 つの成分とする空間を $X^1 = X^1(I)$ とする:

$$
\begin{aligned}
X^1(I) &= C\left(I; (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right) \\
&= \{(v_\pm, w_\pm); v_\pm, w_\pm \in C\left(I; (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R})\right)\}
\end{aligned}
$$

$(v_\pm, w_\pm) \in X^1(I)$ に対し

$$
\|(v_\pm, w_\pm)\| = \left(\sum_\pm \|v_\pm; L^\infty(I; W^1_\infty)\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm; L^\infty(I; W^1_\infty)\|\right)
$$

と置き $X^1(I)$ の閉球 $X^1_R = X^1_R(I)$ を

$$
X^1_R(I) = \{(v_\pm, w_\pm) \in X^1(I); \|(v_\pm, w_\pm)\| \le R\}
$$

と定義する。I 上の $C^1 \cap W^1_\infty \cap H^1$ 値連続函数を 4 つの成分とする空間を $Y^1 = Y^1(I)$ とする:

$$
\begin{aligned}
Y^1(I) &= X^1(I) \cap C\left(I; H^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right) \\
&= C\left(I; (C^1 \cap W^1_\infty \cap H^1)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)\right)\}
\end{aligned}
$$

$(v_\pm, w_\pm) \in Y^1(I)$ に対し

$$
|||(v_\pm, w_\pm)||| = \left(\sum_\pm \|v_\pm; L^\infty(I; H^1 \cap W^1_\infty)\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm; L^\infty(I; H^1 \cap W^1_\infty)\|\right)
$$

と置き $Y^1(I)$ の閉球 $Y^1_R = Y^1_R(I)$ を

$$
Y^1_R(I) = \{(v_\pm, w_\pm) \in Y^1(I); |||(v_\pm, w_\pm)||| \le R\}
$$

と定義する。一階ずつ滑らかさを上げた空間を夫々$X^2 = X^2(I)$ 及び $Y^2 = Y^2(I)$ とし、その閉球を夫々$X_R^2 = X_R^2(I)$ 及び $Y_R^2 = Y_R^2(I)$ とする:

$$X^2(I) = C\left(I; (C^2 \cap W_\infty^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)\right),$$
$$X_R^2(I) = \{(v_\pm, w_\pm) \in X^2(I); \|(v_\pm, w_\pm)\| \vee \|(\partial v_\pm, \partial w_\pm)\| \le R\},$$

$$Y^2(I) = C\left(I; (C^2 \cap W_\infty^2 \cap H^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)\right),$$
$$Y_R^2(I) = \{(v_\pm, w_\pm) \in Y^2(I); |||(v_\pm, w_\pm)||| \vee |||(\partial v_\pm, \partial w_\pm)||| \le R\}$$

$X_R^1, X_R^2, Y_R^1, Y_R^1$ は

$$d\left((v_\pm, w_\pm), (\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)\right) = \left(\sum_\pm \|v_\pm - \tilde{v}_\pm; L^\infty(I; L^\infty)\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm - \tilde{w}_\pm; L^\infty(I; L^\infty)\|\right)$$

に依って定まる距離 d で完備距離空間となる。

積分方程式系 $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の時間局所解の存在と一意性、初期値に関する解の連続依存性、解の正則性 (滑らかさ)、時間極大解の存在と一意性に就いて、定理の形で纏めて置こう。

定理１ (時間局所 $\boldsymbol{W_\infty^1}$ 解の存在と一意性)

任意の $\rho > 0$ に対し $T = T(\rho) > 0$ が存在し

$$\left(\sum_\pm \|v_\pm^0; W_\infty^1\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm^0; W_\infty^1\|\right) \le \rho$$

なる任意の $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in (C^1 \cap W_\infty^1)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ に対し $(3.2)_\pm$ 及び $(3.3)_\pm$ から成る積分方程式系は $I = [-T, T]$ 上

$$(v_\pm, w_\pm) \in X^1(I)$$

なる解を唯一つ持つ。更に $(v_\pm, w_\pm) \in C^1(I; C \cap L^\infty)$ であり $(v_\pm, w_\pm)$ は一階双曲系 (DHS) を $I \times \mathbb{R}$ 上満たす。

定理２ (初期値に対する解の $\boldsymbol{L^\infty}$ 連続依存性)

$I \subset \mathbb{R}$ を初期時刻 0 を含む有界閉区間とし $(v_\pm, w_\pm) \in X^1(I)$ を
$(v_\pm(0), w_\pm(0)) = (v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^1 \cap W_\infty^1$ なる $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の解であるとし
$\left((v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0); n \ge 1\right) \subset C^1 \cap W_\infty^1$ を W_∞^1 に於いて有界で L^∞ に於いて $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ に収束する列とする。このとき任意の n に対し $(v_{\pm n}(0), w_{\pm n}(0)) = (v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0)$ なる対応する解 $(v_{\pm n}, w_{\pm n}) \in X^1(I)$ の列が存在し $C(I; L^\infty)$ に於いて $(v_\pm, w_\pm)$ に収束する。

定理３ (解の正則性 (滑らかさ))

$I \subset \mathbb{R}$ を初期時刻 0 を含む有界閉区間とし $(v_\pm, w_\pm) \in X^1(I)$ を
$(v_\pm(0), w_\pm(0)) = (v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^1 \cap W_\infty^1$ なる $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の解とする。このとき

(1) $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^2 \cap W^2_\infty$ ならば $(v_\pm, w_\pm) \in X^2(I)$ となる。

(2) $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in H^1$ ならば $(v_\pm, w_\pm) \in Y^1(I)$ となる。

(3) $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^2 \cap W^2_\infty \cap H^2$ ならば $(v_\pm, w_\pm) \in Y^2(I)$ となる。

定理４ (初期値に対する解の $\boldsymbol{W^1_\infty, L^\infty \cap L^2, W^1_\infty \cap H^1}$ 連続依存性)

$I \subset \mathbb{R}$ を初期時刻 0 を含む有界閉区間とする。

(1) $(v_\pm, w_\pm) \in X^2(I)$ を $(v_\pm(0), w_\pm(0)) = (v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^2 \cap W^2_\infty$ なる (3.2)$_\pm$-(3.3)$_\pm$ の解であるとし $\big((v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0); n \geq 1\big) \subset C^2 \cap W^2_\infty$ を W^2_∞ に於いて有界で W^1_∞ に於いて $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ に収束する列とする。このとき任意の n に対し $(v_{\pm n}(0), w_{\pm n}(0)) = (v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0)$ なる対応する解 $(v_{\pm n}, w_{\pm n}) \in X^2(I)$ の列が存在し $C(I; W^1_\infty)$ に於いて $(v_\pm, w_\pm)$ に収束する。

(2) $(v_\pm, w_\pm) \in Y^1(I)$ を $(v_\pm(0), w_\pm(0)) = (v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^1 \cap W^1_\infty \cap H^1$ なる (3.2)$_\pm$-(3.3)$_\pm$ の解であるとし $\big((v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0); n \geq 1\big) \subset C^1 \cap W^1_\infty \cap H^1$ を $W^1_\infty \cap H^1$ に於いて有界で $L^\infty \cap L^2$ に於いて $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ に収束する列とする。このとき任意の n に対し $(v_{\pm n}(0), w_{\pm n}(0)) = (v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0)$ なる対応する解 $(v_{\pm n}, w_{\pm n}) \in Y^1(I)$ の列が存在し $C(I; L^\infty \cap L^2)$ に於いて $(v_\pm, w_\pm)$ に収束する。

(3) $(v_\pm, w_\pm) \in Y^2(I)$ を $(v_\pm(0), w_\pm(0)) = (v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^2 \cap W^2_\infty \cap H^2$ なる (3.2)$_\pm$-(3.3)$_\pm$ の解であるとし $\big((v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0); n \geq 1\big) \subset C^2 \cap W^2_\infty \cap H^2$ を $W^2_\infty \cap H^2$ に於いて有界で $W^1_\infty \cap H^1$ に於いて $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ に収束する列とする。このとき任意の n に対し $(v_{\pm n}(0), w_{\pm n}(0)) = (v_{\pm n}^0, w_{\pm n}^0)$ なる対応する解 $(v_{\pm n}, w_{\pm n}) \in Y^2(I)$ の列が存在し $C(I; W^1_\infty \cap H^1)$ に於いて $(v_\pm, w_\pm)$ に収束する。

定理５ (時間極大 $\boldsymbol{W^1_\infty}$ 解の存在と一意性)

任意の $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ に対し、(3.2)$_\pm$-(3.3)$_\pm$ は初期時刻 0 を含む開区間 (T_-^*, T_+^*) 上

$$(v_\pm, w_\pm) \in C\left((T_-^*, T_+^*); (C^1 \cap W^1_\infty)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)\right)$$

なる極大解を唯一つ持つ。また $(v_\pm, w_\pm) \in C^1\left((T_-^*, T_+^*); C \cap L^\infty\right)$ であり $(v_\pm, w_\pm)$ は一階双曲系 (DHS) を $(T_-^*, T_+^*) \times \mathbb{R}$ 上満たす。更に

- $T_+^* < +\infty$ ならば $\displaystyle \lim_{t \uparrow T_+^*} \left(\sum_\pm \|v_\pm(t); W^1_\infty\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(t); W^1_\infty\|\right) = +\infty$

- $T_-^* > -\infty$ ならば $\displaystyle \lim_{t \downarrow T_-^*} \left(\sum_\pm \|v_\pm(t); W^1_\infty\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(t); W^1_\infty\|\right) = +\infty$

次節以降、定理 1 - 5 の証明を与える。

４．微分非損失型一階双曲系の基礎定理の証明 (その１：補助定理)

簡単の為 $I=[0,T]$ とし $t\geq 0$ の場合のみ考える。次の補題はしばしば用いる。

補題１　有界閉区間 $I=[0,T]\subset\mathbb{R}$ 上の $(C^1\cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 値連続函数

$$v_\pm,\tilde{v}_\pm\in\big(I;(C^1\cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R})\big)$$

に対し [縦] 定理１，２で定まる一径数変換族を夫々

$$(T_t^\pm;t\in I),\ (\widetilde{T}_t^\pm;t\in I)$$

とする。このとき次の評価が成立つ。

(1) 任意の $t\in I,x,y\in\mathbb{R}$ に対し

$$\|\partial T_t^\pm\|_\infty\leq\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt'\right), \tag{4.1$_\pm$}$$

$$\|\partial\widetilde{T}_t^\pm\|_\infty\leq\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\right), \tag{4.2$_\pm$}$$

$$\begin{aligned}|T_t^\pm(x)-\widetilde{T}_t^\pm(y)|&\leq\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt'\right)|x-y|\\&\quad+\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_{t'}^t\|\partial v_\pm(t'')\|_\infty dt''\right)\|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\end{aligned} \tag{4.3$_\pm$}$$

(2) $M=M(T),\widetilde{M}=\widetilde{M}(T),N=N(T),\widetilde{N}=\widetilde{N}(T)$ を

$$\begin{aligned}M=M(T)&=\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^T\|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt,\\\widetilde{M}=\widetilde{M}(T)&=\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^T\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt,\\N=N(T)&=Me^M=M(T)\exp(M(T)),\\\widetilde{N}=\widetilde{N}(T)&=\widetilde{M}e^{\widetilde{M}}=\widetilde{M}(T)\exp(\widetilde{M}(T))\end{aligned}$$

と置く。$T_0>0$ が存在し $N(T_0)\vee\widetilde{N}(T_0)<\dfrac{1}{2}$ となる。このとき任意の $T\leq T_0$ 及び任意の $t\in[0,T]$ に対し $T_t^\pm$ 及び $\widetilde{T}_t^\pm$ の逆 $(T_t^\pm)^{-1}$ 及び $(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}$ が存在し次の評価が任意の $t,s\in[0,T]$ に対して成立つ。

$$\|\partial(T_t^\pm)^{-1}-1\|_\infty \le \frac{N(T)}{1-N(T)}, \tag{4.4$_\pm$}$$

$$\|\partial(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}-1\|_\infty \le \frac{\widetilde{N}(T)}{1-\widetilde{N}(T)}, \tag{4.5$_\pm$}$$

$$\|(T_t^\pm)^{-1}-(T_s^\pm)^{-1}\|_\infty \le \frac{|t-s|}{1-N(T)}, \tag{4.6$_\pm$}$$

$$\|(T_t^\pm)^{-1}-(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\|_\infty \le \frac{3}{2}\,\frac{1+N(T)}{1-N(T)}\sum_\pm\int_0^t \|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt', \tag{4.7$_\pm$}$$

$$\begin{aligned}&\|T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}-\widetilde{T}_s^\pm\circ(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\|_\infty\\ &\le 3\exp(M(T))\frac{1}{1-N(T)}\sum_\pm\int_0^{t\vee s}\|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt',\end{aligned} \tag{4.8$_\pm$}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\theta\in[0,1]}\left\|\partial\left(\widetilde{T}_s^\pm\circ(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}+\theta(T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}-\widetilde{T}_s^\pm\circ(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1})\right)^{-1}\right\|_\infty\\ &\le\frac{1}{1-2(N(T)\vee\widetilde{N}(T))}\end{aligned} \tag{4.9$_\pm$}$$

補題２　有界閉区間 $I=[0,T]$ 上の $(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 値連続函数

$$v_\pm,\tilde{v}_\pm\in C\left(I;(C^2\cap W^2_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R})\right)$$

に対し補題 1 と同様の設定の下で次の評価が成立つ。

(1) 任意の $t\in I$ に対し

$$\begin{aligned}&\|\partial^2 T_t^\pm\|_\infty\\ &\le 8\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt'\right)\sum_\pm\int_0^t\left(\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty+\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2\right)dt',\end{aligned} \tag{4.10$_\pm$}$$

$$\begin{aligned}&\|\partial^2 \widetilde{T}_t^\pm\|_\infty\\ &\le 8\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial \tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\right)\sum_\pm\int_0^t\left(\|\partial^2 \tilde{v}_\pm(t')\|_\infty+\|\partial \tilde{v}_\pm(t')\|_\infty^2\right)dt',\end{aligned} \tag{4.11$_\pm$}$$

$$\begin{aligned}&|\partial T_t^\pm(x)-\partial\widetilde{T}_t^\pm(y)|\\ &\le 12\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t(\|\partial v_\pm(t')\|_\infty+\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty)dt'\right)\\ &\cdot\sum_\pm\int_0^t\left(\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty+\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2\right)dt'\cdot\sum_\pm\int_0^t\|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\end{aligned} \tag{4.12$_\pm$}$$

(2) 任意の $T\le T_0$ 及び任意の $t\in[0,T]$ に対し

$$\|\partial^2(T_t^\pm)^{-1}\|_\infty\le 4\frac{e^{M(T)}}{(1-N(T))^3}\sum_\pm\int_0^T\left(\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty+\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2\right)dt', \tag{4.13$_\pm$}$$

$$
\begin{aligned}
&\|\partial(T_t^{\pm})^{-1}-\partial(\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}\|_\infty\\
&\le 24\frac{e^{M+\widetilde{M}}}{(1-N)^3}\sum_{\pm}\int_0^t(\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty+\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2)dt'\cdot\sum_{\pm}\int_0^t\|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\\
&+18\frac{e^{M+\widetilde{M}}}{(1-N)^2}\sum_{\pm}\left(\|\partial\tilde{v}_\pm\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|\partial v_\pm\|_{L^\infty(L^\infty)}\right)\\
&\qquad\qquad\cdot\sum_{\pm}\int_0^t(\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty+\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2)dt'\cdot\sum_{\pm}\int_0^t\|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\\
&+\frac{3}{2}\ \frac{e^{\widetilde{M}}}{(1-N)^2}\sum_{\pm}\int_0^t\|\partial v_\pm(t')-\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt' \qquad (4.14)_\pm
\end{aligned}
$$

(補題 1 の証明)　 $(3.1)_\pm$ に見た様に

$$\alpha=\alpha_\pm=\mp(1+v^2)^{-3/4}=\mp(1+(v_++v_-)^2)^{-3/4}$$

とおけば任意の $(t,x)\in I\times\mathbb{R}$ に対し

$$T_t^{\pm}(x)=x+\int_0^t\alpha_\pm(t',T_{t'}^{\pm}(x))dt' \qquad (4.15)_\pm$$

が成立つので両辺を微分すると等式

$$\partial T_t^{\pm}(x)=1+\int_0^t\partial\alpha_\pm(t',T_{t'}^{\pm}(x))\partial T_{t'}^{\pm}(x)dt' \qquad (4.16)_\pm$$

が得られる。これより不等式

$$|\partial T_t^{\pm}(x)-1|\le\int_0^t\|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty|\partial T_{t'}^{\pm}(x)-1|dt'+\int_0^t\|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty dt' \qquad (4.17)_\pm$$

が従う。$(4.17)_\pm$ にグロンウォールの補題を適用して得られる不等式

$$|\partial T_t^{\pm}(x)-1|\le\exp\left(\int_0^t\|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty dt'\right)-1$$

より

$$\|\partial T_t^{\pm}-1\|_\infty\le\exp\left(\int_0^t\|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty\right)-1 \qquad (4.18)_\pm$$

を得る。ここで

$$
\begin{aligned}
&\partial\alpha_\pm=\pm\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v,\\
&\|\partial\alpha_\pm(t)\|_\infty\le\frac{3}{2}\|\partial v(t)\|_\infty\le\frac{3}{2}(\|\partial v_+(t)\|_\infty+\|\partial v_-(t)\|_\infty)=\frac{3}{2}\sum_{\pm}\|\partial v_\pm(t)\|_\infty
\end{aligned}
$$

を用いれば $(4.18)_\pm$ より $(4.1)_\pm$ が従う。$(4.2)_\pm$ の証明も

$$\widetilde{T}_t^\pm(x) = x + \int_0^t \tilde{\alpha}_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(x))dt',$$
$$\tilde{\alpha}_\pm = \mp(1+\tilde{v}^2)^{-3/4} = \mp(1+(\tilde{v}_+ + \tilde{v}_-)^2)^{-3/4} \tag{$4.19)_\pm$}$$

に基づけば全く同様である。$(4.15)_\pm$ と $(4.19)_\pm$ より

$$\begin{aligned} T_t^\pm(x) - \widetilde{T}_t^\pm(y) = x - y &+ \int_0^t \Big(\alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm(x)) - \alpha_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(y))\Big)\, dt' \\ &+ \int_0^t \Big(\alpha_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(y)) - \tilde{\alpha}_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(y))\Big)\, dt' \end{aligned} \tag{$4.20)_\pm$}$$

