アスコリ・アルツェラの定理

平成 24 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

函数空間（一般的には写像空間）の部分集合の相対コンパクト性の特徴付けを与えるアスコリ（Giulio Ascoli, 1843-1896）・アルツェラ（Cesare Arzelà, 1847-1912）の定理は、コンパクト性の議論に依る存在定理の基礎を成している。ここではバナッハ空間値の写像族に対するアスコリ・アルツェラの定理を纏めて置こう。

1. 写像族の等有界性と等連続性

定義　位相空間 X からノルム空間 Y への写像の族 $\mathscr{F}$ は

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\sup_{x\in X}||f(x)||_Y < \infty$$

なるとき**等有界**（同等有界、同程度有界、一様有界）equibounded, uniformly bounded と謂う。

定義　位相空間 X からノルム空間 Y への写像の族 $\mathscr{F}$ は一点 $x_0 \in X$ に於いて**等連続**（同等連続、同程度連続）equicontinuous at x_0 であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し x_0 の近傍 V が存在し

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\sup_{x\in V}||f(x) - f(x_0)||_Y < \varepsilon$$

が成立つ事を謂う。

定義　距離空間 (X, d) からノルム空間 Y への写像の族 $\mathscr{F}$ が X 上**等一様連続**（同等一様連続、同程度一様連続）であるとは

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{f\in\mathscr{F}}\omega_\delta(f) = 0$$

が成立つ事を謂う。ここに

$$\omega_\delta(f) = \sup\{||f(x) - f(y)||_Y; x, y \in X,\ d(x, y) < \delta\}$$

は f の δ の連続率 δ-modulus of continuity of f とする。

定理１　コンパクト距離空間 (X, d) からノルム空間 Y への写像の族 $\mathscr{F}$ に対して次は同値である。

(1) $\mathscr{F}$ は X 上等一様連続である。
(2) $\mathscr{F}$ は X の各点で等連続である。

(証明) (2)$\Rightarrow$(1) を示せば充分である。任意の $\varepsilon > 0$ 及び任意の $x \in X$ に対し $\delta_\varepsilon(x) > 0$ が存在し、不等式

$$\sup\{||f(y) - f(x)||_Y;\ f \in \mathscr{F},\ d(x,y) < \delta_\varepsilon(x)\} < \varepsilon/2$$

が成立つ。$\{B(x; \delta_\varepsilon(x)/2); x \in X\}$ は X の開被覆であるから X の有限部分集合 $F \subset X$ が在って $\{B(x; \delta_\varepsilon(x)/2);\ x \in F\}$ は X を覆う。このとき $\delta \equiv \min\{\delta_\varepsilon(x)/2;\ x \in F\} > 0$ が定まる。さて $d(x,y) < \delta$ なる任意の $x, y \in X$ を取る。$X = \bigcup\{B(x; \delta_\varepsilon(x)/2); x \in F\}$ 故 $z \in F$ が在って $x \in B(z; \delta_\varepsilon(z)/2)$ となる。このとき $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \delta + d(x,z) < \delta + \delta_\varepsilon(z)/2 \leq \delta_\varepsilon(z)$ より

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)||_Y &\leq ||f(x) - f(z)||_Y + ||f(z) - f(y)||_Y \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

が従う。これは（1）を意味する。

2. 距離空間に於けるコンパクト性

この節ではコンパクト性に就いて簡単に纏めて置こう。

定義 位相空間 X の部分集合 K が X で**コンパクト** compact であるとは K の任意の開被覆が有限部分被覆を持つ事を謂う。即ち X の開集合の族 $\{O_i; i \in I\}$ が $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ を満たすならば有限部分集合 $J \subset I$ を取って $K \subset \bigcup_{i \in J} O_i$ と出来る事を謂う。

註 コンパクト集合の有限個の合併はコンパクトである。コンパクト集合と閉集合との共通部分集合はコンパクトである。ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である。

定義 位相空間 X の部分集合 K が X で**点列コンパクト** sequentially compact であるとは K の任意の点列は K の或る点に収束する部分列を持つ事を謂う。即ち K の任意の点列 $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ に対し狭義単調増加 $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 及び $a \in K$ を取って $x_{\rho(n)} \to a (n \to \infty)$ と出来る事を謂う。

定義 距離空間 X の部分集合 K が**全有界** totally bounded であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の $\{x_j; j \in J\} \subset K$ を取って $K \subset \bigcup_{j \in J} B_X(x_j; \varepsilon)$ と出来る事を謂う。ここに $B_X(x; \varepsilon) = \{y \in X; d(x,y) < \varepsilon\}$ とする。

