バナッハ代数に於ける指数写像

平成 19 年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

命題　X を単位元 I を持つ (複素) バナッハ代数で $\|I\| = 1$ とする。$A \in X,\ t \in \mathbb{R}$ に対し $U_n(t) \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$ と置くと $\{U_n(t)\}$ は X のコーシー列を成す。その極限を $\exp(tA)$ と表す：$\exp(tA) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$

$t \in \mathbb{R}$ に対し $U(t) = \exp(tA)$ と置く。このとき

(1) $\|U(t)\| \le \exp(|t|\|A\|)$.

(2) $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は群を成す：

$$
\begin{aligned}
&U(t+s) = U(t)U(s),\ t, s \in \mathbb{R},\\
&U(0) = I
\end{aligned}
$$

(3) $U : \mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in X$ は C^∞, $\frac{d^n}{dt^n}U(t) = A^n U(t) = U(t)A^n$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (I + \frac{t}{n}A)^n = U(t)$

収束は t に関して $\mathbb{R}$ 上広義一様。特に、任意の $T > 0,\ n \ge 1$ に対し

$$
\sup_{|t|\le T} \| \left(I + \frac{t}{n}A\right)^n - \exp(tA)\| \le \frac{T^2\|A\|^2}{2n} \exp(T\|A\|).
$$

(証明)　$m > n$ に対し

$$
\|U_m(t) - U_n(t)\| = \| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k \| \le \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k \quad (*)
$$

となるから $\{U_n(t)\}$ は X のコーシー列となる。その極限を $U(t)$ とする：$\|U_n(t) - U(t)\| \to 0 (n \to \infty)$. よって

$$
\|U(t)\| = \lim_{n\to\infty} \|U_n(t)\| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = \exp(|t|\|A\|).
$$

$(*)$ で $m \to \infty$ としてから $t \in [-T, T]$ について上限を取ると

$$
\sup_{|t|\le T} \|U(t) - U_n(t)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \|A\|^k \to 0\ (n \to \infty).
$$

よって $U : \mathbb{R} \ni t \mapsto U(t) \in X$ は $U_n \in C(\mathbb{R}; X)$ の広義一様収束極限となり、$U \in C(\mathbb{R}; X)$ が従う。

(2) の証明： $U_n(0) = I$ より $U(0) = I$.

$$\begin{aligned} U_n(t)U_n(s) - U_n(t+s) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} A^i \sum_{j=0}^{n} \frac{s^j}{j!} A^j - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t+s)^k}{k!} A^k \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{t^i s^j}{i! j!} A^{i+j} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} \frac{t^i s^j}{i! j!} A^{i+j} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i,j \leq n}} \frac{t^i s^j}{i! j!} A^{i+j} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\|U_n(t)U_n(s) - U_n(t+s)\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i,j \leq n}} \frac{|t|^i |s|^j}{i! j!} \|A\|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(|t|+|s|)^k}{k!} \|A\|^k \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

これを

$$\begin{aligned} &U(t+s) - U(t)U(s) \\ &= (U(t+s) - U_n(t+s)) + (U_n(t+s) - U_n(t)U_n(s)) \\ &+(U_n(t) - U(t))(U_n(s) - U(s)) \\ &+(U_n(t) - U(t))U(s) + U(t)(U_n(s) - U(s)) \end{aligned}$$

に用いれば群の性質が従う。

(3) の証明：

$$\begin{aligned} &U(t+h) - U(t) - hU(t)A \\ &= U(t)(U(h) - I - hA) = U(t) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n \end{aligned}$$

を用いて $\|U(t+h) - U(t) - hU(t)A\| \leq \|U(t)\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^n}{n!} \|A\|^n = O(|h|^2)$

一方 $U_n(t)A = AU_n(t)$ より $U(t)A = AU(t)$ が従う。これより (3) の $n = 1$ の場合が成り立つ。$n \geq 2$ の場合は帰納法による。

(4) の証明：

$$\begin{aligned}\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n-\exp(tA) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k A^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k}t^kA^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)-1\right)\frac{t^k}{k!}A^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\end{aligned}$$

であるから $|t|\le T$ に対し

$$\begin{aligned}&\|\left(I-\frac{t}{n}A\right)^n-\exp(tA)\| \\ &\le \sum_{k=2}^{n}\left(1-\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\right)\frac{T^k}{k!}\|A\|^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{T^k}{k!}\|A\|^k.\end{aligned}$$

不等式 $0<1-\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)\le\frac{k(k-1)}{2n}$ を用いると右辺第一項は

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2n}\frac{T^k}{k!}\|A\|^k=\frac{T^2\|A\|^2}{2n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{T^j}{j!}\|A\|^j$$

で押えられる。

右辺第二項は

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{T^k}{k!}\|A\|^k &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{T^2\|A\|^2}{k(k-1)}\cdot\frac{T^{k-2}}{(k-2)!}\|A\|^{k-2} \\ &\le \frac{T^2\|A\|^2}{n(n+1)}\sum_{j=n-1}^{\infty}\frac{T^j}{j!}\|A\|^j\end{aligned}$$

よって $n\ge 1$ に対し

$$\begin{aligned}&\sup_{|t|\le T}\left\|\left(I+\frac{t}{n}A\right)^n-\exp(tA)\right\| \\ &\le \frac{T^2\|A\|^2}{2n}\left(\sum_{j=0}^{n-2}+\sum_{j=n-1}^{\infty}\right)\frac{T^j}{j!}\|A\|^j=\frac{T^2\|A\|^2}{2n}\exp(T\|A\|).\end{aligned}$$

参考文献：Robert B. Burckel, *An introduction to classical complex analysis.* Vol.1. Pure and Applied Mathematics, 82. Academic Press, Inc.