を得る。$(4.20)_\pm$ の右辺に現れる被積分函数を

$$\begin{aligned} &\alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm(x)) - \alpha_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(y)) \\ &= \int_0^1 \partial\alpha_\pm(t', \theta T_{t'}^\pm(x) + (1-\theta)\widetilde{T}_{t'}^\pm(y))\ d\theta (T_{t'}^\pm(x) - \widetilde{T}_{t'}^\pm(y)), \\ \alpha_\pm - \tilde{\alpha}_\pm &= \pm\frac{2}{3}\int_0^1 (1+(\theta v + (1-\theta)\tilde{v})^2)^{-7/4}(\theta v + (1-\theta)\tilde{v})\ d\theta (v - \tilde{v}) \end{aligned}$$

と表示し評価する事に依って $(4.20)_\pm$ の左辺は

$$\begin{aligned} &|T_t^\pm(x) - \widetilde{T}_t^\pm(y)| \\ &\le |x-y| + \int_0^t \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty |T_{t'}^\pm(x) - \widetilde{T}_{t'}^\pm(y)| dt' + \frac{3}{2}\int_0^t \|v(t') - \tilde{v}(t')\|_\infty dt' \end{aligned}$$

と評価され、更にグロンウォールの補題に拠り

$$\begin{aligned} &|T_t^\pm(x) - \widetilde{T}_t^\pm(y)| \\ &\le \exp\left(\int_0^t \|\partial\alpha_\pm\|_\infty\right)|x-y| + \frac{3}{2}\int_0^t \exp\left(\int_{t'}^t \|\partial\alpha_\pm\|_\infty\right)\|v(t') - \tilde{v}(t')\|_\infty dt' \\ &\le \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^t \|\partial v_\pm\|_\infty\right)|x-y| \\ &+ \frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^t \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm \int_{t'}^t \|\partial v_\pm\|_\infty\right)\|v_\pm(t') - \tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt' \end{aligned}$$

と評価される。これは $(4.3)_\pm$ に外ならない。

$t, s \in I$ に対し

$$\beta_t^\pm(s) = \int_0^s \partial\alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))\partial T_{t'}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)dt' \tag{$4.21)_\pm$}$$

と置く。$(4.15)_\pm$ より導かれる等式

$$x = (T_t^\pm)^{-1}(x) + \int_0^t \alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(x))dt' \tag{$4.22)_\pm$}$$

を微分し

$$1 = \partial(T_t^{\pm})^{-1}(x) + (\beta_t^{\pm}(t))(x)\partial(T_t^{\pm})^{-1}(x) \tag{4.23$_\pm$}$$

を得る。$\beta_t^{\pm}(s)$ は

$$\begin{aligned}
\|\beta_t^{\pm}(s)\|_\infty &\leq \int_0^T \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty \|\partial T_{t'}^{\pm}\|_\infty dt' \\
&\leq \frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^T \|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt' \cdot \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^T \|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt'\right) = N(T)
\end{aligned} \tag{4.24$_\pm$}$$

と評価されるので $N(T) < 1$ なる T 及び任意の $t \in [0,T]$ に対し $(4.23)_\pm$ より

$$\partial(T_t^{\pm})^{-1} = \frac{1}{1+\beta_t^{\pm}(t)} \tag{4.25$_\pm$}$$

なる表示が意味を持つ。これより $(4.24)_\pm$ に依って

$$\partial(T_t^{\pm})^{-1} - 1 = \frac{\beta_t^{\pm}(t)}{1+\beta_t^{\pm}(t)} \tag{4.26$_\pm$}$$

を評価すれば $(4.4)_\pm$ が従う。$(4.5)_\pm$ の証明も全く同様である。次に $(4.7)_\pm$ を示そう。$(4.22)_\pm$ と

$$x = (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x) + \int_0^t \tilde{\alpha}_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x))dt'$$

の夫々の両辺の差を取り、次の等式

$$\begin{aligned}
&(T_t^{\pm})^{-1}(x) - (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x) \\
&= -\int_0^t (\alpha_\pm(t', T_{t'}^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}(x)) - \alpha_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x)))dt' \\
&\quad - \int_0^t (\alpha_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x)) - \tilde{\alpha}_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x)))dt' \\
&= -\int_0^t \int_0^1 \partial\alpha_\pm(t', \theta T_{t'}^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}(x) + (1-\theta)\widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_{t'}^{\pm})^{-1}(x))d\theta \\
&\qquad\qquad \cdot (T_{t'}^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}(x) - \widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x))dt' \\
&\quad \mp \frac{3}{2}\int_0^t \int_0^1 [(1+(\theta v + (1-\theta)\tilde{v})^2)^{-7/4}(\theta v + (1-\theta)\tilde{v})(v-\tilde{v})](t', \widetilde{T}_{t'}^{\pm} \circ (\widetilde{T}_t^{\pm})^{-1}(x))d\theta dt'
\end{aligned}$$

を得る。最後の右辺の第一項を $(4.3)_\pm$ を用いて評価し

$$
\begin{aligned}
&|(T_t^\pm)^{-1}(x)-(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(x)| \\
&\le \int_0^t \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty |T_{t'}^\pm\left((T_t^\pm)^{-1}(x)\right)-\widetilde{T}_{t'}^\pm\left((\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(x)\right)|dt' \\
&\qquad +\frac{3}{2}\int_0^t \|v(t')-\tilde{v}(t')\|_\infty dt' \\
&\le \left(\frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^t \|\partial v_\pm\|_\infty\right)\exp(M(T))|(T_t^\pm)^{-1}(x)-(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(x)| \\
&\qquad +\frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^t \|\partial v_\pm(t')\|_\infty\cdot\exp(M(T))\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^{t'}\|v_\pm-\tilde{v}_\pm\|_\infty\right)dt' \\
&\qquad +\frac{3}{2}\sum_\pm \int_0^t \|v_\pm-\tilde{v}_\pm\|_\infty \\
&\le N(T)|(T_t^\pm)^{-1}(x)-(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(x)|+\frac{3}{2}(N(T)+1)\sum_\pm\int_0^t\|v_\pm-\tilde{v}_\pm\|_\infty
\end{aligned}
$$

を得る。これより直ちに $(4.7)_\pm$ が従い、$(4.3)_\pm$ と $(4.7)_\pm$ より $(4.8)_\pm$ が従う。
同様に $t>s$ なる $t,s\in[0,T]$ に対し等式

$$
\begin{aligned}
&(T_t^\pm)^{-1}(x)-(T_s^\pm)^{-1}(x) \\
=&-\int_0^t \left(\alpha_\pm(t',T_{t'}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(x))-\alpha_\pm(t',T_{t'}^\pm\circ(T_s^\pm)^{-1}(x))\right)dt' \\
&-\int_s^t \alpha_\pm(t',T_{t'}^\pm\circ(T_s^\pm)^{-1}(x))dt' \\
=&-\int_0^t\int_0^1 \partial\alpha_\pm\left(t',T_{t'}^\pm(\theta(T_t^\pm)^{-1}(x)+(1-\theta)(T_s^\pm)^{-1}(x))\right) \\
&\qquad\qquad \cdot\partial T_{t'}^\pm\left(\theta(T_t^\pm)^{-1}(x)+(1-\theta)(T_s^\pm)^{-1}(x))\right)d\theta dt'\left((T_t^\pm)^{-1}(x)-(T_s^\pm)^{-1}(x)\right) \\
&-\int_s^t \alpha_\pm(t',T_{t'}^\pm\circ(T_s^\pm)^{-1}(x))dt'
\end{aligned}
$$

を評価し

$$
\begin{aligned}
&\|(T_t^\pm)^{-1}-(T_s^\pm)^{-1}\|_\infty \\
&\le \int_0^t \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty\left\|\partial T_{t'}^\pm\right\|_\infty dt'\left\|(T_t^\pm)^{-1}-(T_s^\pm)^{-1}\right\|_\infty+\int_s^t\|\alpha_\pm(t')\|_\infty dt' \\
&\le \frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial v_\pm(t')\|_\infty\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^{t'}\|\partial v_\pm(t'')\|_\infty dt''\right)dt'\|(T_t^\pm)^{-1}-(T_s^\pm)^{-1}\|_\infty \\
&\quad +(t-s) \\
&\le N\left\|(T_t^\pm)^{-1}-(T_s^\pm)^{-1}\right\|_\infty+|t-s|
\end{aligned}
$$

を得るので $(4.6)_\pm$ が従う。

最後に $(4.9)_\pm$ を示そう。$(4.15)_\pm$ より得られる等式

$$T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1} = (T_t^\pm)^{-1} + \int_0^s \alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))dt' \tag{4.27$_\pm$}$$

を微分し $(4.23)_\pm$ を用いると

$$\begin{aligned}\partial(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}) &= \partial(T_t^\pm)^{-1} + \beta_t^\pm(s)\partial(T_t^\pm)^{-1} \\ &= \frac{1+\beta_t^\pm(s)}{1+\beta_t^\pm(t)} = 1 - \frac{\beta_t^\pm(t)-\beta_t^\pm(s)}{1+\beta_t^\pm(t)}\end{aligned} \tag{4.28$_\pm$}$$

が導かれる。ここで $(4.24)_\pm$ 及び

$$\|\beta_t^\pm(t) - \beta_t^\pm(s)\|_\infty = \left\| \int_s^t \partial\alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm(\cdot))\partial T_{t'}^\pm(\cdot)dt' \right\|_\infty \le N(T)$$

を用いると

$$\|\partial(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}) - 1\|_\infty \le \frac{N(T)}{1-N(T)} \tag{4.29$_\pm$}$$

が従い、同様に

$$\|\partial(\widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}) - 1\|_\infty \le \frac{\widetilde{N}(T)}{1-\widetilde{N}(T)} \tag{4.30$_\pm$}$$

が従う。これより任意の $\theta \in [0,1]$ に対し

$$\begin{aligned}&\|\partial\left(\widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1} + \theta\left(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1} - \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\right)\right) - 1\|_\infty \\ &= \|(1-\theta)\left(\partial(\widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}) - 1\right) + \theta\left(\partial(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}) - 1\right)\|_\infty \\ &\le (1-\theta)\frac{\widetilde{N}(T)}{1-\widetilde{N}(T)} + \theta\frac{N(T)}{1-N(T)} \le \frac{N \vee \widetilde{N}}{1-N \vee \widetilde{N}}\end{aligned} \tag{4.31$_\pm$}$$

なる評価を得る。逆函数の定理に基づく等式

$$\begin{aligned}&(\partial(\widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}) + \theta(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1} - \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}))^{-1})(x) \\ &= \frac{1}{\partial(\widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}) + \theta(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1} - \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}))(y)},\end{aligned}$$

$$y = \widetilde{T}_s^\pm((\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(x)) + \theta(T_s^\pm((T_t^\pm)^{-1}(x)) - \widetilde{T}_s^\pm((\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(x)))$$

の分母を $(4.31)_\pm$ を用いて下から評価すれば $(4.9)_\pm$ が得られる:

$$\begin{aligned}&\|\partial\left(\widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1} - \theta\left(T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1} - \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\right)\right)\|_\infty \\ &\ge 1 - \frac{N \vee \widetilde{N}}{1-N \vee \widetilde{N}} \ge \frac{1}{1-2(N \vee \widetilde{N})}\end{aligned}$$

(補題 2 の証明)　$(4.16)_\pm$ を微分して

$$\partial^2 T_t^\pm(x) = \int_0^t (\partial\alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm(x))\partial^2 T_{t'}^\pm(x) + \partial^2\alpha_\pm(t', T_{t'}^\pm(x))(\partial T_{t'}^\pm(x))^2)dt' \tag{4.32$_\pm$}$$

を得る。ここに $\partial^2\alpha_\pm$ は具体的に

$$\partial^2\alpha_\pm = \pm\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial^2 v \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/4}(5v^2-2)(\partial v)^2$$

で与えられる。$(4.32)_\pm$ を $(4.1)_\pm$ を用いて評価し、不等式

$$\begin{aligned}
|\partial^2 T_t^\pm(x)| \le &\int_0^t \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty |\partial^2 T_{t'}^\pm(x)|dt' \\
&+ \int_0^t \left(\frac{3}{2}\|\partial^2 v(t')\|_\infty + \frac{15}{4}\|\partial v(t')\|_\infty^2\right)\|\partial T_{t'}^\pm\|_\infty dt' \\
\le &\int_0^t \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty |\partial^2 T_{t'}^\pm(x)|dt' \\
&+ \frac{3}{4}\int_0^t \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^{t'}\|\partial v_\pm\|_\infty\right)\left(2\|\partial^2 v(t')\|_\infty + 5\|\partial v(t')\|_\infty^2\right)dt' \qquad (4.33)_\pm
\end{aligned}$$

を得る。$(4.33)_\pm$ にグロンウォールの補題を適用し

$$\begin{aligned}
&|\partial^2 T_t^\pm(x)| \\
&\le \frac{3}{4}\int_0^t \exp\left(\int_{t'}^t \|\partial\alpha_\pm\|_\infty\right)\cdot\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^{t'}\|\partial\alpha_\pm\|_\infty\right)\left(2\|\partial^2 v(t')\|_\infty + 5\|\partial v(t')\|_\infty^2\right)dt' \\
&\le \frac{3}{4}\int_0^t \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t \|\partial v_\pm\|_\infty\right)\left(2\|\partial^2 v(t')\|_\infty + 5\|\partial v(t')\|_\infty^2\right)dt' \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^t \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t \|\partial v_\pm\|_\infty\right)\left(\sum_\pm\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty + 5\sum_\pm\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2\right)dt'
\end{aligned}$$

を得る。これより $(4.10)_\pm$ 及び同様に $(4.11)_\pm$ を得る。

$(4.19)_\pm$ を微分し $(4.16)_\pm$ との差を取ると

$$\begin{aligned}
&\partial\widetilde{T}_t^\pm(x) - \partial T_t^\pm(y) \\
&= \int_0^t \partial\tilde{\alpha}_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(x))(\partial\widetilde{T}_{t'}^\pm(x) - \partial T_{t'}^\pm(y))dt' \\
&\quad + \int_0^t \left(\partial\alpha_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(y)) - \partial\alpha_\pm\left(t', T_{t'}^\pm(y)\right)\right)\partial T_{t'}^\pm(y)dt' \\
&= \int_0^t \partial\tilde{\alpha}_\pm(t', \widetilde{T}_{t'}^\pm(x))(\partial\widetilde{T}_{t'}^\pm(x) - \partial T_{t'}^\pm(y))dt' \\
&\quad + \int_0^t\int_0^1 \partial^2\alpha_\pm(t', \theta\widetilde{T}_{t'}^\pm(y) + (1-\theta)T_{t'}^\pm(y))d\theta(\widetilde{T}_{t'}^\pm(y) - T_{t'}^\pm(y))\partial T_{t'}^\pm(y)dt'
\end{aligned}$$

を上と同様に評価し

$$\begin{aligned}
&|\partial\widetilde{T}_t^\pm(x) - \partial T_t^\pm(y)| \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^t \left(\sum_\pm\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty\right)|\partial\widetilde{T}_{t'}^\pm(x) - \partial T_{t'}^\pm(y)|dt' \\
&\quad + \frac{3}{2}\int_0^t \left(\sum_\pm\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty + 5\sum_\pm\|\partial v_\pm(t)\|_\infty^2\right)\|\widetilde{T}_{t'}^\pm - T_{t'}^\pm\|_\infty\|\partial T_{t'}^\pm\|_\infty dt'
\end{aligned}$$

を得るので、更にグロンウォールの補題及び $(4.2)_\pm$-$(4.3)_\pm$ より

$$
\begin{aligned}
&|\partial\widetilde{T}^\pm_t(x) - \partial T^\pm_t(y)| \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^t \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_{t'}^t \|\partial\tilde{v}_\pm(t'')\|_\infty dt''\right)\left(\sum_\pm \|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty + 5\sum_\pm \|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2\right) \\
&\qquad\quad \cdot \left\|\partial T^\pm_{t'}\right\|_\infty \left\|\widetilde{T}^\pm_{t'} - T^\pm_{t'}\right\|_\infty dt' \\
&\le \frac{9}{4}\sum_\pm\int_0^t \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_{t'}^t \|\partial\tilde{v}_\pm\|_\infty\right)\left(\sum_\pm \|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty + 5\sum_\pm \|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2\right) \\
&\qquad\quad \cdot \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^{t'} \|\partial v_\pm\|_\infty\right)\int_0^{t'} \exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_{t''}^{t'} \|\partial v_\pm\|_\infty\right)\|\tilde{v}_\pm(t'') - v_\pm(t'')\|_\infty dt'' dt' \\
&\le 12\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t (\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty + \|\partial v_\pm(t')\|_\infty)dt'\right) \\
&\qquad\quad \cdot \sum_\pm\int_0^t (\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty + \|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2)dt' \cdot \sum_\pm\int_0^t \|\tilde{v}_\pm(t') - v_\pm(t')\|_\infty dt'
\end{aligned}
$$

が従う。これは $(4.12)_\pm$ に外ならない。

さて

$$
\partial(T^\pm_t)^{-1} = \frac{1}{\partial T^\pm_t \circ \partial(T^\pm_t)^{-1}}
$$

を微分すると

$$
\begin{aligned}
\partial^2(T^\pm_t)^{-1} &= -\frac{(\partial^2 T^\pm_t \circ (T^\pm_t)^{-1})\cdot\partial(T^\pm_t)^{-1}}{(\partial T^\pm_t \circ (T^\pm_t)^{-1})^2} \\
&= -(\partial^2 T^\pm_t \circ (T^\pm_t)^{-1})\cdot(\partial(T^\pm_t)^{-1})^3
\end{aligned}
$$

を得るので $(4.13)_\pm$ は $(4.10)_\pm$ 及び $(4.4)_\pm$ より従う。

さて $(4.21)_\pm$ で与えられる $\beta^\pm_t$ を用いて $\beta_\pm(t) = \beta^\pm_t(t)$ と置くと $(4.25)_\pm$ より、等式

$$
\partial(T^\pm_t)^{-1} - \partial(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1} = \frac{\tilde{\beta}_\pm(t) - \beta_\pm(t)}{(1+\beta_\pm(t))(1+\tilde{\beta}_\pm(t))}
$$

が従い、その分子は

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\beta}_\pm(t)-\beta_\pm(t)\\
&=\int_0^t \left(\partial\tilde{\alpha}_\pm(t',\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot))-\partial\tilde{\alpha}_\pm(t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))\right)\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)dt'\\
&\quad+\int_0^t \left(\partial\tilde{\alpha}_\pm(t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))-\partial\alpha_\pm(t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))\right)\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)dt'\\
&\quad+\int_0^t \partial\alpha_\pm(t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))(\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}-\partial T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1})(\cdot)dt'\\
&=\int_0^t\int_0^1 \partial^2\alpha_\pm(t',\theta\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)+(1-\theta)T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))d\theta\\
&\qquad\qquad\cdot(\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}-T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1})(\cdot)\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)dt'\\
&\quad\pm\frac{3}{2}\int_0^t[(1+\tilde{v}^2)^{-7/4}\tilde{v}\partial\tilde{v}-(1+v^2)^{-7/4}v\partial v](t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)dt'\\
&\quad+\int_0^t \partial\alpha_\pm(t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))(\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}-\partial T^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1})(\cdot)dt'\\
&\quad=:\mathrm{I}_\pm(t)\pm\mathrm{II}_\pm(t)+\mathrm{III}_\pm(t)
\end{aligned}
$$

