コーシーの積分定理

平成 23 年 7 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

　一変数複素函数論に於けるコーシーの積分定理の直接的な証明を纏めて置こう。以下では複素平面 $\mathbb{C}$ の空でない開集合 D を一つ固定して考える。D 上で定義された函数 $f : D \to \mathbb{C}$ が $z_0 \in D$ で複素微分可能であるとは $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ が存在すると共に $z_0 + h \in D$ なる任意の $h \in \mathbb{C}$ に対し $R_f(z_0; h) \in \mathbb{C}$ が存在し

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h = R_f(z_0; h)h,$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ z_0 + h \in D}} R_f(z_0; h) = R_f(z_0; 0) = 0$$

が成立つ事と定義する。D 上の各点で複素微分可能な函数を D 上の正則函数と謂う。D 上の正則函数全体の成す環を $\mathcal{O}(D)$ と表す。D 内の**ホモトピー**とは写像 $H : I \times I \to \mathbb{C}$ で $H(I \times I) \subset D$ なるものとする。ここに $I \subset \mathbb{R}$ は 0 と 1 を端点とする有界閉区間 $I = [0, 1]$ とする。標準二方体 $I^2 = I \times I \equiv I^{(0)}$ の境界 $\partial I^2 = \partial I^{(0)}$ を次で定義される曲線 $\gamma^{(0)} : I \to \mathbb{C}$ で媒介変数表示する：

$$\gamma^{(0)}(t) = \begin{cases} \gamma_{01}(t) = (4t, 0), & t \in I_1 = [0, 1/4] \\ \gamma_{02}(t) = (1, 4t - 1), & t \in I_2 = [1/4, 1/2] \\ \gamma_{03}(t) = (3 - 4t, 1), & t \in I_3 = [1/2, 3/4] \\ \gamma_{04}(t) = (0, 4 - 4t), & t \in I_4 = [3/4, 1] \end{cases}$$

特に $\gamma^{(0)}$ は

$$\gamma^{(0)} = \gamma_{01} \vee \gamma_{02} \vee \gamma_{03} \vee \gamma_{04}$$

と 4 つの曲線の接続として表されている。

1. C^1 級ホモトピー類に関して不変なコーシーの積分定理

初めにホモトピー同値な形のコーシーの積分定理をグルサの論法で証明しよう。

定理 1 (C^1 **級ホモトピー類上不変なコーシーの積分定理**)
D 内の任意の C^1 級ホモトピー $H : I \times I \to \mathbb{C}$ 及び任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{H \circ \gamma^{(0)}} f = 0$$

(証明)　$I^{(0)} \equiv I \times I$ を 4 つの正方形 $I_1 = [0, 1/2] \times [0, 1/2], I_2 = [1/2, 1] \times [0, 1/2], I_3 = [1/2, 1] \times [1/2, 1], I_4 = [0, 1/2] \times [1/2, 1]$ に分け夫々の境界 ∂I_j を曲線 γ_j で表示する。このとき $\gamma^{(0)}$ は 4 つの曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ の和で表される：$\gamma^{(0)} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$

具体的には $\gamma_j = \gamma_{j1} \vee \gamma_{j2} \vee \gamma_{j3} \vee \gamma_{j4}$,

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_{11}(t) = (2t, 0), & t \in I_1 \\ \gamma_{12}(t) = (1/2, 2t - 1/2), & t \in I_2 \\ \gamma_{13}(t) = (3/2 - 2t, 1/2), & t \in I_3 \\ \gamma_{14}(t) = (0, 2 - 2t), & t \in I_4 \end{cases}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_{21}(t) = (2t + 1/2, 0), & t \in I_1 \\ \gamma_{22}(t) = (1, 2t - 1/2), & t \in I_2 \\ \gamma_{23}(t) = (2 - 2t, 1/2), & t \in I_3 \\ \gamma_{24}(t) = (1/2, 2 - 2t), & t \in I_4 \end{cases}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_{31}(t) = (2t + 1/2, 1/2), & t \in I_1 \\ \gamma_{32}(t) = (1, 2t), & t \in I_2 \\ \gamma_{33}(t) = (2 - 2t, 1), & t \in I_3 \\ \gamma_{34}(t) = (1/2, 5/2 - 2t), & t \in I_4 \end{cases}$$

$$\gamma_4(t) = \begin{cases} \gamma_{41}(t) = (2t, 1/2), & t \in I_1 \\ \gamma_{42}(t) = (1/2, 2t), & t \in I_2 \\ \gamma_{43}(t) = (3/2 - 2t, 1), & t \in I_3 \\ \gamma_{44}(t) = (0, 5/2 - 2t), & t \in I_4 \end{cases}$$

と定義されるものとする。さて

$$\gamma_{12}(I_2) = \gamma_{24}(I_4), \gamma_{13}(I_3) = \gamma_{41}(I_1), \gamma_{23}(I_3) = \gamma_{31}(I_1), \gamma_{34}(I_4) = \gamma_{42}(I_2)$$