次の定理は良く知られている。

定理２ 距離空間 (X, d) の部分集合 K に対し次は同値である。
(1) K はコンパクトである。
(2) K は点列コンパクトである。
(3) K は全有界かつ完備である。

系　完備距離空間の部分集合 K に対し次は同値である。
(1) K はコンパクトである。
(2) K は点列コンパクトである。
(3) K は全有界である。

定義　位相空間 X の部分集合 K が**相対コンパクト** relatively compact であるとは、その閉包 $\overline{K}$ がコンパクトである事を謂う。

定義　位相空間 X の部分集合 K が**相対点列コンパクト** relatively sequentially compact であるとは K の任意の点列は X の或る点に収束する部分列を持つ事を謂う。

定理 2 と同様に次が成立つ。

定理３　距離空間 (X,d) の部分集合 K に対し次は同値である。
(1) K は相対コンパクトである。
(2) K は相対点列コンパクトである。
(3) $\overline{K}$ は点列コンパクトである。
(4) K は全有界であり $\overline{K}$ は完備である。

系　完備距離空間の部分集合 K に対し次は同値である。
(1) K は相対コンパクトである。
(2) K は相対点列コンパクトである。
(3) $\overline{K}$ は点列コンパクトである。
(4) K は全有界である。

3. アスコリ・アルツェラの定理

この節では (X,d) をコンパクト距離空間とし Y をバナッハ空間とする。X から Y への連続写像全体の成すベクトル空間 $C(X;Y)$ は

$$||f||_\infty = \sup\{||f(x)||_Y; x \in X\}$$

で定義されるノルムでバナッハ空間となる。この空間 $C(X;Y)$ の相対コンパクト部分集合の特徴付けを与えるのがアスコリ・アルツェラの定理である。

定理４　バナッハ空間 $C(X;Y)$ の部分集合 $\mathscr{F}$ に対し次は同値である。
(1) $\mathscr{F}$ は相対コンパクトである。
(2) $\mathscr{F}$ は相対点列コンパクトである。
(3) $\mathscr{F}$ は全有界である。
(4) $\mathscr{F}$ は X 上等一様連続であり任意の $x \in X$ に対し

$$\mathscr{F}(x) \equiv \{f(x) \in Y; f \in \mathscr{F}\}$$

は Y で相対コンパクトである。
(5) 任意の $x \in X$ に対し $\mathscr{F}$ は x で等連続であり $\mathscr{F}(x)$ は Y で相対コンパクトである。

(証明)　$C(X;Y)$ は完備距離空間であるから定理３の系より (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) が従い、定理１より (4) $\Leftrightarrow$ (5) が従う。故に (3) $\Leftrightarrow$ (4) を示せば充分である。

(3) $\Rightarrow$ (4)　$\mathscr{F}$ は全有界であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{F}$ が存在し $\mathscr{F} \subset \bigcup_{1 \le j \le n} B(f_j; \varepsilon/3)$ と出来る。ここに

$$B(f_j; \varepsilon/3) = \{f \in C(X;Y); ||f - f_j||_\infty < \varepsilon/3\}$$

とする。任意に $x \in X$ を取る。任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し j が在って $||f - f_j||_\infty < \varepsilon/3$ となる。従って $||f(x) - f_j(x)||_Y < \varepsilon/3$ 即ち

$$f(x) \in B_Y(f_j(x); \varepsilon/3) \equiv \{y \in Y; ||y - f_j(x)||_Y < \varepsilon/3\}$$

が従う。以上より

$$\mathscr{F}(x) = \{f(x) \in Y; f \in \mathscr{F}\} \subset \bigcup_{1 \le j \le n} B_Y(f_j(x); \varepsilon/3)$$

が従う。これは $\mathscr{F}(x)$ は完備距離空間 Y で全有界即ち相対コンパクトである事を意味する。次に $\varepsilon > 0, f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{F}$ を上と同様に取る。各 f_j はコンパクト距離空間上連続であるから一様連続である。従って $\delta_j > 0$ が存在し $d(x,y) < \delta_j$ なる任意の $x, y \in X$ に対し $||f_j(x) - f_j(y)||_Y < \varepsilon/3$ が成立つ。そこで $\delta = \min_{1 \le j \le n} \delta_j$ と置く。任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し $f \in B(f_j; \varepsilon/3)$ なる j を取る。このとき $d(x,y) < \delta$ なる任意の $x, y \in X$ に対し