で与えられる。最右辺に現れる三つの積分を評価しよう。第一項を成す積分 $\mathrm{I}_\pm(t)$ は $(4.8)_\pm$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{I}_\pm(t)\|_\infty&\le\int_0^t\|\partial^2\alpha_\pm(t')\|_\infty\|\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}-T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}\|_\infty\|\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\|_\infty dt'\\
&\le\frac{9}{2}\,\frac{e^{M+\widetilde{M}}}{1-N}\sum_\pm\int_0^t(\|\partial^2v_\pm(t')\|_\infty+5\|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2)dt'\\
&\qquad\qquad\cdot\sum_\pm\int_0^t\|\tilde{v}_\pm(t')-v_\pm(t')\|_\infty dt'
\end{aligned}
$$

と評価する。第二項を成す $\mathrm{II}_\pm(t)$ は

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{II}_\pm(t)\\
&=\frac{3}{2}\int_0^t[\left((1+\tilde{v}^2)^{-7/4}\tilde{v}-(1+v^2)^{-7/4}v\right)\partial\tilde{v}+(1+v^2)^{-7/4}v(\partial\tilde{v}-\partial v)](t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))\\
&\qquad\cdot\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)dt'\\
&=\frac{3}{2}\int_0^t\Bigg[\int_0^1(1+(\theta\tilde{v}+(1-\theta)v)^2)^{-11/4}\left((1+(\theta\tilde{v}+(1-\theta)v)^2)-\frac{7}{2}(\theta\tilde{v}+(1-\theta)v)\right)d\theta(\tilde{v}-v)\partial\tilde{v}\\
&\qquad+(1+v^2)^{-7/4}v(\partial\tilde{v}-\partial v)\Bigg](t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot)dt'
\end{aligned}
$$

と表示し

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{I\!I}_\pm(t)\|_\infty \\
&\le \frac{3}{2}\int_0^t \left(\left(1+\frac{7}{4}\right)\|\tilde{v}(t')-v(t')\|_\infty\|\partial\tilde{v}(t')\|_\infty + \|\partial\tilde{v}(t')-\partial v(t')\|_\infty\right)\|\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\|_\infty dt' \\
&\le \frac{33}{8}\sum_\pm \|\partial\tilde{v}_\pm\|_{L^\infty(L^\infty)}\cdot\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\right)\sum_\pm\int_0^t\|\tilde{v}_\pm(t')-v_\pm(t')\|_\infty dt' \\
&\quad + \frac{3}{2}\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t\|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'\right)\sum_\pm\int_0^t\|\partial\tilde{v}_\pm(t')-\partial v_\pm(t')\|_\infty dt'
\end{aligned}
$$

と評価する。第三項を成す $\mathrm{I\!I\!I}_\pm(t)$ は $(4.12)_\pm$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&\|\mathrm{I\!I\!I}_\pm(t)\|_\infty \\
&\le \int_0^t \|\partial\alpha_\pm(t')\|_\infty\|\partial\widetilde{T}^\pm_{t'}\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1} - \partial T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}\|_\infty dt' \\
&\le 18\exp\left(\frac{3}{2}\sum_\pm\int_0^t(\|\partial v_\pm(t')\|_\infty + \|\partial\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty)dt'\right) \\
&\quad \cdot\int_0^t\left(\sum_\pm(\|\partial^2 v_\pm(t')\|_\infty + \|\partial v_\pm(t')\|_\infty^2)\right)\left(\sum_\pm\|\partial v_\pm(t')\|_\infty\right)dt' \\
&\quad \cdot\sum_\pm\int_0^t\|v_\pm(t')-\tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt'
\end{aligned}
$$

と評価する。以上より (4.14) を得る。

5．微分非損失型一階双曲系の基礎定理の証明 (その 2：定理 1 の証明)

任意に $\rho > 0$ を与え

$$
\left(\sum_\pm \|v^0_\pm; W^1_\infty\|\right)\vee\left(\sum_\pm\|w^0_\pm; W^1_\infty\|\right)\le\rho
$$

なる任意の $(v^0_\pm, w^0_\pm)\in(C^1\cap W^1_\infty)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)$ を取る。$\dfrac{3}{2}TR\exp\left(\dfrac{3}{2}TR\right) < \dfrac{1}{2}$ なる $R, T > 0$ に対し $(v_\pm, w_\pm)\in X^1_R(I)$ を取り $\Phi(v_\pm, w_\pm) = (\Phi^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm), \Phi^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm))$ を $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の右辺で定義する。即ち

$$
\begin{aligned}
(\Phi^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm))(t) &= (\Phi^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm))(t,\cdot) \\
&= v^0_\pm\circ(T^\pm_t)^{-1} + \int_0^t F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)(s, T^\pm_s\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))ds, \qquad (5.1)_\pm \\
(\Phi^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm))(t) &= (\Phi^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm))(t,\cdot) \\
&= w^0_\pm\circ(T^\pm_t)^{-1} + \int_0^t F^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm)(s, T^\pm_s\circ(T^\pm_t)^{-1}(\cdot))ds \qquad (5.2)_\pm
\end{aligned}
$$

とし $F_\pm^{(1)}, F_\pm^{(2)}$ は夫々(3.4)$_\pm$,(3.5)$_\pm$ で与えられるものとする。以下では特に断らない限り ρ, R, T に依存しない正の定数を同じ記号 C で表すものとする。

$\Phi(v_\pm, w_\pm)$ の一様評価を考える。$F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm), F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)$ は夫々

$$|F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)| \le \frac{3}{2}|v_+ - v_-||w_\pm| \le \frac{3}{2}\left(\sum_\pm |v_\pm|\right)|w_\pm|, \tag{5.3$_\pm$}$$

$$|F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)| \le \frac{3}{2}\left(|w_\pm|^2 + 3|w_+||w_-|\right) \le \frac{15}{4}\sum_\pm |w_\pm|^2 \tag{5.4$_\pm$}$$

と評価されるので

$$\begin{aligned}
&\|(\Phi_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm))(t)\|_\infty \\
\le\ & \|v_\pm^0\|_\infty + \int_0^t \|F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)(s)\|_\infty ds \\
\le\ & \|v_\pm^0\|_\infty + \frac{3}{2}T\left(\sum_\pm \|v_\pm; L^\infty(L^\infty)\|_\infty\right)\|w_\mp; L^\infty(L^\infty)\|,
\end{aligned} \tag{5.5$_\pm$}$$

$$\begin{aligned}
&\|(\Phi_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm))(t)\|_\infty \\
\le\ & \|w_\pm^0\|_\infty + \int_0^t \|F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)(s)\|_\infty ds \\
\le\ & \|w_\pm^0\|_\infty + \frac{15}{4}T\sum_\pm \|w_\pm; L^\infty(L^\infty)\|^2
\end{aligned} \tag{5.6$_\pm$}$$

を得る。次に $\Phi(v_\pm, w_\pm)$ の空間変数に関する導函数 $\partial\Phi(v_\pm, w_\pm)$ を成分毎に求めよう。
第一成分は

$$\begin{aligned}
&\partial(\Phi_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm))(t) \\
=\ & \partial v_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} \cdot \partial(T_t^\pm)^{-1} \\
&+ \int_0^t \partial(F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm))\left(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right)\partial T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)ds\ \partial(T_t^\pm)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial(F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)) \\
=& -\frac{21}{4}(1+v^2)^{-11/4}\ v^2\partial v(v_+ - v_-)w_\pm + 3(1+v^2)^{-7/4}\ (v_+\partial v_+ - v_-\partial v_-)w_\pm \\
&+ \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}\ (v_+^2 - v_-^2)\partial w_\pm
\end{aligned} \tag{5.7$_\pm$}$$

で与えられ、第二成分は

$$
\begin{aligned}
&\partial(\Phi_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm))(t) \\
&= \partial w_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} \cdot \partial (T_t^\pm)^{-1} \\
&\quad + \int_0^t \partial(F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)) \left(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) \partial T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot) ds \ \partial (T_t^\pm)^{-1}, \\
&\quad \partial(F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)) \\
&= \mp \frac{21}{4}(1+v^2)^{-11/4} \ v^2 \partial v (w_\pm^2 + 3w_+ w_-) \pm \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4} \ \partial v (w_\pm^2 + 3w_+ w_-) \\
&\quad \pm \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4} \ v(2w_\pm \partial w_\pm + 3w_+ \partial w_- + 3w_- \partial w_+) \\
&= \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-11/4} \ (5v^2 - 2)\partial v (w_\pm^2 + 3w_+ w_-) \\
&\quad \pm \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4} \ v(2w_\pm \partial w_\pm + 3w_+ \partial w_- + 3w_- \partial w_+)
\end{aligned}
$$

で与えられる。$\partial(F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)), \partial(F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm))$ は夫々

$$
\begin{aligned}
&|\partial(F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm))| \\
&\le \frac{21}{4}|\partial v||v_+ - v_-||w_\pm| + 3(|v_+||\partial v_+| + |v_-||\partial v_-|)|w_\mp| + \frac{3}{2}(v_+^2 + v_-^2)|\partial w_\mp| \\
&\le \frac{33}{4}\left(\sum_\pm |v_\pm|\right)\left(\sum_\pm |\partial v_\pm|\right)|w_\pm| + \frac{3}{2}\left(\sum_\pm |v_\pm|^2\right)|\partial w_\pm|, \qquad (5.8)_\pm \\
&|\partial(F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm))| \\
&\le \frac{15}{4}|\partial v|(w_\pm^2 + 3|w_+ w_-|) + \frac{3}{2}|v|(2|w_\pm \partial w_\pm| + 3|w_+ \partial w_-| + 3|w_- \partial w_+|) \\
&\le \frac{15}{2}\left(\sum_\pm |w_\pm|\right)^2 \left(\sum_\pm |\partial v_\pm|\right) + 6\left(\sum_\pm |v_\pm|\right)\left(\sum_\pm |w_\pm|\right)\left(\sum_\pm |\partial w_\pm|\right) \qquad (5.9)_\pm
\end{aligned}
$$

と評価されるので $(4.1)_\pm$,$(4.4)_\pm$ より

$$
\begin{aligned}
&\|\partial(\Phi_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm))(t)\|_\infty \\
&\le \|\partial v_\pm^0\|_\infty \|\partial (T_t^\pm)^{-1}\|_\infty + \int_0^t \|\partial(F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm))(s)\|_\infty \|\partial T_s^\pm\|_\infty ds \|\partial (T_t^\pm)^{-1}\|_\infty \\
&\le \frac{1}{1-N}\|\partial v_\pm^0\|_\infty + \frac{33}{4}T\frac{e^M}{1-N}\left(\sum_\pm \|v_\pm; L^\infty(W_\infty^1)\|^2\right)\|w_\mp; L^\infty(W_\infty^1)\|, \qquad (5.10)_\pm
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\partial(\Phi_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm))(t)\|_\infty \\
&\le \|\partial w_\pm^0\|_\infty \|\partial (T_t^\pm)^{-1}\|_\infty + \int_0^t \|\partial(F_\pm^{(2}(v_\pm, w_\pm))(s)\|_\infty \|\partial T_s^\pm\|_\infty ds \|\partial (T_t^\pm)^{-1}\|_\infty \\
&\le \frac{1}{1-N}\|\partial w_\pm^0\|_\infty + \frac{15}{2}T\frac{e^M}{1-N}\left(\sum_\pm \|w_\pm; L^\infty(W_\infty^1)\|^2\right)\left(\sum_\pm \|v_\mp; L^\infty(W_\infty^1)\|\right) \qquad (5.11)_\pm
\end{aligned}
$$

を得る。以上 $(5.5)_\pm$, $(5.6)_\pm$, $(5.10)_\pm$, $(5.11)_\pm$ より、評価

$$\|\Phi(v_\pm, w_\pm)\| \le \frac{1}{1-N}\rho + \frac{9}{2}TR^2 + \frac{33}{4}T\frac{e^M}{1-N}R^3 \tag{5.12}$$

を得る。そこで、与えられた $\rho > 0$ に対し $R, T > 0$ を

$$\begin{cases} R = 3\rho, \\ 10T(R + 10R^2) \le 1 \end{cases} \tag{5.13}$$

と取れば $M = M(T) \le 1/6,\ e^M \le 3/2,\ N = Me^M \le 1/4$ より (5.12) は、評価

$$\begin{aligned} \|\Phi(v_\pm, w_\pm)\| &\le \frac{4}{3}\cdot\frac{R}{3} + \frac{9}{2}TR^2 + \frac{33}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}TR^3 \\ &\le \frac{R}{2} + \frac{1}{2}(10TR + 100TR^2)R \le R \end{aligned} \tag{5.14}$$

を導き Φ は $X_R^1(I)$ からそれ自身への写像となる事が分かる。

さて $(v_\pm, w_\pm), (\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm) \in X_R^1(I)$ に対し $\Phi_\pm^{(1)}$ に依る差

$$\begin{aligned} &(\Phi_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm) - \Phi_\pm^{(1)}(\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm))(t,\cdot) \\ &= v_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} - v_\pm^0 \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1} + \int_0^t [F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm) - F_\pm^{(1)}(\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)](s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds \\ &\quad + \int_0^t \Big(F_\pm^{(1)}(\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)) - F_\pm^{(1)}(\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)(s, \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(\cdot))\Big)\, ds \end{aligned} \tag{5.15$_\pm$}$$

を考える。$(5.15)_\pm$ の右辺の第一項と第二項は、積分表示

$$\begin{aligned} &v_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} - v_\pm^0 \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1} \\ &= \int_0^t \partial v_\pm^0 \circ \Big(\theta(T_t^\pm)^{-1} + (1-\theta)(\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\Big)\, d\theta \cdot \Big((T_t^\pm)^{-1} - (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\Big) \end{aligned}$$

に $(3.27)_\pm$ を適用すれば

$$\begin{aligned} &\|v_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} - v_\pm^0 \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\|_\infty \\ &\le \|\partial v_\pm^0\|_\infty \|(T_t^\pm)^{-1} - (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}\|_\infty \\ &\le \frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}\|\partial v_\pm^0\|_\infty \sum_\pm \int_0^t \|v_\pm(t') - \tilde{v}_\pm(t')\|_\infty dt' \\ &\le \frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}\|\partial v_\pm^0\|_\infty T \sum_\pm \|v_\pm - \tilde{v}_\pm; L^\infty(I; L^\infty)\| \end{aligned}$$

と評価される。$(5.15)_\pm$ の右辺の第三項の被積分函数に就いては、積分表示

$$
\begin{aligned}
&F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm) - F_\pm^{(1)}(\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)\\
=&\ \frac{3}{2}\left((1+v^2)^{-7/4} - (1+\tilde v^2)^{-7/4}\right)(v_+^2 - v_-^2) w_\pm\\
&+\ \frac{3}{2}(1+\tilde v^2)^{-7/4}\left((v_+^2 - v_-^2) - (\tilde v_+^2 - \tilde v_-^2)\right) w_\pm\\
&+\ \frac{3}{2}(1+\tilde v^2)^{-7/4}(\tilde v_+^2 - \tilde v_-^2)(w_\pm - \tilde w_\pm)\\
=&\ -\frac{21}{4}\left(\int_0^1 (1+(\theta v + (1-\theta)\tilde v)^2)^{-11/4}(\theta v + (1-\theta)\tilde v) d\theta\right)(v-\tilde v) v (v_+ - v_-) w_\pm\\
&+\ \frac{3}{2}(1+\tilde v^2)^{-7/4}\left((v_+ + \tilde v_+)(v_+ - \tilde v_+) - (v_- + \tilde v_-)(v_- - \tilde v_-)\right) w_\pm\\
&+\ \frac{3}{2}(1+\tilde v^2)^{-7/4}\tilde v(\tilde v_+ - \tilde v_-)(w_\pm - \tilde w_\pm)
\end{aligned}
$$

を評価し

$$
\begin{aligned}
&\left|F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm) - F_\pm^{(1)}(\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)\right|\\
\le&\ \frac{21}{4}|v-\tilde v||v||v_+ - v_-||w_\pm|\\
&+\frac{3}{2}\left(|v_+ + \tilde v_+||v_+ - \tilde v_+| + |v_- + \tilde v_-||v_- - \tilde v_-|\right)|w_\pm|\\
&+\frac{3}{2}|\tilde v||\tilde v_+ - \tilde v_-||w_\pm - \tilde w_\pm|\\
\le&\ \frac{21}{4}\left(\sum_\pm |v_\pm|\right)^2 |w_\pm| \sum_\pm |v_\pm - \tilde v_\pm|\\
&+\frac{3}{2}\left(\sum_\pm |v_\pm| + \sum_\pm |\tilde v_\pm|\right)|w_\pm|\sum_\pm |v_\pm - \tilde v_\pm|\\
&+\frac{3}{2}\left(\sum_\pm |\tilde v|_\pm\right)^2 |w_\pm - \tilde w_\pm|\\
\le&\ \left(\frac{21}{4}R^3 + 3R^2\right) d\left((v_\pm, w_\pm), (\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)\right)\\
\le&\ 6(R^2+R^3) d\left((v_\pm, w_\pm), (\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)\right)
\end{aligned}
$$

を得る。$(5.14)_\pm$ の右辺の第四項の被積分函数は $(5.8)_\pm$ 及び $(4.8)_\pm$ より

$$
\begin{aligned}
&\left|F_\pm^{(1)}(\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)) - F_\pm^{(1)}(\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)(s, \widetilde T_s^\pm \circ (\widetilde T_t^\pm)^{-1}(\cdot))\right|\\
=&\left|\int_0^1 \partial F_\pm^{(1)}(\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)(s, \theta T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot) + (1-\theta)\widetilde T_s^\pm \circ (\widetilde T_t^\pm)^{-1}(\cdot)) d\theta (T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1} - \widetilde T_s^\pm \circ (\widetilde T_t^\pm)^{-1})\right|\\
\le&\left(\frac{99}{4}\left(\sum_\pm |\tilde v_\pm|\right)\left(\sum_\pm |\partial \tilde v_\pm|\right)|\tilde w_\pm| + \frac{9}{2}\left(\sum_\pm |\tilde v_\pm|\right)^2 |\partial \tilde w_\pm|\right)\frac{e^M}{1-N}\sum_\pm \int_0^t \|v_\pm(t') - \tilde v_\pm(t')\|_\infty dt'\\
\le&\ 25\ \frac{e^M}{1-N} T R^3 d\left((v_\pm, w_\pm), (\tilde v_\pm, \tilde w_\pm)\right)
\end{aligned}
$$

