# 真性特異点に於けるコーシー・リーマンの方程式

平成 24 年 7 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
“Don’t come near me. I’ve got a singular style,” Eurythmics

真性特異点の除外近傍で定義された正則函数は、その真性特異点に於いて極限が確定しない為、連続拡張を持たない。一方、コーシー・リーマンの方程式は、二つの実二変数函数の偏導函数によって記述され、座標に依存した形を取る。ここでは、真性特異点に於いてもコーシー・リーマンの方程式が成立するような不連続拡張をもつ正則函数の例を与えよう。

原点を真性特異点とする $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の正則函数として

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^n}\right)$$

を考える。ここに $n$ は正の整数とする。$n = 1, z \mapsto -z$ とした $\exp(1/z)$ が良く取り上げられるものであるが、ここでは正の実軸 $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ から原点 $0 \in \mathbb{R}$ への連続拡張を意識した符号を取っている。任意の $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し、その偏角 $\theta$ を一つ取り $a = \log|c| + i\theta$ と置くと

$$\begin{aligned} f(z) = c \ &\Leftrightarrow \ \exp\left(-\frac{1}{z^n}\right) = e^a \\ &\Leftrightarrow \ a + \frac{1}{z^n} \in 2\pi i\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \ \exists j \in \mathbb{Z} : z^n = \frac{1}{2\pi ij - a} \end{aligned}$$

となる。そこで充分大きな $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $1/(2\pi ij - a)$ の $n$ 乗根を一つ選んで $z_j$ とすると $z_j \neq 0$ 及び $f(z_j) = c$ を満たし

$$|2\pi ij - a|^2 = (2\pi j - \theta)^2 + (\log|c|)^2 \geq (2\pi j - \theta)^2 \to \infty (j \to \infty)$$

であるから $|z_j| \leq |2\pi j - \theta|^{-1/n} \to 0 (j \to \infty)$ となる。従って、原点の任意の除外近傍 $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \varepsilon\}$ にも $f(z) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ なる $z$ が無限個存在する。更に函数 $f$ は $0$ を値として取らない。即ち $0$ がこの函数 $f$ に対するピカールの定理に於ける除外値である。

原点での不連続性だけなら次の様に直接示す事も出来る：

$$\begin{aligned} f(re^{i\pi/n}) = &\ \exp\left(-\frac{1}{(re^{i\pi/n})^n}\right) = \ \exp\left(\frac{1}{r^n}\right) \to \infty (r \to 0) \\ f(r) = &\ \exp\left(-\frac{1}{r^n}\right) \to 0 (r \to 0) \end{aligned}$$

さて、$f$ は正則函数の合成函数

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{C} \\
\Psi & & \Psi & & \Psi \\
z & \longmapsto & -\dfrac{1}{z^n} & \longmapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{z^n}\right)
\end{array}
$$

として $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正則である。これより $f$ の実部 $u$ と虚部 $v$ は $z = x+iy$ なる二変数 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ の実函数としてコーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で満たす。

そこで $u(0,0)$ 及び $v(0,0)$ を定義することにより、原点 $(0,0)$ でもコーシー・リーマンの方程式が成立つように出来るか？と云う問題を考える。原点に於ける偏微分係数の極限に依る定義には $u(h,0), u(0,k), v(h,0), v(0,k)$ なる形の値のみ現れる。さて

$$f(h,0) = \exp\left(-\frac{1}{h^n}\right)$$

であるから

$$u(h,0) = \exp\left(-\frac{1}{h^n}\right), \quad v(h,0) = 0$$

となる。そこで $n$ が偶数なら $u(0,0) = 0$ と置けば $h \mapsto u(h,0)$ は $0$ で連続に拡張される。一方 $n$ が奇数なら $h\mapsto u(h,0)$ は $0$ で連続拡張を持たない。また $v(0,0)=0$ と置けば $h\mapsto v(h,0)$ は連続に拡張される。また $p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ として

$$
\begin{aligned}
f(0,k) &= \exp\left(-\frac{1}{(ik)^n}\right) \\
&= \begin{cases}
\exp\left(-\dfrac{1}{k^n}\right), & n = 4p \\[2ex]
\exp\left(\dfrac{i}{k^n}\right) = \cos\left(\dfrac{1}{k^n}\right) + i\sin\left(\dfrac{1}{k^n}\right), & n = 4p+1 \\[2ex]
\exp\left(\dfrac{1}{k^n}\right), & n = 4p+2 \\[2ex]
\exp\left(-\dfrac{i}{k^n}\right) = \cos\left(\dfrac{1}{k^n}\right) - i\sin\left(\dfrac{1}{k^n}\right), & n = 4p+3
\end{cases}
\end{aligned}
$$

となり

$$
\begin{aligned}
u(0,k) =&\ \exp\left(-\frac{1}{k^n}\right), \quad v(0,k) = 0, && n = 4p \\
u(0,k) =&\ \cos\left(\frac{1}{k^n}\right), \quad v(0,k) = \sin\left(\frac{1}{k^n}\right), && n = 4p+1 \\
u(0,k) =&\ \exp\left(\frac{1}{k^n}\right), \quad v(0,k) = 0, && n = 4p+2 \\
u(0,k) =&\ \cos\left(\frac{1}{k^n}\right), \quad v(0,k) = -\sin\left(\frac{1}{k^n}\right), && n = 4p+3
\end{aligned}
$$

が従う。そこで $n=4p$ なら $u(0,0)=0, v(0,0)=0$ と置けば $k \mapsto u(0,k)$ 及び $k \mapsto v(0,k)$ は $0$ で連続に拡張されるが、それ以外の場合は連続拡張を持たない。

以上より $n=4p, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ の場合に限り $u(0,0), v(0,0)=0$ と置く事により $h \mapsto u(h,0)$ は連続に拡張され、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対し $v(0,k)=0$ が成立つ。この時

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\exp\left(-\frac{1}{h^n}\right) = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= \lim_{\substack{k\to 0\\ k\neq 0}} \frac{u(0,k)-u(0,0)}{k} = \lim_{\substack{k\to 0\\ k\neq 0}} \frac{1}{k}\exp\left(-\frac{1}{k^n}\right) = 0, \\
\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0
\end{aligned}
$$

となるので、原点 $(0,0)$ に於いてコーシー・リーマンの方程式が成立つ事となる。

以上の事を命題の形に纏めて置こう。

**命題**　$n$ を正の整数とし函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$
f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{z^n}\right), & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = 0 \end{cases}
$$

で定義し、その実部と虚部を夫々$u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とする。このとき次は同値である。

(1) $u$ と $v$ はコーシー・リーマンの方程式を $\mathbb{R}^2$ 全体で満たす。
(2) $n$ は $4$ の倍数である。

参考文献：

杉浦光夫，解析入門 II，東京大学出版会

J. D. Gray and S. A. Morris, When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?, American Mathematical Monthly, **85**(1978), 246-256.