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)||_Y &\le ||f(x) - f_j(x)||_Y + ||f_j(x) - f_j(y)||_Y + ||f_j(y) - f(y)||_Y \\ &\le 2 \sup_{z \in X} ||f(z) - f_j(z)||_Y + ||f_j(x) - f_j(y)||_Y < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立つ。これは $\mathscr{F}$ が等連続である事を意味する。

(4) $\Rightarrow$ (3)：任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が在って $\sup_{f \in \mathscr{F}} \omega_\delta(f) < \varepsilon/4$ が成立つ。$x \in X$ に対し $B_X(x;\delta) = \{y \in X; d(x,y) < \delta\}$ と置くと $\{B_X(x;\delta); x \in X\}$ は X の開被覆故有限部分被覆 $\{B_X(x_i;\delta); 1 \le i \le m\}$ を持つ。仮定より $K \equiv \bigcup_{1 \le i \le m} \mathscr{F}(x_i)$ は相対コンパクト故有限個の $\{y_j; 1 \le j \le n\} \subset Y$ が在って $K \subset \bigcup_{1 \le j \le n} B_Y(y_j; \varepsilon/4)$ が成立つ。さて任意の $f \in \mathscr{F}$ と任意の $i \in \{1, \cdots, m\}$ に対し $f(x_i) \in K$ 故 $f(x_i) \in B_Y(y_j; \varepsilon/4)$ なる j を一つ取る事が出来る。こうして任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し $\sigma : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, n\}$ が存在し

$$f(x_i) \in B_Y(y_{\sigma(i)}; \varepsilon/4) \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}$$

とする事が出来る。$\{1, \cdots, m\}$ から $\{1, \cdots, n\}$ への写像全体の成す（有限）集合を $\mathfrak{S}_{m,n}$ と表し $\sigma \in \mathfrak{S}_{m,n}$ に対し

$$\mathscr{F}_\sigma = \{f \in \mathscr{F}; f(x_i) \in B_Y(y_{\sigma(i)}; \varepsilon/4) \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}\}$$

と定めると

$$\mathscr{F} = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m,n}} \mathscr{F}_\sigma$$

が成立つ。そこで $\mathrm{diam}\mathscr{F}_\sigma < \varepsilon$ である事を示せば充分である。
$f, g \in \mathscr{F}_\sigma$ と $x \in X$ を任意に与える。$x \in B_X(x_i; \delta)$ なる i を一つ取れば

$$
\begin{aligned}
&||f(x) - g(x)||_Y \\
\le\ & ||f(x) - f(x_j)||_Y + ||f(x_i) - y_{\sigma(i)}||_Y +\ ||y_{\sigma(i)} - g(x_i)||_Y + ||g(x_i) - g(x)||_Y \\
<\ & \omega_\delta(f) + \varepsilon/2 + \omega_\delta(g) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\mathrm{diam}\ \mathscr{F}_\sigma = \sup_{f,g \in \mathscr{F}_\sigma} \sup_{x \in X} ||f(x) - g(x)||_Y < \varepsilon
$$

が従う。これが示すべき事であった。

4. フレッシェ・コルモゴロフの定理

この節では、バナッハ空間 X に値を取る開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の p 乗可積分函数全体の成すバナッハ空間 $L^p(\Omega; X)$ に於ける相対コンパクト集合の特徴付けを与えよう。函数 $f : \Omega \to X$ の $h \in \mathbb{R}^n$ に依る並進 $\tau_h f$ が集合 $\Omega{+}h \equiv \{x{+}h \in \mathbb{R}^n; x \in \Omega\}$ 上 $(\tau_h f)(x) = f(x{-}h),\ x \in \Omega{+}h$ と置いて $\tau_h f : \Omega + h \to X$ として定義される。開集合 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$$
\Omega_0 \Subset \Omega \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \Omega_0 \text{の } \mathbb{R}^n \text{に於ける閉包} \overline{\Omega}_0 \text{はコンパクトで且つ} \overline{\Omega_0} \subset \Omega
$$

と定義する。

定理 5　$1 \le p < \infty$ とする。バナッハ空間 $L^p(\Omega; X)$ の部分集合 $\mathscr{F}$ は $\Omega_0 \Subset \Omega$ なる開集合 Ω_0 に対し次の条件 (i)(ii) を満たすものとする：