と評価される。以上より $(5.15)_\pm$ は

$$\left\|\Phi^{(1)}_\pm(v_\pm,w_\pm)-\Phi^{(1)}_\pm(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm);L^\infty(L^\infty)\right\|$$
$$\le\left(\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}T\rho+6T(R^2+R^3)+25\frac{e^M}{1-N}T^2R^3\right)d\left((v_\pm,w_\pm),(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\right)\qquad(5.16)_\pm$$

と評価される。同様に $\Phi^{(2)}_\pm$ に依る差は

$$\begin{aligned}&F^{(2)}_\pm(v_\pm,w_\pm)-F^{(2)}_\pm(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\\
&=\mp\frac{21}{4}\left(\int_0^1(1+(\theta v+(1-\theta)\tilde v)^2)^{-11/4}(\theta v+(1-\theta)\tilde v)d\theta\right)(v-\tilde v)v(w_\pm^2+4w_+w_-)\\
&\quad\pm\frac{3}{2}(1+\tilde v^2)^{-7/4}(v-\tilde v)(w_\pm^2+4w_+w_-)\\
&\quad\pm\frac{3}{2}(1+\tilde v^2)^{-7/4}\tilde v\left((w_\pm+\tilde w_\pm)(w_\pm-\tilde w_\pm)+4w_-(w_+-\tilde w_+)+4w_+(w_--\tilde w_-)\right)\end{aligned}$$

の評価

$$\begin{aligned}&\left|F^{(2)}_\pm(v_\pm,w_\pm)-F^{(2)}_\pm(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\right|\\
&\le\frac{21}{4}|v-\tilde v||v|(|w_\pm|^2+4|w_+||w_-|)+\frac{3}{2}|v-\tilde v|(|w_\pm|^2+4|w_+||w_-|)\\
&\quad+\frac{3}{2}|\tilde v|(|w_\pm|+|\tilde w_\pm|)|w_\pm-\tilde w_\pm|+3|\tilde v||w_-||w_+-\tilde w_+|+3|\tilde v||\tilde w_+||w_--\tilde w_-|\\
&\le\frac{21}{2}\left(\sum_\pm|v_\pm|\right)\left(\sum_\pm|w_\pm|\right)^2\sum_\pm|v_\pm-\tilde v_\pm|+3\left(\sum_\pm|w_\pm|\right)^2\sum_\pm|v_\pm-\tilde v_\pm|\\
&\quad+3\left(\sum_\pm|\tilde v_\pm|\right)\left(\sum_\pm|w_+|+\sum_\pm|\tilde w_+|\right)\sum_\pm|w_\pm-\tilde w_\pm|\\
&\le(12R^3+6R^2)d((v_\pm,w_\pm),(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm))\\
&\le12(R^2+R^3)d\left((v_\pm,w_\pm),(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\right)\end{aligned}$$

に基づき

$$\left\|\Phi^{(2)}_\pm(v_\pm,w_\pm)-\Phi^{(2)}_\pm(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm);L^\infty(L^\infty)\right\|$$
$$\le\left(\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}T\rho+12T(R^2+R^3)+25\frac{e^M}{1-N}T^2R^3\right)d\left((v_\pm,w_\pm),(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\right)\qquad(5.17)_\pm$$

と評価される。$(5.16)_\pm$, $(5.17)_\pm$ より

$$\begin{aligned}&d\left(\Phi(v_\pm,w_\pm),\Phi(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\right)\\
&\le\left(\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}T\rho+12T(R^2+R^3)+25\frac{e^M}{1-N}T^2R^3\right)d\left((v_\pm,w_\pm),(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\right)\end{aligned}$$

が従う。そこで (5.13) より強い条件

$$\begin{cases}R=3\rho,\\ 50T(1+R+R^3)\le1\end{cases}\qquad(5.18)$$

を課すと

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}T\rho+12T(R^2+R^3)+25\frac{e^M}{1-N}T^2R^3\\
&\leq \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}TR+12TR^2+12TR^3+25\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}T^2R^3\\
&\leq \frac{5}{6}TR+6T(R+R^3)+12TR^3+50T^2R^3\\
&\leq 7TR+18TR^3+TR^3\\
&\leq 20T(R+R^3)\leq\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となり Φ は $X^1_R(I)$ からそれ自身への縮小写像となり $X^1_R(I)$ に於いて唯一つの不動点を持つ。これが示すべき事であった。

最後に積分方程式系 $(3.18)_\pm$-$(3.19)_\pm$ の $X^1(I)$ に於ける解の一意性を示そう。$(v_\pm,w_\pm)\in X^1(I)$ を $(3.18)_\pm$-$(3.19)_\pm$ の解であるとし $(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)\in X^1(I)$ をもう一組の解、即ち対応する積分方程式系

$$\tilde v_\pm(t)=v^0_\pm\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}+\int_0^t F^{(1)}_\pm(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)(s,\widetilde{T}^\pm_s\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot))ds, \qquad (5.19)_\pm$$

$$\tilde w_\pm(t)=w^0_\pm\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}+\int_0^t F^{(2)}_\pm(\tilde v_\pm,\tilde w_\pm)(s,\widetilde{T}^\pm_s\circ(\widetilde{T}^\pm_t)^{-1}(\cdot))ds \qquad (5.20)_\pm$$

を I 上で満たしているものとする。さて $R>0, t_0>0$ を

$$\begin{aligned}
R\geq&\left(\sum_\pm\|v_\pm;L^\infty(I;W^1_\infty)\|\right)\vee\left(\sum_\pm\|\tilde v_\pm;L^\infty(I;W^1_\infty)\|\right)\\
&\vee\left(\sum_\pm\|w_\pm;L^\infty(I;W^1_\infty)\|\right)\vee\left(\sum_\pm\|\tilde w_\pm;L^\infty(I;W^1_\infty)\|\right),\\
t_0=&\frac{1}{4R}
\end{aligned}$$

を満たすものとする。このとき $b-a=t_0$ なる任意の部分区間 $J=[a,b]\subset I$ に対し

$$\begin{aligned}
M=M(J)&:=\frac{3}{2}\sum_\pm\int_J\|\partial v_\pm(t')\|_\infty dt\leq\frac{3}{8},\\
N=N(J)&:=Me^M\leq\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

が成立つ。$t\in[0,t_0]$ に対し

$$\varphi(t)=\left(\sum_\pm\|v_\pm(t)-\tilde v_\pm(t)\|_\infty\right)\vee\left(\sum_\pm\|w_\pm(t)-\tilde w_\pm(t)\|_\infty\right)$$

と置き、$(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ 及び $(5.19)_\pm$-$(5.20)_\pm$ の辺々の差を上と同様に評価すれば

$$\begin{aligned}
\varphi(t)\leq&\left(\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}\left(\left(\sum_\pm\|\partial v^0_\pm\|_\infty\right)\vee\left(\sum_\pm\|\partial w^0_\pm\|_\infty\right)\right)+12(R^2+R^3)+\frac{e^M}{1-N}R^2\right)\\
&\cdot\int_0^t\varphi(t')dt' \qquad (5.21)_\pm
\end{aligned}$$

が従う、グロンウォールの補題を (5.21) に適用すれば、直ちに φ は $[0, t_0]$ 上恒等的に零であり、任意の $t \in [0, t_0]$ に対し

$$(v_\pm(t), w_\pm(t)) = (\tilde{v}_\pm(t), \tilde{w}_\pm(t)), \tag{5.22$_\pm$}$$

$$T_t^\pm = \widetilde{T}_t^\pm \tag{5.23$_\pm$}$$

となっている事が分かる。これより $(v_\pm, w_\pm), (\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)$ は $t \in [0, 2t_0]$ に対し

$$\begin{aligned}
&v_\pm\left(t_0, T_{t_0}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) \\
&= \left(v_\pm^0 \circ (T_{t_0}^\pm)^{-1}\right) \circ \left((T_{t_0}^\pm) \circ (T_t^\pm)^{-1}\right) \\
&\quad + \int_0^{t_0} F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)\left(s, T_s^\pm \circ (T_{t_0}^\pm)^{-1}(T_{t_0}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))\right) ds \\
&= v_\pm^0 \circ (T_t^\pm)^{-1} + \int_0^{t_0} F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)\left(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) ds
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
v_\pm(t) &= v_\pm^0\left(t_0, T_{t_0}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) + \int_{t_0}^t F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)\left(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) ds, \\
w_\pm(t) &= w_\pm^0\left(t_0, T_{t_0}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) + \int_{t_0}^t F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)\left(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) ds, \\
\tilde{v}_\pm(t) &= v_\pm^0\left(t_0, T_{t_0}^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) + \int_{t_0}^t F_\pm^{(1)}(\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)\left(s, \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) ds, \\
\tilde{w}_\pm(t) &= w_\pm^0\left(t_0, T_{t_0}^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) + \int_{t_0}^t F_\pm^{(2)}(\tilde{v}_\pm, \tilde{w}_\pm)\left(s, \widetilde{T}_s^\pm \circ (\widetilde{T}_t^\pm)^{-1}(\cdot)\right) ds
\end{aligned}$$

を満たしている事が分かる。前段の議論を $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ を $\left(v_\pm^0(t_0, T_{t_0}^\pm(\cdot)), w_\pm^0(t_0, T_{t_0}^\pm(\cdot))\right)$ に置き換え、$[t_0, 2t_0]$ に於いて適用すれば、$(5.22)_\pm$-$(5.23)_\pm$ が $[t_0, 2t_0]$ に於いても成立つ事が分かる。この操作を有限回繰り返せば

$$I = \bigcup_{n \geq 1} \left([(n-1)t_0, nt_0] \cap I\right)$$

全体での解の一意性が従う。これで定理 1 の証明が完結した。

６．微分非損失型一階双曲系の基礎定理の証明 (その３：定理５及び定理２の証明)

定理５の証明　(5.17) で定まる T の上からの条件を $T(\rho)$ と表そう。即ち $\rho > 0$ に対し

$$T(\rho) = \frac{1}{50(1 + (\rho/3) + (\rho/3)^3)}$$

と置く。定理 1 に拠り、与えられた初期値 $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in (C^1 \cap W_\infty^1)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ に対し

$t_0 = T\left(\left(\sum_{\pm}\|v_{\pm}^0;W_\infty^1\|\right)\vee\left(\sum_{\pm}\|v_{\pm}^0;W_\infty^1\|\right)\right)$ とすれば $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の $[0,t_0]$ 上の解 $(v_\pm,w_\pm)\in X^1([0,t_0])$ の存在が従う。そこで $\big(v_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm(\cdot)),w_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm(\cdot))\big)\in(C^1\cap W_\infty^1)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4)$ を新たな初期値とした積分方程式系

$$v_\pm(t)=v_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))+\int_{t_0}^t F_\pm^{(1)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds, \qquad (6.1)_\pm$$

$$w_\pm(t)=w_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))+\int_{t_0}^t F_\pm^{(2)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds \qquad (6.2)_\pm$$

を考える。定理 1 の証明と全く同様な議論に依り

$$T_0=T\left(\left(\sum_{\pm}\|v_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm(\cdot));W_\infty^1\|\right)\vee\left(\sum_{\pm}\|w_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm(\cdot));W_\infty^1\|\right)\right)>0$$

とすれば $(6.1)_\pm$-$(6.2)_\pm$ の $[t_0,t_0+T_0]$ 上の解 $(v_\pm,w_\pm)\in X^1([t_0,t_0+T_0])$ の存在が従う。この $(v_\pm,w_\pm)$ の初期時刻 t_0 に於ける値は $(6.1)_\pm$-$(6.2)_\pm$ より

$$v_\pm(t_0)=v_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}(\cdot))+\int_{t_0}^{t_0} F_\pm^{(1)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}(\cdot))ds=v_\pm(t_0),$$

$$w_\pm(t_0)=w_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}(\cdot))+\int_{t_0}^{t_0} F_\pm^{(2)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}(\cdot))ds=w_\pm(t_0)$$

となる。ここに最左辺は $(v_\pm,w_\pm)\in X^1([t_0,t_0+T_0])$ の t_0 に於ける値であり、最右辺は $(v_\pm,w_\pm)\in X^1([0,t_0])$ の t_0 に於ける値である。そこで $(v_\pm,w_\pm)\in X^1([0,t_0])$ を $(6.1)_\pm$-$(6.2)_\pm$ に依って $[0,t_0+T_0]$ に延長し同じ記号で表す事にする。このとき $t\in[t_0,t_0+T_0]$ に対し $(v_\pm,w_\pm)$ は

$$\begin{aligned}
v_\pm(t)&=v_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))+\int_{t_0}^t F_\pm^{(1)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds\\
&=v_\pm^0\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}\circ(T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1})+\int_0^{t_0} F_\pm^{(1)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}\circ(T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1})(\cdot))ds\\
&\quad+\int_{t_0}^t F_\pm^{(1)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds\\
&=v_\pm^0\circ(T_t^\pm)^{-1}+\int_0^t F_\pm^{(1)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds,\\
w_\pm(t)&=w_\pm(t_0,T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))+\int_{t_0}^t F_\pm^{(2)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds\\
&=w_\pm^0\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}\circ((T_{t_0}^\pm)\circ(T_t^\pm)^{-1})+\int_0^{t_0} F_\pm^{(2)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_{t_0}^\pm)^{-1}\circ(T_{t_0}^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1})(\cdot))ds\\
&\quad+\int_{t_0}^t F_\pm^{(2)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds\\
&=w_\pm^0\circ(T_t^\pm)^{-1}+\int_0^t F_\pm^{(2)}(v_\pm,w_\pm)(s,T_s^\pm\circ(T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds
\end{aligned}$$

を満たすので $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の $[0, t_0+T_0]$ に於ける解となる。$t_1 = t_0 + T_0$ として、以下帰納的に $n \geq 1$ に対し積分方程式系

$$v_\pm(t) = v_\pm(t_n, T_{t_n}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)) + \int_{t_n}^t F_\pm^{(1)}(v_\pm, w_\pm)(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds, \tag{6.3$_\pm$}$$

$$w_\pm(t) = w_\pm(t_n, T_{t_n}^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot)) + \int_{t_n}^t F_\pm^{(2)}(v_\pm, w_\pm)(s, T_s^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}(\cdot))ds \tag{6.4$_\pm$}$$

を考える。定理 1 の証明と全く同様な議論に依り

$$T_n = T\left(\left(\sum_\pm \|v_\pm(t_n, T_{t_n}^\pm(\cdot)); W_\infty^1\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(t_n, T_{t_n}^\pm(\cdot)); W_\infty^1\|\right)\right) > 0$$

とすれば $(6.3)_\pm$-$(6.4)_\pm$ の $[t_n, t_n+T_n]$ 上の解 $(v_\pm, w_\pm) \in X^1([t_n, t_n+T_n])$ の存在が従い、当初の解は $[0, t_{n+1}] := [t_n, t_n+T_n]$ 迄 $(3.2)_\pm$-$(3.3)_\pm$ の解として延長される事が分かる。このとき次のどちらか一方が成立つ：

$$(a)\ \sum_{n=0}^\infty T_n = \infty, \qquad (b)\ \sum_{n=0}^\infty T_n < \infty$$

(a) の場合は $(v_\pm, w_\pm)$ が $[0, \infty)$ 上大域的に存在する事に対応する。残された (b) の場合を考える。このとき

$$T^* := t_0 + \sum_{n=0}^\infty T_n$$

は有限であり

$$T^* = \sup\{T > 0; (3.2)_\pm\text{-}(3.3)_\pm \text{は} (v_\pm, w_\pm) \in X^1([0,T]) \text{なる解を持つ}\}$$

と特徴付けられる。そこで $T^* < \infty$ なる仮定の下

$$\lim_{t \uparrow T^*} \left(\sum_\pm \|v_\pm(t); W_\infty^1\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(t); W_\infty^1\|\right) = \infty$$

を導こう。仮定

$$\liminf_{t \uparrow T^*} \left(\sum_\pm \|v_\pm(t); W_\infty^1\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(t); W_\infty^1\|\right) < \infty$$

が矛盾を引き起こす事を示せば充分である。$r_0 > 0$ を

$$\liminf_{t \uparrow T^*} \left(\sum_\pm \|v_\pm(t); W_\infty^1\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(t); W_\infty^1\|\right) < r_0$$

なる様に取る。このとき $t_0 < s_n < T^*, s_n \uparrow T^*$ なる単調増加列 (s_n) が存在し

$$\left(\sum_\pm \|v_\pm(s_n); W_\infty^1\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm(s_n); W_\infty^1\|\right) \leq r_0$$

を満たす。このとき $S_0 = T(r_0 \exp(\frac{3}{2}r_0)) > 0$ と置けば

$$T\left(\sum_{\pm} \|v_{\pm}(s_n, T^{\pm}_{s_n}(\cdot)); W^1_\infty\|\right) \vee \left(\sum_{\pm} \|w_{\pm}(s_n, T^{\pm}_{s_n}(\cdot)); W^1_\infty\|\right) \le S_0$$

より $(v_\pm, w_\pm)$ は

$$[0, T^*) \cup \bigcup_{n\ge 1}[s_n, s_n + S_0] = [0, T^* + S_0)$$

上に、特に $[0, T^* + S_0/2]$ 上に延長可能となる事が従う。これは T^* の上限性に反し矛盾となる、これが示すべき事であった。

定理 2 の証明 $((v^0_{\pm n}, w^0_{\pm n}); n \ge 1) \subset C^1 \cap W^1_\infty$ を W^1_∞ に於いて有界列で L^∞ に於いて $(v^0_\pm, w^0_\pm)$ に収束する列であるとし

$$\rho := \sup_{n\ge 1}\left(\sum_{\pm} \|v^0_{\pm n}; W^1_\infty\|\right) \vee \left(\sum_{\pm} \|w^0_{\pm n}; W^1_\infty\|\right) < \infty$$

と置く。定理 1 の証明と同様な議論で

$$\begin{aligned}
v_{\pm n}(t) &= v^0_{\pm n} \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} + \int_0^t F^{(1)}_\pm(v_{\pm n}, w_{\pm n})(s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot))ds, \\
w_{\pm n}(t) &= w^0_{\pm n} \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} + \int_0^t F^{(2)}_\pm(v_{\pm n}, w_{\pm n})(s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot))ds
\end{aligned}$$

