

# アルキメデスの原理

平成 24 年 4 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

アルキメデスの原理と典型的な数列の極限との関係を纏めて置こう。「数の構成」の所で次の定理に就いて述べた：

定理 1 (順序体のアルキメデス性) 順序体  $K$  に対し次は同値である：

- (1) 任意の  $k \in K_{>0}$  に対し  $N \in \mathbb{N}$  が存在し  $N > k$  を満たす。
- (2) 任意の  $m, n \in K_{>0}$  に対し  $N \in \mathbb{N}$  が存在し  $Nm > n$  を満たす。
- (3) 点列  $\{1/n\}$  は  $0 \in K$  に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$
- (4)  $\mathbb{Q}$  は  $K$  に於いて稠密である。

ここでは  $K$  を実数体  $\mathbb{R}$  として、加減乗除及び冪根に依る代数的演算の枠組で、初等的な不等式のみを用いて、典型的な数列の極限によりアルキメデスの原理の特徴付けを与えよう。但し、加法・乗法と極限との可換性および極限の順序保存性は自由に用いるものとする。

定理 2 次の命題は同値である。

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$
- (2)  $0 < r < 1$  なる任意の実数  $r$  に対し  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$
- (3)  $a > 0$  なる任意の実数  $a$  に対し  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$
- (4)  $0 < r < 1$  なる任意の実数  $r$  に対し  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(証明) 証明には次の不等式を用いる：

$n \geq 1$  なる整数  $n$  及び  $x > -1$  なる実数  $x$  に対し

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (* )_n$$

念の為に証明を与えよう。 $n$ に関する帰納法を用いる。 $n = 1$ の場合は $(*)_1$ は等式として成立つ。 $n \geq 1$ として $(*)_n$ が任意の $x > -1$ に対して成立つと仮定する。このとき $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ より $(*)_{n+1}$ を得る。

以上で帰納法が完結する。

(1)  $\Rightarrow$  (2) :  $x = 1/r - 1 > 0$  に対し $(*)_n$ を用いて

$$\begin{aligned} 0 \leq r^n &= \frac{1}{(1/r)^n} = \frac{1}{(1 + (1/r - 1))^n} \\ &\leq \frac{1}{1 + (1/r - 1)n} \leq \frac{r}{1 - rn} \end{aligned}$$

を得るので(1)より(2)が従う。

(2)  $\Rightarrow$  (1) :  $n \geq 1$ なる任意の整数 $n$ に対し $m \geq 1$ なる整数が唯一つ存在して $2^m > n \geq 2^{m-1}$ が成立つ。この関係により、 $n \rightarrow \infty$ なるとき $m \rightarrow \infty$ となる事と不等式 $1/n \leq 2(1/2)^m$ が従う。 $r = 1/2$ に対して(2)を用いて(1)を得る。

(1)  $\Rightarrow$  (3) :  $a \geq 1$ ならば $a^{1/n} \geq 1$ であり $x = a^{1/n} - 1 \geq 0$ に対し $(*)_n$ を用いて

$$\begin{aligned} 0 \leq a^{1/n} - 1 &= \frac{1}{n} \cdot n(a^{1/n} - 1) \\ &\leq \frac{1}{n}((a^{1/n} - 1) + 1)^n = \frac{a}{n} \end{aligned}$$

を得るので(1)より(3)が従う。 $0 < a \leq 1$ ならば $0 < a^{1/n} \leq 1$ であり $x = (1/a)^{1/n} - 1 \geq 0$ に対し $(*)_n$ を用いて

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - a^{1/n} &= ((1/a)^{1/n} - 1)a^{1/n} \\ &\leq (1/a)^{1/n} - 1 = \frac{1}{n} \cdot n((1/a)^{1/n} - 1) \\ &\leq \frac{1}{n}(((1/a)^{1/n} - 1) + 1)^n = \frac{1}{an} \end{aligned}$$

を得るので(1)より(3)が従う。

(3)  $\Rightarrow$  (1) : 任意の $n \geq 2$ に対し不等式

$$1/n \leq 1 - (1/4)^{1/n}$$

を示せば充分である。これは

$$1/4 \leq (1 - 1/n)^n$$

と同値であり $n = 2$ の場合は等式として成立つので $a_n \equiv (1 - 1/n)^n$ の成す数列 $\{a_n; n \geq 2\}$ が単調増加である事を示せば充分である。これは $x = 1/(n^2 - 1)$ に対し $(*)_n$ を用いて得

られる不等式

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right)^n \\ &= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \\ &\geq \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \\ &= \frac{n(n^2+n-1)}{(n+1)(n^2-1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1\end{aligned}$$

より従う。

(2)  $\Rightarrow$  (4) : 等式  $\sum_{j=0}^n r^j = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$  より従う。

(4)  $\Rightarrow$  (2) : 等式  $r^n = \sum_{j=0}^n r^j - \sum_{j=0}^{n-1} r^j$  より従う。

参考文献 :

小澤徹, 相加・相乗平均の不等式とその応用 (平成 19 年 10 月)

小澤徹, 数の構成 (平成 23 年 4 月)