(i) $0 < \delta_0 < \mathrm{dist}(\Omega_0, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ なる δ_0 が存在し $0 < \delta \le \delta_0$ なる任意の δ 及び任意の $x \in \Omega_0$ に対し

$$
\{\int_{B^n} f(x - \delta\xi) d\xi \in X; f \in \mathscr{F}\}
$$

は X で相対コンパクトである。ここに B^n は $\mathbb{R}^n$ の単位球 $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \le 1\}$ であるとする。

(ii) $$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{f \in \mathscr{F}} \sup_{|h| \le \delta} ||\ \tau_h f - f||_{L^p(\Omega_0; X)} = 0$$

即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta < \mathrm{dist}(\Omega_0, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ なる δ が存在し

$$
\sup_{f \in \mathscr{F}} \sup_{|h| \le \delta} ||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega_0; X)} \le \varepsilon
$$

が成立する。

このとき

$$
\mathscr{F}|\Omega_0 \equiv \{f|\Omega_0 : \Omega_0 \ni x \mapsto f(x) \in X;\ f \in \mathscr{F}\}
$$

は $L^p(\Omega_0; X)$ で相対コンパクトである。

(証明) $\mathscr{F}|\Omega_0$ が $L^p(\Omega_0;X)$ で全有界である事を示そう。$f\in\mathscr{F}$ 及び $0<a\le\delta_0$ なる a に対し

$$(M_af)(x)=\frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}f(x-a\xi)d\xi,\ x\in\overline{\Omega_0}$$

と置く。ここに $|B^n|$ は単位球 B^n の n 次元体積とする。

$M_af\in C(\overline{\Omega}_0;X)$ **なること**：

$x,y\in\overline{\Omega}_0$ に対し

$$\begin{aligned}
&||(M_af)(x)-(M_af)(y)||\\
&=\frac{1}{|B^n|}||\int_{B^n}(f(x-a\xi)-f(y-a\xi))d\xi||\\
&\le\frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}||f(x-a\xi)-f(y-a\xi)||d\xi\\
&\le\frac{1}{|B^n|}\cdot|B^n|^{1/p'}(\int_{B^n}||f(x-a\xi)-f(x-a\xi)||^pd\xi)^{1/p}\\
&=\frac{1}{|B^n|^{1/p}}(a^{-n}\int_{aB^n}||f(x-\eta)-f(y-\eta))||^pd\eta)^{1/p}\\
&\le\frac{1}{(a^n|B^n|)^{1/p}}\cdot\sup_{|h|\le|x-y|}||\tau_hf-f||_{L^p(\Omega_0;X)}
\end{aligned}$$

と評価されるから (ii) より M_af の連続性が従う。

$M_a\mathscr{F}\equiv\{M_af;f\in\mathscr{F}\}$ **の** $C(\overline{\Omega}_0;X)$ **に於ける相対コンパクト性**：

$0<a\le\delta_0$ なる任意の a に対し $M_a\mathscr{F}$ は次の条件 (a)(b) を満たすので定理 4 より $M_a\mathscr{F}$ は $C(\overline{\Omega}_0;X)$ で相対コンパクトである。

(a) 任意の $x\in\overline{\Omega}_0$ に対し

$$(M_a\mathscr{F})(x)\equiv\{(M_af)(x)\in X;f\in\mathscr{F}\}$$

は X で相対コンパクトである。

(b) $M_a\mathscr{F}$ は $\overline{\Omega}_0$ 上等一様連続である。

実際 (a) は仮定 (i) より従い (b) は前段の評価及び仮定 (ii) より従う。

$\mathscr{F}|\Omega_0$ **の** $L^p(\Omega_0;X)$ **に於ける相対コンパクト性**：

任意の $\varepsilon>0$ に対し有限個の $f_i\in\mathscr{F}$ を取り

$$\mathscr{F}|\Omega_0\subset\bigcup_{i\in I}B(f_i;\varepsilon),$$

$$B(f_i;\varepsilon)=\{f\in L^p(\Omega_0;X);||f-f_i||_{L^p(\Omega_0;X)}<\varepsilon\}$$
と出来る事を示せば良い。