を満たす $(v_{\pm n}, w_{\pm n}) \in X^1(I)$ が存在する。ここに $(T^{\pm n}_t; t \in I)$ は $v_{\pm n}$ に付随する一径数変換族で $I = [0, T(\rho)]$ とする。この $(v_{\pm n}, w_{\pm n})$ は $R = 3\rho$ とした $X^1_R(I)$ に属す。さて定理 1 の証明と同様に

$$\begin{aligned}
&v_{\pm n}(t) - v_\pm(t) \\
&= \left(v^0_{\pm n} \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - v^0_\pm \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}\right) + \left(v^0_\pm \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - v^0_\pm \circ (T^{\pm}_t)^{-1}\right) \\
&\quad + \int_0^t [F^{(1)}_\pm(v_{\pm n}, w_{\pm n}) - F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)](s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot))ds \\
&\quad + \int_0^t \left(F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)(s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot)) - F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)(s, T^{\pm}_s \circ (T^{\pm}_t)^{-1}(\cdot))\right) ds
\end{aligned}$$

を評価し

$$\begin{aligned}
&\|v_{\pm n}(t) - v_\pm(t)\|_\infty \\
&\le \|v^0_{\pm n} - v^0_\pm\| \\
&+ \ \left(\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}\rho + 12(R^2 + R^3) + \frac{e^M}{1-N}R^2\right) \\
&\quad \cdot \sum_{\pm} \int_0^t (\|v_{\pm n}(t') - v_\pm(t')\|_\infty + \|w_{\pm n}(t') - w_\pm(t')\|_\infty)dt' \qquad (6.5)_\pm
\end{aligned}$$

を得る。但し M, N は定理 1 の証明と同様区間幅一定の部分区間 $J \subset I$ とした

$$M = \frac{3}{2}\sum_{\pm}\sup_{n\geq 1}\int_J \|\partial v_{\pm n}(t')\|_\infty dt' \leq \frac{3}{8},$$
$$N = Me^M \leq \frac{3}{4}$$

とする。同様に

$$\begin{aligned}
&w_{\pm n}(t) - w_{\pm}(t) \\
=&\left(w^0_{\pm n}\circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - w^0_{\pm}\circ (T^{\pm n}_t)^{-1}\right) + \left(w^0_{\pm}\circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - w^0_{\pm}\circ (T^{\pm}_t)^{-1}\right) \\
&+\int_0^t [F^{(2)}_{\pm}(v_{\pm n}, w_{\pm n}) - F^{(2)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm})](s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot))ds \\
&+\int_0^t \left(F^{(2)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm})(s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot)) - F^{(2)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm})(s, T^{\pm}_s \circ (T^{\pm}_t)^{-1}(\cdot))\right) ds
\end{aligned}$$

を評価し

$$\begin{aligned}
&\|w_{\pm n}(t) - w_{\pm}(t)\|_\infty \\
\leq& \|w^0_{\pm n} - w^0_{\pm}\|_\infty \\
+& \left(\frac{3}{2}\ \frac{1+N}{1-N}\rho + 12(R^2+R^3) + \frac{e^M}{1-N}R^2\right) \\
&\cdot \sum_{\pm}\int_0^t (\|v_{\pm n}(t') - v_{\pm}(t')\|_\infty + \|w_{\pm n}(t') - w_{\pm}(t')\|_\infty)dt' \qquad (6.6)_{\pm}
\end{aligned}$$

を得る。$(6.5)_{\pm}$ 及び $(6.6)_{\pm}$ を辺々足し合わせて得られる不等式にグロンウォールの補題を用いると

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in I}\left(\sum_{\pm}\|v_{\pm n}(t) - v_{\pm}(t)\|_\infty\right) \vee \left(\sum_{\pm}\|w_{\pm n}(t) - w_{\pm}(t)\|_\infty\right) \\
\leq& \exp\left(\left(3\ \frac{1+N}{1-N}\rho + 24(R^2+R^3) + \frac{2e^M}{1-N}R^2\right)T(\rho)\right) \\
&\cdot \left(\sum_{\pm}\|v_{\pm n} - v_{\pm}\|_\infty\right) \vee \left(\sum_{\pm}\|w_{\pm n} - w_{\pm}\|_\infty\right)
\end{aligned}$$

を得るので $[0, T(\rho)]$ 上の解の初期条件に関する L^∞ 連続性が従う。次に初期時刻を $t = T(\rho)$ として同様の議論を行う。この議論を有限回繰り返す事に依って与えられた有界閉区間全体での L^∞ 連続性が従う。

７．微分非損失型一階双曲系の基礎定理の証明 (その４：定理３及び定理４の証明)

定理３の証明　先ず次の補題から始めよう。

補題３

(1) 任意の $\rho > 0$ に対し $T = T(\rho) > 0$ が存在し

$$\left(\sum_{\pm} \|v_{\pm}^0; W_{\infty}^2\|\right) \vee \left(\sum_{\pm} \|w_{\pm}^0; W_{\infty}^2\|\right) \leq \rho$$

なる任意の $(v_{\pm}^0, w_{\pm}^0) \in (C^2 \cap W_{\infty}^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ に対し $(3.2)_{\pm}$ 及び $(3.3)_{\pm}$ から成る積分方程式系は $I = [-T, T]$ 上

$$(v_{\pm}, w_{\pm}) \in X^2(I)$$

なる解を唯一つ持つ。

(2) 任意の $\rho > 0$ に対し $T = T(\rho) > 0$ が存在し

$$\left(\sum_{\pm} \|v_{\pm}^0; W_{\infty}^1 \cap H^1\|\right) \vee \left(\sum_{\pm} \|w_{\pm}^0; W_{\infty}^1 \cap H^1\|\right) \leq \rho$$

なる任意の $(v_{\pm}^0, w_{\pm}^0) \in (C^1 \cap W_{\infty}^1 \cap H^1)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ に対し $(3.2)_{\pm}$ 及び $(3.3)_{\pm}$ から成る積分方程式系は $I = [-T, T]$ 上

$$(v_{\pm}, w_{\pm}) \in Y^1(I)$$

なる解を唯一つ持つ。

(3) 任意の $\rho > 0$ に対し $T = T(\rho) > 0$ が存在し

$$\left(\sum_{\pm} \|v_{\pm}^0; W_{\infty}^2 \cap H^2\|\right) \vee \left(\sum_{\pm} \|w_{\pm}^0; W_{\infty}^2 \cap H^2\|\right) \leq \rho$$

なる任意の $(v_{\pm}^0, w_{\pm}^0) \in (C^2 \cap W_{\infty}^2 \cap H^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4)$ に対し $(3.2)_{\pm}$ 及び $(3.3)_{\pm}$ から成る積分方程式系は $I = [-T, T]$ 上

$$(v_{\pm}, w_{\pm}) \in Y^2(I)$$

なる解を唯一つ持つ。

補題３の証明　定理 1 の証明と同様であり Φ は夫々 $X_R^2(I), Y_R^1(I), Y_R^2(I)$ からそれ自身の写像となる様に ρ から R を経由して $T(\rho)$ を定めれば充分である。その際 (1) では $\partial^2\Phi$ の L^∞ 評価に補題 2 を、(2) では Φ 及び $\partial\Phi$ の L^2 評価に現れる変数変換（一次元ヤコビアンの評価）に補題 1 の $(4.9)_{\pm}$ を、(3) では $\partial^2\Phi$ の $L^2 \cap L^\infty$ 評価に上の全てを夫々用いる。
定理 7 を示すには、次の命題を示せば充分である事を確かめよう。

命題１　$T > 0$ を任意に与えたものとし $(v_{\pm}, w_{\pm}) \in X^1(I)$ を $(3.2)_{\pm}$-$(3.3)_{\pm}$ の解とする。以下 $I = [0, T]$ と表す。

(1) $(v_{\pm}, w_{\pm})$ は $(v_{\pm}, w_{\pm})|[0, T) \in C([0, T); C^2 \cap W_{\infty}^2)(\mathbb{R}; \mathbb{R}^4))$ なる滑らかさの条件を満たすものとすると $C^2 \cap W_{\infty}^2$ 解として I 全体に延長される：

$$(v_{\pm}, w_{\pm}) \in X^2(I)$$

(2) $(v_\pm, w_\pm)$ は $(v_\pm, w_\pm)|[0,T) \in C([0,T); H^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^4))$ なる滑らかさの条件を満たすものとすると $C^1 \cap W^1_\infty \cap H^1$ 解として I 全体に延長される：

$$(v_\pm, w_\pm) \in Y^1(I)$$

(3) $(v_\pm, w_\pm)$ は $(v_\pm, w_\pm)|[0,T) \in C([0,T); (C^2 \cap W^2_\infty \cap H^2)(\mathbb{R};\mathbb{R}^4))$ なる滑らかさの条件を満たすものとすると $C^2 \cap W^2_\infty \cap H^2$ 解として I 全体に延長される：

$$(v_\pm, w_\pm) \in Y^2(I)$$

命題１ $\Rightarrow$ 定理３の検証　初めに (1) を考える。

$(v_\pm, w_\pm) \in X^1([0,T_0])$ を与えられた解とし $(v^0_\pm, w^0_\pm) \in C^2 \cap W^2_\infty$ とする。

$$T^* = \sup\{T' > 0; (v_\pm, w_\pm)|[0,T'] \in X^2([0,T'])\}$$

と置く。補題 3 より $T^* > 0$ であり、定義より $T^* \le T_0$ である。そこで $T^* < T_0$ と仮定する。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(v_\pm, w_\pm)|[0,T^*-\varepsilon] \subset X^2([0,T^*-\varepsilon])$ であるから $(v_\pm, w_\pm)|[0,T^*) \in C([0,T^*); C^2 \cap W^2_\infty)$ となり命題 1 より $(v_\pm, w_\pm) \in X^2([0,T^*])$ が従う。このとき $(v_\pm(T^*), w_\pm(T^*)) \in C^2 \cap W^2_\infty$ を初期値として解を $[0,T^*]$ を真に含む有界閉区間上に X^2 に於いて延長する事が出来るが、これは T^* の定義に反する。従って $T^* = T_0$ となり定理 3 (1) が成立つ。残りの (2)(3) も同様な議論から導かれる。

以上より、定理 3 の証明は命題 1 を示す事に帰着された。

命題１の証明　$(v_\pm, w_\pm) \in X^1([0,T_0])$ を与えられた解とする。

(1) $(v_\pm, w_\pm)$ は $(v_\pm, w_\pm)|[0,T) \in C([0,T]; W^2_\infty)$ を満たしているものとする。$(v^*_\pm, w^*_\pm)$ を $v^*_\pm(t) = v_\pm(t) \circ T^\pm_t, w^*_\pm(t) = w_\pm(t) \circ T^\pm_t, t \in [0,T)$ で定める。

$\boldsymbol{v^*_\pm, w^*_\pm \in L^\infty(0,T;W^2_\infty)}$ なる事：

$$\|v^*_\pm(t)\|_\infty = \|v_\pm(t)\|_\infty, \|w^*_\pm(t)\|_\infty = \|w_\pm(t)\|_\infty,$$
$$\|\partial v^*_\pm(t)\|_\infty \le \|\partial v_\pm(t)\|_\infty \|\partial T^\pm_t\|_\infty, \|\partial w^*_\pm(t)\|_\infty \le \|\partial w_\pm(t)\|_\infty \|\partial T^\pm_t\|_\infty$$

及び $(3.22)_\pm$ より $v^*_\pm, w^*_\pm \in L^\infty(0,T;W^1_\infty)$ が従うので $\partial^2 v_\pm, \partial^2 w_\pm \in L^\infty(0,T;L^\infty)$ を示せば充分である。$(v^*_\pm, w^*_\pm)$ は積分方程式

$$v^*_\pm(t) = v^0_\pm + \int_0^t F^{(1)}_\pm(v^*_\pm, w^*_\pm)(s)ds, \tag{7.1$_\pm$}$$

$$w^*_\pm(t) = w^0_\pm + \int_0^t F^{(2)}_\pm(v^*_\pm, w^*_\pm)(s)ds \tag{7.2$_\pm$}$$

を満たす。$(7.1)_\pm$-$(7.2)_\pm$ の両辺を 2 回微分して

$$\partial^2 v^*_\pm(t) = \partial^2 v^0_\pm + \int_0^t \partial^2\big(F^{(1)}_\pm(v^*_\pm, w^*_\pm)\big)(s)ds, \tag{7.3$_\pm$}$$

$$\partial^2 w^*_\pm(t) = \partial^2 w^0_\pm + \int_0^t \partial^2\big(F^{(2)}_\pm(v^*_\pm, w^*_\pm)\big)(s)ds \tag{7.4$_\pm$}$$

を得る。右辺の被積分函数は L^∞ ノルムに於いて

$$\|\partial^2\bigl(F_\pm^{(1)}(v_\pm^*, w_\pm^*)\bigr)(t)\|_\infty \le C_0 \sum_\pm (\|\partial^2 v_\pm^*(t)\|_\infty + \|\partial^2 w_\pm^*(t)\|_\infty) \tag{7.5$_\pm$}$$

$$\|\partial^2\bigl(F_\pm^{(2)}(v_\pm^*, w_\pm^*)\bigr)(t)\|_\infty \le C_0 \sum_\pm (\|\partial^2 v_\pm^*(t)\|_\infty + \|\partial^2 w_\pm^*(t)\|_\infty) \tag{7.6$_\pm$}$$

と評価される。ここに C_0 は $\left(\sum_\pm \|v_\pm^*; L^\infty(L^\infty)\|\right) \vee \left(\sum_\pm \|w_\pm^*; L^\infty(L^\infty)\|\right)$ のみに依存する定数であり、実際、不等式

$$\|\partial f\|_\infty^2 \le 2\|f\|_\infty \|\partial^2 f\|_\infty^2,\ f \in W_\infty^2(\mathbb{R})$$

を用いる事に依り確かめられる。$(7.3)_\pm$-$(7.4)_\pm$ を L^∞ ノルムで評価し、$(7.5)_\pm$-$(7.6)_\pm$ を用いてグロンウォールの補題を適用すれば、任意の $t \in [0, T)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_\pm (\|\partial^2 v_\pm^*(t)\|_\infty + \|\partial^2 w_\pm^*(t)\|_\infty) \\
&\le \left(\sum_\pm (\|\partial^2 v_\pm^0\|_\infty + \|\partial^2 w_\pm^0\|_\infty\right) \exp(C_0 T)
\end{aligned} \tag{7.7$_\pm$}$$

なる評価が従う。これが示すべき事であった。

$v_\pm^*, w_\pm^*$ が $C([0,T]; W_\infty^2)$ に拡張を持つ事：

$t, s \in [0, T)$ なる t, s に対し $t, s \uparrow T$ なる時

$$\begin{aligned}
&\|v_\pm^*(t) - v_\pm^*(s); W_\infty^2\| \longrightarrow 0, \\
&\|w_\pm^*(t) - w_\pm^*(s); W_\infty^2\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

となる事を示せば充分であるが、これらは $(7.3)_\pm$-$(7.7)_\pm$ より直ちに従う。

$v_\pm, w_\pm$ が $C([0,T]; W_\infty^2)$ に拡張を持つ事：

$v_\pm(t) = v_\pm^*(t) \circ (T_t^\pm)^{-1}, w_\pm(t) = w_\pm^*(t) \circ (T_t^\pm)^{-1}$ であるから $t, s \in [0, T)$ なる t, s に対し $t, s \uparrow T$ なる時

$$\begin{aligned}
&\|v_\pm(t) - v_\pm(s); W_\infty^2\| \longrightarrow 0, \\
&\|w_\pm(t) - w_\pm(s); W_\infty^2\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

となる事を示せば良い。先ず補題 1 の $(4.1)_\pm$ 及び補題 2 の $(4.10)_\pm$ より $\partial T_\bullet^\pm \in L^\infty(0, T; W_\infty^1)$ であり、前段の議論を $(4.16)_\pm$ 及び $(4.32)_\pm$ に適用すれば $\partial T_\bullet^\pm$ が $C([0,T]; W_\infty^1)$ に拡張を持つ事が分かる。補題 1 の T_0 を取ると $(4.4)_\pm$ 及び $(4.13)_\pm$ より $\partial (T_\bullet^\pm)^{-1} \in L^\infty(0, T_0; W_\infty^1)$ が従う。更に補題 1 の $(4.6)_\pm$ より $\partial T_\bullet^\pm \circ (T_\bullet^\pm)^{-1} \in C([0, T_0]; L^\infty)$ 及び $\partial^2 T_\bullet^\pm \circ (T_\bullet^\pm)^{-1} \in C([0, T_0]; L^\infty)$ が従う。一方

$$\partial (T_t^\pm)^{-1} = \frac{1}{\partial T_t^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}},\ \partial^2 (T_t^\pm)^{-1} = -\frac{\partial^2 T_t^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1}}{(\partial T_t^\pm \circ (T_t^\pm)^{-1})^3}$$

より $\partial(T_\bullet^\pm)^{-1} \in C([0,T_0];W^1_\infty)$ が従う。さて t_0 を T に充分近く取り $(6.1)_\pm$ を二回微分すると

$$\begin{aligned}\partial^2 v_\pm &= \partial v_\pm(t_0, T^\pm_{t_0}\circ(T^\pm_t)^{-1})\left(\partial T^\pm_{t_0}\circ(T^\pm_t)^{-1}\cdot\partial^2(T^\pm_t)^{-1}+\partial^2 T^\pm_{t_0}\circ(T^\pm_t)^{-1}\cdot(\partial(T^\pm_t)^{-1})^2\right)\\ &\quad+\partial^2 v_\pm(t_0,T^\pm_{t_0}\circ(T^\pm_t)^{-1})(\partial T^\pm_{t_0}\circ(T^\pm_t)^{-1}\cdot\partial(T^\pm_t)^{-1})^2\\ &\quad+\int_{t_0}^t \partial^2(F^{(1)}_\pm(v_\pm,w_\pm)(t',T^\pm_{t'}\circ(T^\pm_t)^{-1}))dt'\end{aligned}$$

を得る。上の議論より右辺の積分項を除いた各項は $C([t_0,T];L^\infty)$ に拡張を持つ事が分かる。積分項の連続性は、$\partial^2 v_\pm(s)$ の対応する積分項との差を取り、被積分項の L^∞ ノルムを評価すれば、上で証明した有界性より従う。$w_\pm$ に対しても同様の議論を行えば表記の主張が成立つ。

(2) $(v_\pm,w_\pm)$ は $(v_\pm,w_\pm)|[0,T)\in C([0,T);H^1)$ を満たしているものとする。
$(v^*_\pm,w^*_\pm)\in L^\infty(0,T;H^1)$ なる事は $(7.1)_\pm$-$(7.2)_\pm$ を H^1 に於いて評価しグロンウォールの補題を用いれば分かる。これより積分方程式 $(7.1)_\pm$-$(7.2)_\pm$ を用いて $(v^*_\pm,w^*_\pm)$ が $C([0,T];H^1)$ に拡張を持つ事が従う。最後に $(v_\pm,w_\pm)$ が $C([0,T];H^1)$ に拡張を持つ事は、(1) の最終段と同様に確かめられる。