$a>0, f\in\mathscr{F}$ に対し

$$\begin{aligned}||(M_af)(x)-f(x)||&=||\ \frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}(f(x-a\xi)-f(x))d\xi||\\&\le\frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}||(\tau_{a\xi}f-f)(x)||d\xi\\&\le\frac{1}{|B^n|}\cdot|B^n|^{1/p'}(\int_{B^n}||(\tau_{a\xi}f-f)(x)||^pd\xi)^{1/p}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}||M_af-f||_{L^p(\Omega_0;X)}&\le(\int_{\Omega_0}\ \frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}||(\tau_{a\xi}f-f)(x)||^pd\xi dx)^{1/p}\\&=(\frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}\int_{\Omega_0}||(\tau_{a\xi}f-f)(x)||^pdxd\xi)^{1/p}\\&=(\frac{1}{|B^n|}\int_{B^n}\sup_{|h|\le a}\int_{\Omega_0}||(\tau_hf-f)(x)||^pdxd\xi)^{1/p}\\&=\ \sup_{|h|\le a}||\tau_hf-f||_{L^p(\Omega_0;X)}\end{aligned}$$

が従う。これより $a_0>0$ が存在し

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}||M_{a_0}f-f||_{L^p(\Omega_0;X)}<\varepsilon/2$$

となる。

$M_{a_0}\mathscr{F}$ の $C(\overline{\Omega}_0;X)$ に於ける相対コンパクト性より有限個の $f_j\in\mathscr{F}$ が存在して

$$M_{a_0}\mathscr{F}\subset\bigcup_{i\in I}B_\infty(f_i;\varepsilon/(2|\Omega_0|^{1/p})),$$

$$B_\infty(f_i;\delta)=\{f\in C(\overline{\Omega}_0;X);\ ||f-f_i||_{L^\infty(\overline{\Omega}_0;X)}<\delta\}$$
となる。これより
$$\mathscr{F}|\Omega_0\subset\bigcup_{i\in I}B(f_i;\varepsilon)$$
が従う。実際、任意の $f\in\mathscr{F}$ に対し $i\in I$ が在って

$$||M_{a_0}f-f_i||_{L^\infty(\overline{\Omega}_0;X)}<\varepsilon/(2|\Omega_0|^{1/p})$$

となるので

$$\begin{aligned}||f-f_i||_{L^p(\Omega_0;X)}&\le||f-M_{a_0}f||_{L^p(\Omega_0;X)}+||M_{a_0}f-f_i||_{L^p(\Omega_0;X)}\\&<\varepsilon/2+||M_{a_0}f-f_i||_{L^\infty(\Omega_0;X)}\cdot|\Omega_0|^{1/p}\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

が従うからである。

定理６　$1 \leq p < \infty$ とする。バナッハ空間 $L^p(\Omega; X)$ の部分集合 $\mathscr{F}$ に対し次は同値である：

(1) $\mathscr{F}$ は $L^p(\Omega; X)$ で相対コンパクトである。

(2) $\mathscr{F}$ は次の条件 (i)(ii)(iii) を満たす。

(i)　$\Omega' \Subset \Omega$ なる任意の開集合 Ω' に対し

$$\{\int_{\Omega'} f \in X;\ f \in \mathscr{F}\}$$

は X で相対コンパクトである。

(ii)　$\Omega' \Subset \Omega$ なる任意の開集合 Ω' に対し

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{f \in \mathscr{F}} \sup_{|h| \leq \delta} ||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega'; X)} = 0$$

即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta < \mathrm{dist}(\Omega', \Omega \setminus \Omega')$ なる δ が存在して

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \sup_{|h| \leq \delta} ||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega'; X)} \leq \varepsilon$$

(iii)　任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\Omega' \Subset \Omega$ なる開集合 Ω' が存在して

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} ||f||_{L^p(\Omega \setminus \Omega'; X)} \leq \varepsilon$$

（証明）(1) $\Rightarrow$(2)：　仮定より $\mathscr{F}$ は $L^p(\Omega; X)$ の全有界集合であり任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限個の $f_i \in \mathscr{F}$ を取り

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i; \varepsilon),\ B(f_i; \varepsilon) = \{f \in L^p(\Omega; X); ||f - f_i||_{L^p(\Omega; X)} < \varepsilon\}$$

とする事が出来る。$\Omega' \Subset \Omega$ なる開集合を任意に与える。任意の $f \in \mathscr{F}$ に対し $||f - f_i||_{L^p(\Omega; X)} < \varepsilon$ なる $i \in I$ を取る。このとき

$$\begin{aligned} ||\int_{\Omega'} f - \int_{\Omega'} f_i|| = ||\int_{\Omega'} (f - f_i)|| &\leq \int_{\Omega'} ||f - f_i|| \\ &\leq |\Omega'|^{1/p'} ||f - f_i||_{L^p(\Omega'; X)} < |\Omega'|^{1/p'} \varepsilon \end{aligned}$$