(3) $(v_\pm,w_\pm)$ は $(v_\pm,w_\pm)|[0,T)\in C([0,T);H^2)$ を満たしているものとする。
$(v_\pm,w_\pm)$ が $C([0,T];H^2)$ に拡張される事を示すには (1)(2) と同様な論法を用いれば良い。(1) に於ける補間不等式は

$$\|\partial f\|_2^2=\int|\partial f|^2=-\int f\partial^2 f\le\|f\|_2\|\partial^2 f\|_2$$

に置き換えて考える。

定理 4 の証明　(2) $\left((v^0_{\pm n},w^0_{\pm n});n\ge 1\right)\subset C^1\cap W^1_\infty\cap H^1$ を $W^1_\infty\cap H^1$ に於いて有界で $L^\infty\cap L^2$ に於いて $(v^0_\pm,w^0_\pm)$ に収束する列であるとし

$$\rho:=\sup_{n\ge 1}\left(\sum_\pm\|v^0_{\pm n};W^1_\infty\cap H^1\|\right)\vee\left(\sum_\pm\|w^0_{\pm n};W^1_\infty\cap H^1\|\right)<\infty$$

と置く。補題 3 (2) の証明と同様な議論で

$$v_{\pm n}(t)=v^0_{\pm n}\circ(T^{\pm n}_t)^{-1}+\int_0^t F^{(1)}_\pm(v_{\pm n},w_{\pm n})\big(s,T^{\pm n}_s\circ(T^{\pm n}_t)^{-1})(\cdot)\big)ds, \qquad (7.8)_\pm$$

$$w_{\pm n}(t)=w^0_{\pm n}\circ(T^{\pm n}_t)^{-1}+\int_0^t F^{(2)}_\pm(v_{\pm n},w_{\pm n})\big(s,T^{\pm n}_s\circ(T^{\pm n}_t)^{-1})(\cdot)\big)ds \qquad (7.9)_\pm$$

を満たす $(v_{\pm n},w_{\pm n})\in Y^1(T_0)$ が存在する。ここに $I_0=[0,T(\rho)]$ で $T(\rho)>0$ は ρ のみに依存し n に依存しない定数で $(T^{\pm n}_t;\ t\in I_0)$ は $v_{\pm n}$ に付随する一径数変換族とする。$C>0$ が存在し $((v_{\pm n},w_{\pm n});n\ge 1)$ は

$$\sup_{n\ge 1}|||(v_{\pm n},w_{\pm n})|||\le C\rho=:R$$

なる$Y^1(I_0)$の有界列を成し$(v_\pm, w_\pm) \in Y_R^1(I_0)$となる。定理2に依り$(v_{\pm n}, w_{\pm n})$は$C(I; L^\infty)$に於いて$(v_\pm, w_\pm)$に収束する事が分っている。そこで$C(I_0; L^2)$に於ける収束を示そう。$v_{\pm n}$と$v_\pm$との差を

$$
\begin{aligned}
&v_{\pm n}(t) - v_\pm(t) \\
= &v^0_{\pm n} \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - v^0_\pm \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} \\
&+ \int_0^1 \partial v^0_\pm \circ \big(\theta(T^\pm_t)^{-1} + (1-\theta)(T^{\pm n}_t)^{-1}\big) d\theta \cdot \big((T^\pm_t)^{-1} - (T^{\pm n}_t)^{-1}\big) \\
&+ \int_0^t \big[F^{(1)}_\pm(v_{\pm n}, w_{\pm n}) - F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)\big](s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot)) ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \partial\big(F^{(1)}_\pm(v_\pm, w_\pm)\big)\big(s, \theta T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot) + (1-\theta) T^\pm_s \circ (T^\pm_t)^{-1}(\cdot)\big) d\theta \\
&\qquad \cdot (T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - T^\pm_s \circ (T^\pm_t)^{-1}) ds
\end{aligned}
\tag{7.10$_\pm$}
$$

と表し$(4.2)_\pm$,$(4.5)_\pm$,$(4.8)_\pm$,$(4.9)_\pm$を用いてL^2に於いて評価する事に依り

$$
\begin{aligned}
&\|v_{\pm n}(t) - v_\pm(t)\|_2 \\
\le\ &e^{\frac{1}{2}M} \|v^0_{\pm n} - v^0_\pm\|_2 \\
&+ \frac{3}{2} \frac{1+N}{1-N} \left(\frac{1}{1-2N}\right)^{1/2} \|\partial v^0_\pm\|_2 \sum_\pm \int_0^t \|v_{\pm n}(s) - v_\pm(s)\|_\infty ds \\
&+ C(R^2 + R^3) \left(\frac{e^M}{1-N}\right)^{1/2} \sum_\pm \int_0^t (\|v_{\pm n}(s) - v_\pm(s)\|_2 + \|w_{\pm n}(s) - w_\pm(s)\|_2) ds \\
&+ CR^3 \left(\frac{1}{1-2N}\right)^{1/2} \cdot \frac{e^M}{1-N} \sum_\pm \int_0^t \|v_{\pm n}(s) - v_\pm(s)\|_\infty ds
\end{aligned}
\tag{7.11$_\pm$}
$$

を得る。ここにM, Nは定理1の証明と同様、区間幅一定$\eta > 0$の$|J| \le \eta$なる部分区間$J \subset I$とした

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{3}{2} \sum_\pm \sup_{n \ge 1} \int_J \|\partial v_{\pm n}(t')\|_\infty \le \frac{1}{4} \\
N &= Me^M \le \frac{3}{8}
\end{aligned}
\tag{7.12$_\pm$}
$$

とする。同様に

$$
\begin{aligned}
&w_{\pm n}(t) - w_\pm(t) \\
= &w^0_{\pm n} \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - w^0_\pm \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} \\
&+ \int_0^1 \partial w^0_\pm \circ \big(\theta(T^\pm_t)^{-1} + (1-\theta)(T^{\pm n}_t)^{-1}\big)\, d\theta \cdot \big((T^\pm_t)^{-1} - (T^{\pm n}_t)^{-1}\big) \\
&+ \int_0^t [F^{(2)}_\pm(v_{\pm n}, w_{\pm n}) - F^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm)](s, T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot)) ds \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \partial\big(F^{(2)}_\pm(v_\pm, w_\pm)\big)\big(s, \theta T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1}(\cdot) + (1-\theta) T^\pm_s \circ (T^\pm_t)^{-1}(\cdot)\big) d\theta \\
&\qquad \cdot (T^{\pm n}_s \circ (T^{\pm n}_t)^{-1} - T^\pm_s \circ (T^\pm_t)^{-1}) ds
\end{aligned}
\tag{7.13$_\pm$}
$$

を L^2 に於いて評価する事に依り

$$
\begin{aligned}
&\|w_{\pm n}(t)-w_\pm(t)\|_2\\
&\le e^{\frac{1}{2}M}\|w^0_{\pm n}-w^0_\pm\|_2\\
&\quad+\frac{3}{2}\,\frac{1+N}{1-N}\left(\frac{1}{1-2N}\right)^{1/2}\|\partial v^0_\pm\|_2\sum_\pm\int_0^t\|v_{\pm n}(s)-v_\pm(s)\|_\infty ds\\
&\quad+C(R^2+R^3)\left(\frac{e^M}{1-N}\right)^{1/2}\sum_\pm\int_0^t(\|v_{\pm n}(s)-v_\pm(s)\|_2+\|w_{\pm n}(s)-w_\pm(s)\|_2)ds\\
&\quad+CR^3\left(\frac{1}{1-2N}\right)^{1/2}\cdot\frac{e^M}{1-N}\sum_\pm\int_0^t\|v_{\pm n}(s)-v_\pm(s)\|_\infty ds \qquad (7.14)_\pm
\end{aligned}
$$

を得る。$(7.11)_\pm$ と $(7.14)_\pm$ を辺々足し合わせて得られる不等式にグロンウォールの補題を適用し L^2 に於いて $(v^0_{\pm n},w^0_{\pm n})$ が $(v^0_\pm,w^0_\pm)$ に収束する事と $C(I;L^\infty)$ に於いて $(v_{\pm n},w_{\pm n})$ が $(v_\pm,w_\pm)$ に於いて収束する事を用いれば、区間 $[0,\eta]$ 上の L^2 値連続函数の成す空間 $C([0,\eta],L^2)$ に於いて $(v_{\pm n},w_{\pm n})$ は $(v_\pm,w_\pm)$ に収束する事が分かる。この議論を有限回繰り返す事に依って $C(I;L^2)$ に於ける収束が従う。

(1) $\big((v^0_{\pm n},w^0_{\pm n});n\ge 1\big)\subset C^2\cap W^2_\infty$ を W^2_∞ に於いて有界で W^1_∞ に於いて $(v^0_\pm,w^0_\pm)$ に収束する列であるとし

$$
\rho:=\sup_{n\ge 1}\left(\sum_\pm\|v^0_{\pm n};W^2_\infty\|\right)\vee\left(\sum_\pm\|w^0_{\pm n};W^2_\infty\|\right)<\infty
$$

と置く。補題 3 (1) の証明と同様な議論で $(7.8)_\pm$-$(7.9)_\pm$ を満たす $(v_{\pm n},w_{\pm n})\in X^2(I_0)$ が存在する。ここに $I_0=[0,T(\rho)]$ で $T(\rho)>0$ は ρ にのみ依存し n に依存しない定数で $(T^{\pm n}_t;\ t\in I_0)$ は $v_{\pm n}$ に付随する一径数変換族とする。$C>0$ が存在し $((v_{\pm n},w_{\pm n});n\ge 1)$ は

$$
\sup_{n\ge 1}\|(v_{\pm n},w_{\pm n})\|\vee\|(\partial v_{\pm n},\partial w_{\pm n})\|\le C\rho=:R
$$

なる $X^2(I_0)$ の有界列を成し $(v_\pm,w_\pm)\in X^2_R(I_0)$ となる。定理 6 に依り $(v_{\pm n},w_{\pm n})$ は $C(I;L^\infty)$ に於いて $(v_\pm,w_\pm)$ に収束する事が分かっている。そこで $(\partial v_{\pm n},\partial w_{\pm n})$ が $C(I_0;L^\infty)$ に於いて $(\partial v_\pm,\partial w_\pm)$ に収束する事を示そう。$(\partial v_{\pm n},\partial w_{\pm n})$ は

$$
\begin{aligned}
\partial v_{\pm n}(t)&=\partial v^0_{\pm n}\circ(T^{\pm n}_t)^{-1}\cdot\partial(T^{\pm n}_t)^{-1}\\
&\quad+\int_0^t\partial(F^{(1)}_\pm(v_{\pm n},w_{\pm n}))\big(s,T^{\pm n}_s\circ(T^{\pm n}_t)^{-1})(\cdot)\big)\partial T^{\pm n}_s\circ(T^{\pm n}_t)^{-1}ds\partial(T^{\pm n}_t)^{-1}, \quad (7.15)_\pm\\
\partial w_{\pm n}(t)&=\partial w^0_{\pm n}\circ(T^{\pm n}_t)^{-1}\cdot\partial(T^{\pm n}_t)^{-1}\\
&\quad+\int_0^t\partial(F^{(2)}_\pm(v_{\pm n},w_{\pm n}))\big(s,T^{\pm n}_s\circ(T^{\pm n}_t)^{-1})(\cdot)\big)\partial T^{\pm n}_s\circ(T^{\pm n}_t)^{-1}ds\partial(T^{\pm n}_t)^{-1}, \quad (7.16)_\pm
\end{aligned}
$$

を満たす。$\partial v_{\pm n}(t)$ と $\partial v_{\pm}(t)$ との差を

$$
\begin{aligned}
&\partial v_{\pm n}(t) - \partial v_{\pm}(t) \\
=&\int_0^1 \partial^2 v^0_{\pm n} \circ \bigl(\theta (T_t^{\pm n})^{-1} + (1-\theta)(T_t^{\pm n})^{-1}\bigr)\, d\theta \,\bigl((T_t^{\pm n})^{-1} - (T_t^{\pm})^{-1}\bigr) \cdot \partial (T_t^{\pm n})^{-1} \\
&+ \partial v^0_{\pm n} \circ (T_t^{\pm})^{-1} \cdot (\partial (T_t^{\pm n})^{-1} - \partial (T_t^{\pm})^{-1}) \\
&+ (\partial v^0_{\pm n} \circ (T_t^{\pm})^{-1} - \partial v^0_{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}) \partial (T_t^{\pm})^{-1} \\
&+ \int_0^t \bigl[\partial (F^{(1)}_{\pm}(v_{\pm n}, w_{\pm n}) - F^{(1)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm}))\bigr](s, T_s^{\pm n} \circ (T_t^{\pm n})^{-1}(\cdot)) \partial T_s^{\pm n} \circ (T_t^{\pm n})^{-1} ds \partial (T_t^{\pm n})^{-1} \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \partial^2 \bigl(F^{(1)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm})\bigr)\bigl(s, \theta T_s^{\pm n} \circ (T_t^{\pm n})^{-1}(\cdot) + (1-\theta) T_s^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}(\cdot)\bigr) d\theta \\
&\qquad\qquad \cdot (T_s^{\pm n} \circ (T_t^{\pm n})^{-1} - T_s^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}) \partial T_s^{\pm n} \circ (T_t^{\pm n})^{-1} ds \partial (T_t^{\pm n})^{-1} \\
&+ \int_0^t \partial \bigl(F^{(1)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm})\bigr)\bigl(s, T_s^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}(\cdot)\bigr)(\partial T_s^{\pm n} \circ (T_t^{\pm n})^{-1} - \partial T_s^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}) ds \partial (T_t^{\pm n})^{-1} \\
&+ \int_0^t \partial \bigl(F^{(1)}_{\pm}(v_{\pm}, w_{\pm})\bigr)\bigl(s, T_s^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1}(\cdot)\bigr) \partial T_s^{\pm} \circ (T_t^{\pm})^{-1} ds (\partial (T_t^{\pm n})^{-1} - \partial (T_t^{\pm})^{-1})
\end{aligned}
\tag{7.17$_\pm$}
$$

と表し $(4.1)_{\pm}$,$(4.4)_{\pm}$,$(4.5)_{\pm}$,$(4.7)_{\pm}$,$(4.8)_{\pm}$,$(4.12)_{\pm}$,$(4.14)_{\pm}$ を用いて L^∞ に於いて評価する事に依り (2) と同様に $\eta > 0$ を選べば任意の $t \in [0, \eta]$ に対し

$$
\begin{aligned}
\|\partial v_{\pm n}(t) - \partial v_{\pm}(t)\|_\infty \le{}& C \|\partial v^0_{\pm n} - \partial v^0_{\pm}\|_\infty \\
&+ C \sum_{\pm} \int_0^t (\|v_{\pm n}(t') - v_{\pm}(t')\|_\infty + \|w_{\pm n}(t') - w_{\pm}(t')\|_\infty) dt' \\
&+ C \sum_{\pm} \int_0^t (\|\partial v_{\pm n}(t') - \partial v_{\pm}(t')\|_\infty + \|\partial w_{\pm n}(t') - \partial w_{\pm}(t')\|_\infty) dt'
\end{aligned}
\tag{7.18$_\pm$}
$$

を得る。ここに C は $T(\rho), R$ のみに依る定数である。同様に

$$
\begin{aligned}
\|\partial w_{\pm n}(t) - \partial w_{\pm}(t)\|_\infty \le{}& C \|\partial w^0_{\pm n} - \partial w^0_{\pm}\|_\infty \\
&+ C \sum_{\pm} \int_0^t (\|v_{\pm n}(t') - v_{\pm}(t')\|_\infty + \|w_{\pm n}(t') - w_{\pm}(t')\|_\infty) dt' \\
&+ C \sum_{\pm} \int_0^t (\|\partial v_{\pm n}(t') - \partial v_{\pm}(t')\|_\infty + \|\partial w_{\pm n}(t') - \partial w_{\pm}(t')\|_\infty) dt'
\end{aligned}
\tag{7.19$_\pm$}
$$

を得る。$(7.18)_{\pm}$ と $(7.19)_{\pm}$ を辺々足し合わせて得られる不等式にグロンウォールの補題を適用し W^1_∞ に於いて $(v^0_{\pm n}, w^0_{\pm n})$ が $(v^0_{\pm}, w^0_{\pm})$ に収束する事と $C(I; L^\infty)$ に於いて $(v_{\pm n}, w_{\pm n})$ が $(v_{\pm}, w_{\pm})$ に収束する事を用いれば $C([0, \eta], L^\infty)$ に於いて $(\partial v_{\pm n}, \partial w_{\pm n})$ は $(\partial v_{\pm}, \partial w_{\pm})$ に収束する事が分かる。この議論を有限回繰り返す事に依って $C(I; L^\infty)$ に於ける収束が従う。

(3) $\bigl((v^0_{\pm n}, w^0_{\pm n}); n \ge 1\bigr) \subset C^2 \cap W^2_\infty \cap H^2$ を $W^2_\infty \cap H^2$ に於いて有界で $W^1_\infty \cap H^1$ に於いて $(v^0_{\pm}, w^0_{\pm})$ に収束する列とし

$$
\rho := \sup_{n \ge 1} \left(\sum_{\pm} \|v^0_{\pm n}; W^2_\infty \cap H^2\| \right) \vee \left(\sum_{\pm} \|w^0_{\pm n}; W^2_\infty \cap H^2\| \right) < \infty
$$

と置く。補題３ (3) の証明と同様な議論で $(7.8)_{\pm}$-$(7.9)_{\pm}$ を満たす $(v_{\pm n}, w_{\pm n}) \in Y^2(I_0)$ が存在する。ここに $I_0 = [0, T(\rho)]$ で $T(\rho) > 0$ は ρ にのみ依存し n に依存しない定数で $(T_t^{\pm n};\ t \in I_0)$ は $v_{\pm n}$ に付随する一径数変換族とする。$C > 0$ が存在し $((v_{\pm n}, w_{\pm n}); n \geq 1)$ は

$$\sup_{n\geq 1} |||(v_{\pm n}, w_{\pm n})||| \vee |||(\partial v_{\pm n}, \partial w_{\pm n})||| \leq C\rho =: R$$