となるので

$$\{\int_{\Omega'} f \in X; f \in \mathscr{F}\} \subset \bigcup_{i \in I} B(a_i; |\Omega'|^{1/p'} \varepsilon),$$

$$B(a_i; \delta) = \{x \in X; ||x - a_i|| < \varepsilon\},\ a_i = \int_{\Omega'} f_i \in X$$

となり (i) が従う。また $0 < \delta < \mathrm{dist}(\Omega', \Omega \setminus \Omega')$ なる δ に対し

$$\begin{aligned}
&||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega';X)} \\
&\leq ||\tau_h (f - f_i)||_{L^p(\Omega';X)} + ||\tau_h f_i - f_i||_{L^p(\Omega';X)} + ||f_i - f||_{L^p(\Omega';X)} \\
&\leq 2||f - f_i||_{L^p(\Omega;X)} + ||\tau_h f_i - f_i||_{L^p(\Omega';X)} \\
&< 2\varepsilon + ||\tau_h f_i - f_i||_{L^p(\Omega';X)}
\end{aligned}$$

なる評価を得るので各 $i \in I$ に対し $0 < \delta_i < \mathrm{dist}(\Omega', \Omega \setminus \Omega')$ 且つ

$$\sup_{|h| \leq \delta_i} ||\tau_h f_i - f_i||_{L^p(\Omega;X)} < \varepsilon$$

なる δ_i を取り $\delta_0 = \min_{i \in I} \delta_i > 0$ と置けば

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \sup_{|h| \leq \delta_0} ||\tau_h f - f||_{L^p(\Omega';X)} < 3\varepsilon$$

が従い (ii) を得る。さて任意の $i \in I$ に対し $\Omega_i \Subset \Omega$ なる開集合 Ω_i を取り

$$||f_i||_{L^p(\Omega \setminus \Omega_i;X)} < \varepsilon$$

とする事が出来るので

$$\Omega' = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$$

と置けば $\Omega' \Subset \Omega$ であり上の $f \in \mathscr{F}$ 及び $f_i \in \mathscr{F}$ に対し不等式

$$||f||_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} \leq ||f - f_i||_{L^p(\Omega;X)} + ||f_i||_{L^p(\Omega \setminus \Omega_i)} < 2\varepsilon$$

が従い

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} ||f||_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < 2\varepsilon$$

を得る。これより (iii) が成立つ。

(2)$\Rightarrow$ (1)： $\mathscr{F}$ が $L^p(\Omega; X)$ の全有界部分集合である事を示そう。任意に $\varepsilon > 0$ を与え (iii) により定まる $\Omega' \Subset \Omega$ を取る。この Ω' を定理 5 の Ω_0 とすれば (2) の (i)(ii) の仮定の下で定理 5 の条件 (i)(ii) が成立つ。故に定理 5 より $\mathscr{F}|\Omega'$ は $L^p(\Omega'; X)$ で相対コンパクトとなる。従って有限個の $f_i \in \mathscr{F}$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}|\Omega' \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i; \varepsilon), \\
&B(f_i; \varepsilon) = \{f \in L^p(\Omega'; X); ||f - f_i||_{L^p(\Omega';X)} < \varepsilon\}
\end{aligned}$$

が成立つ。さて任意の $f \in \mathscr{F}$ を与える。$i \in I$ が存在し $||f - f_i||_{L^p(\Omega;X)} < \varepsilon$ となる。これより

$$\begin{aligned}
&||f - f_i||^p_{L^p(\Omega;X)} = ||f - f_i||^p_{L^p(\Omega';X)} + ||f - f_i||^p_{L^p(\Omega \setminus \Omega';X)} \\
&\leq ||f - f_i||^p_{L^p(\Omega;X)} + (||f||_{L^p(\Omega \setminus \Omega';X)} + ||f_i||_{L^p(\Omega \setminus \Omega';X)})^p \\
&< \varepsilon^p + (2\varepsilon)^p \leq (3\varepsilon)^p
\end{aligned}$$

即ち

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i; 3\varepsilon),$$
$$B(f_i; \delta) = \{f \in L^p(\Omega; X); ||f - f_i||_{L^p(\Omega;X)} < \delta\}$$

が従い (1) を得る。

参考文献：

松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店

H. Brézis, Analyse Fonctionelle, Masson.

S. Lang, Real and Functional Analysis, Springer.

J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, Ann. Mat. Pura. Appl. **146**(1987)，65-96.