なる $Y^2(I_0)$ の有界列を成し $(v_{\pm}, w_{\pm}) \in Y_R^2(I_0)$ となる。定理２及び上記 (1)(2) より $(v_{\pm n}, w_{\pm n})$ は $C(I; W_\infty^1 \cap L^2)$ に於いて $(v_{\pm}, w_{\pm})$ に収束する事が分かっている。よって $(\partial v_{\pm n}, \partial w_{\pm n})$ が $C(I_0; L^2)$ に於いて $(\partial v_{\pm}, \partial w_{\pm})$ に収束する事を示せば充分である。$(7.17)_{\pm}$ 及び $\partial w_{\pm n}(t) - \partial w_{\pm}(t)$ との対応する積分表示を L^2 に於いて評価する為に $(4.9)_{\pm}$ を用いる外は (1) と同様な議論で $C([0,\eta]; L^2)$ に於ける $(\partial v_{\pm n}, \partial w_{\pm n})$ の $(\partial v_{\pm}, \partial w_{\pm})$ への収束性が従う。この議論を有限回繰り返す事に依って $C(I; L^2)$ に於ける収束が従う。

８．一階双曲系の初期値問題に関する基礎定理

微分非損失型一階双曲系 (DHS) の基礎定理を用いて、対角化する前の本来の一階双曲型 (HS) の初期値問題の解法を考察しよう。具体的には、定理 1 - 4 で与えられる (DHS) の解 $(v_{\pm}, w_{\pm})$ を基に (HS) の解 (u, v) を構成すると云う問題を考える。(DHS) の解 $(v_{\pm}, w_{\pm})$ が与えられたものとすれば (1.7) に鑑み (u, v) を

$$\left.\begin{aligned} &u = (1+v^2)^{-3/4}(v_- - v_+) = (1+(v_+ + v_-)^2)^{-3/4}(v_- - v_+), \\ &v = v_+ + v_- \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

と定める事は自然である。そこで本節では (u, v) を (8.1) で定義されたものとして議論する。(8.1) で与えられる (u, v) の満たす関係式を求めよう。先ず構造の簡単な v から考える。その時間導函数は (8.1) 及び (DHS) に拠り

$$\begin{aligned} &\partial_t v = \partial_t(v_+ + v_-) \\ &= -(1+v^2)^{-3/4}\partial v_+ + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_- \\ &\quad + (1+v^2)^{-3/4}\partial v_- + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_+ \\ &= (1+v^2)^{-3/4}\partial(v_- - v_+) + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)(w_+ + w_-) \\ &= \partial\left((1+v^2)^{-3/4}(v_- - v_+)\right) + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}\left(v\partial v(v_- - v_+) + (v_+^2 - v_-^2)(w_+ + w_-)\right) \\ &= \partial u + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4} v(v_- - v_+)\left(\partial v - (w_+ + w_-)\right) \\ &= \partial u + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1} uv\left(\partial v - (w_+ + w_-)\right) \end{aligned} \tag{8.2}$$

と計算される。u の時間導函数は $(8.1)_{\pm}$-$(8.2)_{\pm}$ 及び (DHS) に拠り

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4} v\partial_t v(v_- - v_+) + (1+v^2)^{-3/4}\partial_t(v_- - v_+) \\ &= -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1} vu\left(\partial u + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1} uv\big(\partial v - (w_+ + w_-)\big)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1+v^2)^{-3/4}\Big((1+v^2)^{-3/4}\partial v_- + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_+ \\
&\qquad\qquad + (1+v^2)^{-3/4}\partial v_+ - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}(v_+^2 - v_-^2)w_-\Big) \\
=& -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}vu\partial u - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\left(\partial v - (w_+ + w_-)\right) \\
&+(1+v^2)^{-3/2}\partial v + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-5/2}(v_+^2 - v_-^2)(w_+ - w_-) \\
=& -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}uv((1+v^2)^{3/4}\partial u + (w_+ - w_-)) \\
&- \frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\left(\partial v - (w_+ + w_-)\right) + (1+v^2)^{-3/2}\partial v
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

で与えられる。従って (u, v) が元の方程式系 (HS) を満たす為には $u, v, w_\pm$ が

$$
\left.\begin{aligned}
\partial v &= w_+ + w_-, \\
(1+v^2)^{3/4}\partial u &= w_- - w_+
\end{aligned}\right\} \tag{8.4}
$$

なる関係式を満たしている事が必要充分条件となる。そこで、(DHS) の初期値 $(v_\pm^0, w_\pm^0)$ が (8.1) を通して (8.4) を初期時刻で満たしている、即ち

$$
\left.\begin{aligned}
&u_0 = (1 + (v_+^0 + v_-^0)^2)^{-3/4}(v_-^0 - v_+^0), \\
&v_0 = v_+^0 + v_-^0
\end{aligned}\right\} \tag*{$(8.1)_0$}
$$

で与えられる (u_0, v_0) が

$$
\left.\begin{aligned}
\partial v_0 &= w_+^0 + w_-^0, \\
(1+v_0^2)^{3/4}\partial u_0 &= w_-^0 - w_+^0
\end{aligned}\right\} \tag*{$(8.4)_0$}
$$

を満たしているものと仮定して、(DHS) の解 $(v_\pm, w_\pm)$ から (8.1) を通じて定まる (u, v) は存在時間区間全体 (T_-^*, T_+^*) に於いて (8.4) を満たしている事を示そう。以下簡単の為 $I = [0, T_+^*)$ に於いて議論する。

そこで $(v_\pm^0, w_\pm^0) \in C^2 \cap W_\infty^2$ として対応する解 $(v_\pm, w_\pm) \in X^2(I)$ を取り (8.1) で $(u, v) \in X^2(I)$ を定める。(8.2), (8.3), (DHS) に拠り (u, v) 及び $(w_+ + w_-, w_+ - w_-)$ は

$$
\begin{aligned}
\partial_t u =& (1+v^2)^{-3/2}\partial v - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}uv\left((1+v^2)^{3/4}\partial u + (w_+ - w_-)\right) \\
&- \frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\left(\partial v - (w_+ + w_-)\right),
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

$$
\partial_t v = \partial u + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\left(\partial v - (w_+ + w_-)\right), \tag{8.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(w_+ + w_-) \\
&= -(1+v^2)^{-3/4}\partial(w_+ - w_-) + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v(w_+ + w_-)(w_+ - w_-),
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(w_+ - w_-) \\
&= -(1+v^2)^{-3/4}\partial(w_+ + w_-) + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\left(2(w_+ + w_-)^2 - (w_+ - w_-)^2\right),
\end{aligned} \tag{8.8}
$$

を満たす。そこで $(\varphi,\psi)\in X^1(I)$ を

$$\varphi=(1+v^2)^{3/4}\partial u+(w_+-w_-), \tag{8.9}$$
$$\psi=\partial v-(w_++w_-) \tag{8.10}$$

で定めると (8.5) 及び (8.6) は夫々

$$\partial_t u=(1+v^2)^{-3/2}\partial v-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}uv\varphi-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\psi, \tag{8.11}$$
$$\partial_t v=\partial u+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\psi \tag{8.12}$$

と表され $w_+\pm w_-$ は

$$w_++w_-=\partial v-\psi, \tag{8.13}$$
$$w_+-w_-=\varphi-(1+v^2)^{3/4}\partial u \tag{8.14}$$

と表される。(8.7), (8.8), (8.11)-(8.14) を用いて (φ,ψ) の満たす式を求めよう。(8.9) を時間変数 t で微分し

$$\begin{aligned}
\partial_t\varphi&=(1+v^2)^{3/4}\partial\partial_t u+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}v\partial_t v\partial u+\partial_t(w_+-w_-)\\
&=(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-3/2}\partial v-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}uv\varphi-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\psi\right)\\
&\quad+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}v\partial u\left(\partial u+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\psi\right)\\
&\quad-(1+v^2)^{-3/4}\partial(w_++w_-)+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\left(2(w_++w_-)^2-(w_+-w_-)^2\right)\\
&=\ -3(1+v^2)^{-7/4}v(\partial v)^2+(1+v^2)^{-3/4}\partial^2 v\\
&\quad-\frac{3}{2}(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-7/4}uv\right)\varphi-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\varphi\\
&\quad-\frac{9}{4}(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-2}u^2v^2\right)\psi-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\partial\psi\\
&\quad+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}v(\partial u)^2+\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}uv^2\partial u\psi\\
&\quad-(1+v^2)^{-3/4}\partial(\partial v-\psi)+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\left(2(\partial v-\psi)^2-(\varphi-(1+v^2)^{-3/4}\partial u)^2\right)\\
&=\ -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\varphi+\left((1+v^2)^{-3/4}-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\right)\partial\psi\\
&\quad+\left(3(1+v^2)^{-1}v\partial u-\frac{3}{2}(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^{-7/4}uv\right)\right)\varphi\\
&\quad-\left(6(1+v^2)^{-7/4}v\partial u+\frac{9}{4}(1+v^2)^{3/4}\partial\left((1+v^2)^2u^2v^2\right)-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}uv^2\partial u\right)\psi\\
&\quad-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\varphi^2+3(1+v^2)^{-7/4}v\psi^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\varphi + \left((1+v^2)^{-3/4} - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\right)\partial\psi \\
& + \left(\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}v\partial u - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-2}(2-5v^2)u\partial v\right)\varphi \\
& - \left(6(1+v^2)^{-7/4}v\partial v + \frac{9}{2}(1+v^2)^{-9/4}u^2v(1-v^2)\partial v + \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}uv^2\partial u\right)\psi \\
& - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\varphi^2 + 3(1+v^2)^{-7/4}v\psi^2
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

を得る。(8.10) を時間変数 t で微分し

$$
\begin{aligned}
\partial_t\psi &= \partial\partial_t v - \partial(w_+ + w_-) \\
&= \partial\left(\partial u + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\psi\right) \\
&\quad + (1+v^2)^{-3/4}\partial(w_+ - w_-) - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v(w_+ + w_-)(w_+ - w_-) \\
&= \partial^2 u + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\psi + \frac{3}{2}\partial\left((1+v^2)^{-1}uv\right)\psi \\
&\quad + (1+v^2)^{-3/4}\partial\left(\varphi - (1+v^2)^{3/4}\partial u\right) - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v(\partial v - \psi)\left(\varphi - (1+v^2)^{3/4}\partial u\right) \\
&= \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\psi + (1+v^2)^{-3/4}\partial\varphi + \frac{3}{2}\partial\left((1+v^2)^{-1}uv\right)\psi \\
&\quad - (1+v^2)^{-3/4}\partial\left((1+v^2)^{3/4}\right)\partial u \\
&\quad - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\left(\partial v\varphi - (1+v^2)^{3/4}\partial v\partial u - \psi\varphi + (1+v^2)^{3/4}\partial u\psi\right) \\
&= (1+v^2)^{-3/4}\partial\varphi + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\psi - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v\varphi \\
&\quad + \frac{3}{2}\left(\partial\left((1+v^2)^{-1}uv\right) - (1+v^2)^{-1}v\partial u\right)\psi + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\varphi\psi \\
&= (1+v^2)^{-3/4}\partial\varphi + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\psi - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v\varphi \\
&\quad + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-2}(1-v^2)u\partial v\psi + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\varphi\psi
\end{aligned} \tag{8.16}
$$

を得る。(8.15) と (8.16) を次の形に纏めて置こう。

$$
\begin{aligned}
\partial_t\varphi = & -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\varphi + \left((1+v^2)^{-3/4} - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\right)\partial\psi \\
& + \gamma_1^1\varphi + \gamma_2^1\psi + \gamma_3^1\varphi^2 + \gamma_4^1\psi^2,
\end{aligned} \tag{8.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t\psi = & (1+v^2)^{-3/4}\partial\varphi + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\psi \\
& + \gamma_1^2\varphi + \gamma_2^2\psi + \gamma_3^2\varphi\psi
\end{aligned} \tag{8.18}
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^1 &= \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}v\partial u - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-2}(2-5v^2)u\partial v,\\
\gamma_2^1 &= -6(1+v^2)^{-7/4}v\partial v - \frac{9}{2}(1+v^2)^{-9/4}u^2v(1-v^2)\partial v - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}uv^2\partial u,\\
\gamma_3^1 &= -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v,\\
\gamma_4^1 &= 3(1+v^2)^{-7/4}v,\\
\gamma_1^2 &= -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v,\\
\gamma_2^2 &= \frac{3}{2}(1+v^2)^{-2}(1-v^2)u\partial v,\\
\gamma_3^2 &= \frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v
\end{aligned}
$$

とする。(8.17) 及び (8.18) を (φ,ψ) の満たす一階の方程式系と見做し、縦ベクトル表示

$$
\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} : I\times\mathbb{R}\ni(t,x)\longmapsto\begin{pmatrix}\varphi(t,x)\\ \psi(t,x)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2
$$

とすると (8.17)-(8.18) は次の形で表される：

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + A(u,v)\partial\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = F(\varphi,\psi), \qquad (8.19)\\
&A(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv & \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2 - (1+v^2)^{-3/4}\\ -(1+v^2)^{-3/4} & -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv \end{pmatrix},\\
&F(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \gamma_1^1\varphi + \gamma_2^1\psi + \gamma_3^1\varphi^2 + \gamma_4^1\psi^2\\ \gamma_1^2\varphi + \gamma_2^2\psi + \gamma_3^2\varphi\psi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

そこで (8.19) を対角化して、二つの単独一階偏微分方程式から成る新しい系に書き換えよう。行列 $A(u,v)$ の固有値は第一節の $A(U)$ と同じ $\lambda_\pm = \pm(1+v^2)^{-3/4}$ となる。実際

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A(u,v)) &= \det\begin{pmatrix} \lambda - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv & (1+v^2)^{-3/4} - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\\ (1+v^2)^{-3/4} & \lambda + \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv \end{pmatrix}\\
&= \left(\lambda^2 - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\right) - \left((1+v^2)^{-3/2} - \frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}u^2v^2\right)\\
&= \lambda^2 - (1+v^2)^{-3/2}
\end{aligned}
$$

となるからである。対応する固有ベクトル $e_\pm(u,v)$ は

$$
e_\pm(u,v) = \begin{pmatrix} \mp 1 - \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv\\ 1 \end{pmatrix}
$$

で与えられる。実際

$$
\begin{aligned}
A(u,v)e_\pm(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv & \frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2-(1+v^2)^{-3/4} \\ -(1+v^2)^{-3/4} & -\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mp 1-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mp\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2+\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2-(1+v^2)^{-3/4} \\ \pm(1+v^2)^{-3/4}+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mp\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv-(1+v^2)^{-3/4} \\ \pm(1+v^2)^{-3/4} \end{pmatrix} \\
&= \pm(1+v^2)^{-3/4}\begin{pmatrix} \mp 1-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_\pm e_\pm(u,v)
\end{aligned}
$$

となるからである。二つの固有空間 $\mathbb{R}e_\pm(u,v)$ の成す直和分解 $\mathbb{R}^2=\bigoplus_\pm \mathbb{R}e_\pm(u,v)$ に対する $\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$ の分解を考え、その係数に相当する成分を時空二変数函数として $\varphi_\pm$ と表そう：

$$
\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\sum_\pm \varphi_\pm e_\pm(u,v)=\begin{pmatrix} -(\varphi_+-\varphi_-)-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv(\varphi_++\varphi_-) \\ \varphi_++\varphi_- \end{pmatrix}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \varphi=-(\varphi_+-\varphi_-)-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv(\varphi_++\varphi_-) \\ \psi=\varphi_++\varphi_- \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \varphi_+-\varphi_-=-\varphi-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv\psi \\ \varphi_++\varphi_-=\psi \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \varphi_+=-\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv\right)\psi \\ \varphi_-=\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv\right)\psi \end{cases}
\end{aligned}
$$

なる関係が従う。$\delta_\pm$ を

$$
\delta_\pm := 1\pm\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv
$$

と定めると、この同値性は

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \varphi=-\delta_-\varphi_++\delta_+\varphi_- \\ \psi=\varphi_++\varphi_- \end{cases} \\
\iff &\varphi_\pm=\mp\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\delta_\mp\psi
\end{aligned}
$$

と表される。このとき

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t+\lambda_\pm\partial)\varphi_\pm\\
=&\ \frac{1}{2}(\partial_t+\lambda_\pm\partial)(\mp\varphi+\delta_\mp\psi)\\
=&\ \mp\frac{1}{2}\partial_t\varphi+\frac{1}{2}\delta_\mp\partial_t\psi\mp\frac{3}{4}\partial_t\left((1+v^2)^{-1/4}uv\right)\psi\\
&-\frac{1}{2}\lambda_+\left(\partial\varphi\mp\delta_\mp\partial\psi+\frac{3}{2}\partial\left((1+v^2)^{-1/4}uv\right)\psi\right)\\
=&\ \mp\frac{1}{2}\Bigg(-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\varphi+\left((1+v^2)^{-3/4}-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\right)\partial\psi\\
&\qquad+\gamma_1^1\varphi+\gamma_2^1\psi+\gamma_3^1\varphi^2+\gamma_4^1\psi^2\Bigg)\\
&+\frac{1}{2}\delta_\mp\left((1+v^2)^{-3/4}\partial\varphi+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv\partial\psi+\gamma_1^2\varphi+\gamma_2^2\psi+\gamma_3^2\varphi\psi\right)\\
&-\frac{3}{4}\left(\pm\partial_t\left((1+v^2)^{-1/4}uv\right)+(1+v^2)^{-3/4}\partial\left((1+v^2)^{-1/4}uv\right)\right)\psi\\
&-\lambda_+\partial\psi\pm\frac{1}{2}\lambda_+\delta_\mp\partial\psi\\
=&\ \frac{1}{2}\left(\pm\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}uv+\delta_\mp(1+v^2)^{-3/4}-\lambda_+\right)\partial\varphi\\
&\mp\frac{1}{2}\left((1+v^2)^{-3/4}-\frac{9}{4}(1+v^2)^{-5/4}u^2v^2\mp\frac{3}{2}\delta_\mp(1+v^2)^{-1}uv-\lambda_+\delta_\mp\right)\partial\psi\\
&+\frac{1}{2}(\mp\gamma_1^1+\delta_\mp\gamma_1^2)\varphi\\
&+\frac{1}{2}\left(\mp\gamma_2^1+\delta_\mp\gamma_2^2\mp\frac{3}{2}\partial_t\left((1+v^2)^{-1/4}uv\right)-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-3/4}\partial\left(\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1/4}uv\right)\right)\psi\\
&\mp\frac{1}{2}\gamma_3^1\varphi^2\mp\frac{1}{2}\gamma_4^1\psi^2+\frac{1}{2}\delta_\mp\gamma_3^2\varphi\psi\\
=&\ \frac{1}{2}(\mp\gamma_1^1+\delta_\mp\gamma_1^2)\varphi\\
&+\frac{1}{2}\Bigg(\mp\gamma_2^1+\delta_\mp\gamma_2^2\mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-5/4}(2+v^2)u\partial u\mp\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v\pm\frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}uv^2\varphi\\
&\qquad\mp\frac{9}{4}(1+v^2)^{-9/4}(1-v^2)u^2v\psi-\frac{3}{4}(1+v^2)^{-2}(2+v^2)u\partial v-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}v\partial u\Bigg)\psi\\
&\mp\frac{1}{2}\gamma_3^1\varphi^2\mp\frac{1}{2}\gamma_4^1\psi^2+\frac{1}{2}\delta_\mp\gamma_3^2\varphi\psi\\
=&\ \frac{1}{2}(\mp\gamma_1^1+\delta_\mp\gamma_1^2)\varphi\\
&+\frac{1}{2}\Bigg(\mp\gamma_2^1+\delta_\mp\gamma_2^2\mp\frac{3}{4}(1+v^2)^{-5/4}(2+v^2)u\partial u\mp\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v-\frac{3}{4}(1+v^2)^{-2}(2+v^2)u\partial v\\
&\qquad-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-1}v\partial u\Bigg)\psi\\
&\mp\frac{1}{2}\gamma_3^1\varphi^2\mp\frac{1}{2}\left(\gamma_4^1+\frac{9}{4}(1+v^2)^{-9/4}(1-v^2)u^2v\right)\psi^2+\frac{1}{2}\left(\delta_\mp\gamma_3^2+\frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}uv^2\right)\varphi\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\mp\gamma_1^1 + \delta_\mp\gamma_1^2)(-\delta_-\varphi_+ + \delta_+\varphi_-) \\
&\quad + \biggl(\mp \frac{1}{2}\gamma_1^2 + \frac{1}{2}\delta_\mp\gamma_2^2 \mp \frac{3}{8}(1+v^2)^{-5/4}(2+v^2)u\partial u \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v \\
&\qquad\qquad - \frac{3}{8}(1+v^2)^{-2}(2+v^2)u\partial v - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\partial u \biggr)(\varphi_+ + \varphi_-) \\
&\quad \mp \frac{1}{2}\gamma_3^1(-\delta_-\varphi_+ + \delta_+\varphi_-)^2 \mp \frac{1}{2}\left(\gamma_4^1 + \frac{9}{4}(1+v^2)^{-9/4}(1-v^2)u^2v\right)(\varphi_+ + \varphi_-)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\delta_\mp\gamma_3^2 \pm \frac{9}{4}(1+v^2)^{-2}uv^2\right)(-\delta_-\varphi_+ + \delta_+\varphi_-)(\varphi_+ + \varphi_-)
\end{aligned}
$$

を得る。これは次の形に纏められる：

$$
(\partial_t + \lambda_\pm\partial)\varphi_\pm = \gamma_1^\pm\varphi_+ + \gamma_2^\pm\varphi_- + \gamma_{11}^\pm\varphi_+^2 + \gamma_{22}^\pm\varphi_-^2 + \gamma_{12}^\pm\varphi_+\varphi_-
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^\pm &= \pm\frac{1}{2}(\gamma_1^1 \pm \gamma_1^2\delta_\mp)\delta_- \mp \frac{1}{2}(\gamma_2^1 \mp \gamma_2^2\delta_\mp) \mp \frac{3}{8}(1+v^2)^{-5/4}(2+v^2)u\partial u \\
&\quad \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v - \frac{3}{8}(1+v^2)^{-2}(2+v^2)u\partial v - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\partial u, \\
\gamma_2^\pm &= \mp\frac{1}{2}(\gamma_1^1 \pm \gamma_1^2\delta_\mp)\delta_+ \mp \frac{1}{2}(\gamma_2^1 \mp \gamma_2^2\delta_\mp) \mp \frac{3}{8}(1+v^2)^{-5/4}(2+v^2)u\partial u \\
&\quad \mp \frac{3}{4}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v - \frac{3}{8}(1+v^2)^{-2}(2+v^2)u\partial v - \frac{3}{4}(1+v^2)^{-1}v\partial u, \\
\gamma_{11}^\pm &= \mp\frac{1}{2}\gamma_3^1\delta_-^2 \pm \frac{1}{2}\gamma_4^1 - \frac{1}{2}\gamma_3^2\delta_\mp\delta_- \mp \frac{9}{8}(1+v^2)^{-9/4}(1-v^2)u^2v \mp \frac{9}{8}(1+v^2)^{-2}uv^2\delta_-, \\
\gamma_{22}^\pm &= \mp\frac{1}{2}\gamma_3^1\delta_+^2 \mp \frac{1}{2}\gamma_4^1 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\delta_\mp\delta_+ \mp \frac{9}{8}(1+v^2)^{-9/4}(1-v^2)u^2v \pm \frac{9}{8}(1+v^2)^{-2}uv^2\delta_+, \\
\gamma_{12}^\pm &= \pm\gamma_3^1\delta_+\delta_- \mp \gamma_4^1 + \frac{1}{2}\gamma_3^2\delta_\mp(\delta_+ - \delta_-) \mp \frac{9}{8}(1+v^2)^{-9/4}(1-v^2)u^2v \\
&\quad \pm \frac{9}{8}(1+v^2)^{-2}uv^2(\delta_+ - \delta_-)
\end{aligned}
$$

とする。

さて $s \in \mathbb{R}$ を $0 < s < T_+^*$ なるよう任意に取り $a,\ b \in \mathbb{R}$ を $b - a > 2s$ なるように取る。$\xi_\pm : [0,s] \ni t \mapsto \xi_\pm(t) \in \mathbb{R}$ を夫々

$$
\begin{cases}
\dot{\xi}_+(t) = -(1 + v(t,\xi_+(t))^2)^{-3/4},\ t \in [0,s] \\
\xi_+(0) = b
\end{cases}
$$

及び

$$
\begin{cases}
\dot{\xi}_-(t) = (1 + v(t,\xi_-(t))^2)^{-3/4},\ t \in [0,s] \\
\xi_-(0) = a
\end{cases}
$$

の解とする。任意の $t \in [0,s]$ に対し $\dot{\xi}_+(t) \geq -1$ 及び $\dot{\xi}_-(t) \leq 1$ となる事から

$$
\begin{aligned}
\xi_+(t) &\geq \xi_+(0) - t = b - t \\
\xi_-(t) &\leq \xi_-(0) + t = a + t
\end{aligned}
$$

なる評価が従い、仮定 $b-a>2s$ より任意の $t\in[0,s]$ に対し

$$\xi_-(t)\le a+t<b-t\le\xi_+(t)$$

が成立つ。区分的に C^1 級の境界を持つ開集合 D_s を

$$D_s:=\{(t,x)\in(0,s)\times\mathbb{R};\ \xi_-(t)<x<\xi_+(t)\}$$

で定義する。一形式 $\varphi_\pm(dx-\lambda_\pm dt)$ の外微分を計算しよう：

$$\begin{aligned}
&d(\varphi_\pm(dx-\lambda_\pm dt))\\
&=(\partial_t\varphi_\pm dt+\partial\varphi_\pm dx)\wedge(dx-\lambda_\pm dt)-\varphi_\pm d\lambda_\pm\wedge dt\\
&=(\partial_t\varphi_\pm+\lambda_\pm\partial\varphi_\pm)dt\wedge dx-\varphi_\pm(\partial_t\lambda_\pm dt+\partial\lambda_\pm dx)\wedge dt\\
&=(\partial_t\varphi_\pm+\lambda_\pm\partial\varphi_\pm+\varphi_\pm\partial\lambda_\pm)\,dt\wedge dx\\
&=\psi_\pm\ dt\wedge dx,
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\psi_+&=\left(\gamma_1^+-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v\right)\varphi_++\gamma_2^+\varphi_-+\gamma_{11}^+\varphi_+^2+\gamma_{22}^+\varphi_-^2+\gamma_{12}^+\varphi_+\varphi_-,\\
\psi_-&=\gamma_1^-\varphi_++\left(\gamma_2^-+\frac{3}{2}\left(1+v^2\right)^{-7/4}v\partial v\right)\varphi_-+\gamma_{11}^-\varphi_+^2+\gamma_{22}^-\varphi_-^2+\gamma_{12}^-\varphi_+\varphi_-
\end{aligned}$$

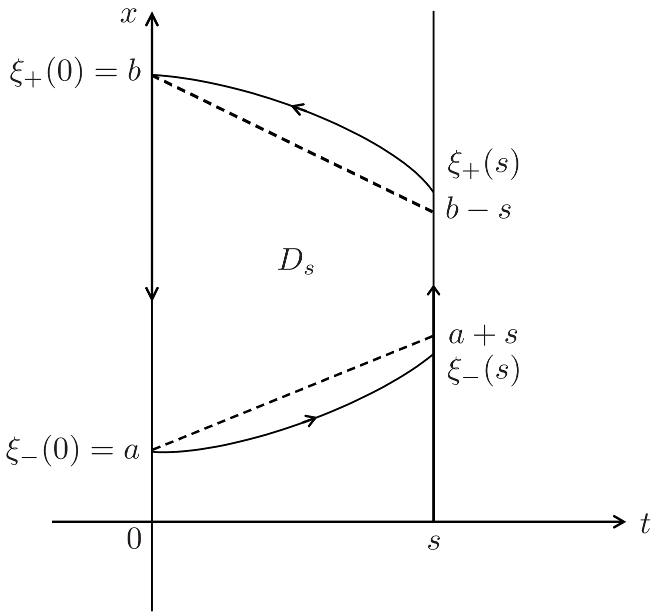
とした。$\varepsilon>0$ を任意に取り $\varphi_\pm(dx-\lambda_\pm dt)$ の代りに $(|\varphi_\pm|^2+\varepsilon^2)^{1/2}(dx-\lambda_\pm dt)$ の外微分を計算すると

$$\begin{aligned}
&d\left((|\varphi_\pm|^2+\varepsilon^2)^{1/2}(dx-\lambda_\pm dt)\right)\\
&=\left((|\varphi_\pm|^2+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_\pm(\partial_t\varphi_\pm+\lambda_\pm\partial\varphi)+(|\varphi_\pm|^2+\varepsilon^2)^{1/2}\partial\lambda_\pm\right)dt\wedge dx\\
&=\psi_\pm^\varepsilon\ dt\wedge dx,
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\psi_+^\varepsilon=&(|\varphi_+|^2+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_+(\gamma_1^+\varphi_++\gamma_2^+\varphi_-+\gamma_{11}^+\varphi_+^2+\gamma_{22}^+\varphi_-^2+\gamma_{12}^+\varphi_+\varphi_-)\\
&-\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v(|\varphi_+|^2+\varepsilon^2)^{1/2},\\
\psi_-^\varepsilon=&(|\varphi_-|^2+\varepsilon^2)^{-1/2}\varphi_-(\gamma_1^-\varphi_++\gamma_2^-\varphi_-+\gamma_{11}^-\varphi_+^2+\gamma_{22}^-\varphi_-^2+\gamma_{12}^-\varphi_+\varphi_-)\\
&+\frac{3}{2}(1+v^2)^{-7/4}v\partial v(|\varphi_-|^2+\varepsilon^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

とした。



さて $0 < s_0 < T_+^*$ なる s_0 を任意に取り $s \in (0, s_0)$ に対し

$$M(s) := \sum_{\pm} M^{\pm}(s),\ M_\varepsilon(s) := \sum_{\pm} M_\varepsilon^{\pm}(s),$$

ここに

$$\begin{aligned} M^{\pm}(s) &:= \int_{D_s} |\varphi_\pm| \\ &= \int_0^s \left(\int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} |\varphi_\pm(t,x)| dx \right) dt, \\ M_\varepsilon^{\pm}(s) &:= \int_{D_s} \left(|\varphi_\pm|^2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} \\ &= \int_0^s \left(\int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_\pm(t,x)|^2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} dx \right) dt \end{aligned}$$

と置く。$(8.4)_0$ より $\varphi(0) = \psi(0)$ であるから $\varphi_\pm(0) = 0$ となり

$$\int_{\xi_-(0)}^{\xi_+(0)} \left(|\varphi_\pm(0)|^2 + \varepsilon^2 \right)^{1/2} = \int_a^b \varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

であり任意の $t \in (0, s)$ に対し

$$\begin{gathered} \dot{\xi}_\pm(t) - \lambda_\mp(t,\ \xi_\pm(t)) = 0, \\ \mp \left(\dot{\xi}_\pm(t) - \lambda_\pm(t,\ \xi_\pm(t)) \right) = 2\lambda_+(t,\ \xi_\pm(t)) \geq 0 \end{gathered}$$

である事に注意し $M_\varepsilon^{\pm} : (0, s_0) \ni s \mapsto M_\varepsilon^{\pm}(s) \in \mathbb{R}$ の微分を評価する：

$$
\begin{aligned}
0 \le \dot{M}_\varepsilon^+(s) &= \int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_+(s,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&= (b-a)\varepsilon - \int_{\xi_-(0)}^{\xi_+(0)} \left(|\varphi_+(0,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad + \int_0^s \left(|\varphi_+(t,\xi_-(t))|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} \left(\dot{\xi}_-(t)-\lambda_+(t,\xi_-(t))\right) dt \\
&\quad + \int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_+(s,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\le (b-a)\varepsilon - \int_{\xi_-(0)}^{\xi_+(0)} \left(|\varphi_+(0,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad + \int_0^s \left(|\varphi_+(t,\xi_-(t))|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} \left(\dot{\xi}_-(t)-\lambda_+(t,\xi_-(t))\right) dt \\
&\quad + \int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_+(s,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad - \int_0^s \left(|\varphi_+(t,\xi_+(t))|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} \left(\dot{\xi}_+(t)-\lambda_+(t,\xi_+(t))\right) dt \\
&= (b-a)\varepsilon + \int_{\partial D_s} (|\varphi_+|^2+\varepsilon^2)^{1/2}(dx-\lambda_+ dt) \\
&= (b-a)\varepsilon + \int_{D_s} d\left((|\varphi_+|^2+\varepsilon^2)^{1/2}(dx-\lambda_+ dt)\right) \\
&= (b-a)\varepsilon + \int_{D_s} \psi_+^\varepsilon \le (b-a)\varepsilon + \int_{D_s} |\psi_+^\varepsilon|
\end{aligned}
$$

ここでグリーン・ストークスの定理を用いた。同様に

$$
\begin{aligned}
0 \le \dot{M}_\varepsilon^-(s) &= \int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_-(s,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&= (b-a)\varepsilon - \int_{\xi_-(0)}^{\xi_+(0)} \left(|\varphi_-(0,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad + \int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_-(s,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad - \int_0^s \left(|\varphi_-(t,\xi_+(t))|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} \left(\dot{\xi}_+(t)-\lambda_-(t,\xi_+(t))\right) dt \\
&\le (b-a)\varepsilon - \int_{\xi_-(0)}^{\xi_+(0)} \left(|\varphi_-(0,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad + \int_0^s \left(|\varphi_-(t,\xi_-(t))|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} \left(\dot{\xi}_-(t)-\lambda_-(t,\xi_-(t))\right) dt \\
&\quad + \int_{\xi_-(s)}^{\xi_+(s)} \left(|\varphi_-(s,x)|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} dx \\
&\quad - \int_0^s \left(|\varphi_-(t,\xi_+(t))|^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} \left(\dot{\xi}_+(t)-\lambda_-(t,\xi_+(t))\right) dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b-a)\varepsilon + \int_{\partial D_s} (|\varphi_-|^2+\varepsilon^2)^{1/2}(dx-\lambda_- dt) \\
&= (b-a)\varepsilon + \int_{D_s} d\left((|\varphi_-|^2+\varepsilon^2)^{1/2}(dx-\lambda_- dt)\right) \\
&= (b-a)\varepsilon + \int_{D_s} \psi_-^\varepsilon \le (b-a)\varepsilon + \int_{D_s} |\psi_-^\varepsilon|
\end{aligned}
$$

が従う。これら $M_\varepsilon^\pm$ の不等式を $[0,s]$ 上積分し

$$
0 \le M_\varepsilon^\pm(s) \le (b-a)\varepsilon s + \int_0^s \left(\int_{D_\sigma} \psi_\pm^\varepsilon\right) d\sigma
$$

更に $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$
0 \le M^\pm(s) \le \int_0^s \left(\int_{D_\sigma} \psi_\pm\right) d\sigma
$$

を得る。さて $\psi_\pm$ は

$$
|\psi_\pm| \le C_{s_0}|\varphi_\pm|
$$

と評価される。ここに C_{s_0} は

$$
\sum_\pm (\|v_\pm; L^\infty\left(0,s_0; W_\infty^1\right)\| \vee \|w_\pm; L^\infty(0,s_0;W_\infty^1)\right)
$$

にのみ依存する正の定数である。これより、不等式

$$
M^\pm(s) \le C_{s_0}\int_0^s M^\pm(\sigma)d\sigma
$$

が任意の $s \in (0,s_0)$ に対して成立つ。グロンウォールの補題より $M^\pm(s)=0$ を得る。
s_0 及び $b-a>2s_0$ なる $a,\ b\in\mathbb{R}$ は任意だったので $[0,T_+^*]$ 上

$$
M^\pm = 0 \Leftrightarrow \varphi_\pm \Leftrightarrow \varphi=\psi=0
$$

を得る。

得られた結果を (HS) の初期値問題に対する定理として纏めて置こう。

定理６（時間極大 $\boldsymbol{W_\infty^2}$ 解の存在と一意性）

任意の $(u_0,v_0)\in(C^2\cap W_\infty^2)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ に対し (HS) は初期条件

$$
(u(0),v(0))=(u_0,v_0)
$$

を満たす極大解

$$
(u,v)\in C\left((T_-^*,T_+^*);(C^2\cap W_\infty^2)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)\cap C^1\left((T_-^*,T_+^*);(C^1\cap W_\infty^1)(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)\right)
$$

を唯一つ持つ。ここに (T_-^*,T_+^*) は初期時刻 0 を含む開区間である。更に

- $T_+^* < +\infty$ ならば

$$\lim_{t\uparrow T_+^*} \sum_{\pm} \left(\left\| v(t) \pm \left(1+v(t)^2\right)^{3/4} u(t); W_\infty^1 \right\| \vee \left\| \partial v(t) \pm \left(1+v(t)^2\right)^{3/4} \partial u(t); W_\infty^1 \right\| \right) = +\infty$$

- $T_-^* > -\infty$ ならば

$$\lim_{t\downarrow T_-^*} \sum_{\pm} \left(\left\| v(t) \pm \left(1+v(t)^2\right)^{3/4} u(t); W_\infty^1 \right\| \vee \left\| \partial v(t) \pm \left(1+v(t)^2\right)^{3/4} \partial u(t); W_\infty^1 \right\| \right) = +\infty$$

参考文献：

L. Hörmander, "Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations," Springer, 1997

T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations, in "Schrödinger Operators (Eds. A. Jensen and H. Holden), " 218-263, Lecture Notes in Phys., 345, Springer, 1989.

小澤 徹, 一次元縦波模型としての波動方程式, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/1d_longitudinal_wave.pdf