であり夫々の等式の右辺と左辺に現れる曲線の向きは互いに逆である事に注意する。また可積分函数 $g : I \times I \to \mathbb{C}$ に対し、等式

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{12}} g &= \int_{I_2} g(\gamma_{12}(t)) \cdot \gamma_{12}'(t) dt = \int_{1/4}^{1/2} g(1/2, 2t - 1/2) \cdot 2dt \\
&= 2 \int_1^{3/4} g(1/2, 2 - 2s)(-ds) = - \int_{3/4}^1 g(1/2, 2 - 2t) \cdot (-2) dt \\
&= - \int_{I_4} g(\gamma_{24}(t)) \cdot \gamma_{24}'(t) dt = - \int_{\gamma_{24}} g, \\
\int_{\gamma_{13}} g &= \int_{I_3} g(\gamma_{13}(t)) \cdot \gamma_{13}'(t) dt = \int_{1/2}^{3/4} g(3/2 - 2t, 1/2) \cdot (-2) dt \\
&= -2 \int_{1/2}^0 g(2s, 1/2)(-ds) = - \int_0^{1/2} g(2t, 1/2) \cdot 2dt \\
&= - \int_{I_1} g(\gamma_{41}(t)) \cdot \gamma_{41}'(t) dt = - \int_{\gamma_{41}} g,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_{23}} g =& \int_{I_3} g(\gamma_{23}(t)) \cdot \gamma_{23}'(t) dt = \int_{1/2}^{3/4} g(2-2t, 1/2) \cdot (-2) dt \\
=& -2 \int_{1/4}^{0} g(2s+1/2, 1/2)(-ds) = -\int_{0}^{1/4} g(2t+1/2, 1/2) \cdot 2dt \\
=& -\int_{I_1} g(\gamma_{31}(t)) \cdot \gamma_{31}'(t) dt = -\int_{\gamma_{31}} g, \\
\int_{\gamma_{34}} g =& \int_{I_4} g(\gamma_{34}(t)) \cdot \gamma_{34}'(t) dt = \int_{3/4}^{1} g(1/2, 5/2-2t) \cdot (-2) dt \\
=& -2 \int_{1/2}^{1/4} g(1/2, 2s) \cdot (-ds) = -\int_{1/4}^{1/2} g(1/2, 2t) \cdot 2dt \\
=& -\int_{I_2} g(\gamma_{42}(t)) \cdot \gamma_{42}'(t) dt = -\int_{\gamma_{42}} g,
\end{aligned}
$$

が成立つ事を後で用いる。

さて D 内の曲線 $H \circ \gamma^{(0)} : I \to \mathbb{C}$ は区分的に C^1 級であり

$$
\begin{aligned}
\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f =& \sum_{j=1}^{4} \int_{I_j} f((H \circ \gamma^{(0)})(t))(H \circ \gamma^{(0)})'(t) dt \\
=& \sum_{j=1}^{4} \int_{I_j} f(H(\gamma^{(0)}(t)))H'(\gamma^{(0)}(t)){\gamma^{(0)}}'(t) dt \\
=& \sum_{j=1}^{4} \int_{I_j} f(H(\gamma_{0j}(t)))H'(\gamma_{0j}(t))\gamma_{0j}'(t) dt
\end{aligned}
$$

となる。簡単の為 $g = (f \circ H) \cdot H' : I^{(0)} \to \mathbb{C}$ と置く。この時

$$
\begin{aligned}
\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f =& \sum_{j=1}^{4} \int_{I_j} g(\gamma_{0j}(t))\gamma_{0j}'(t) dt \\
=& \int_{I_1} g(\gamma_{11}(t))\gamma_{11}'(t) dt + \int_{I_1} g(\gamma_{21}(t))\gamma_{21}'(t) dt \\
+& \int_{I_2} g(\gamma_{22}(t))\gamma_{22}'(t) dt + \int_{I_2} g(\gamma_{32}(t))\gamma_{32}'(t) dt \\
+& \int_{I_3} g(\gamma_{33}(t))\gamma_{33}'(t) dt + \int_{I_3} g(\gamma_{43}(t))\gamma_{43}'(t) dt \\
+& \int_{I_4} g(\gamma_{44}(t))\gamma_{44}'(t) dt + \int_{I_4} g(\gamma_{14}(t))\gamma_{14}'(t) dt
\end{aligned}
$$

$$= \left(\int_{\gamma_{11}} g + \int_{\gamma_{21}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{22}} g + \int_{\gamma_{32}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{33}} g + \int_{\gamma_{43}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{44}} g + \int_{\gamma_{14}} g\right)$$

$$= \left(\int_{\gamma_{11}} g + \int_{\gamma_{21}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{22}} g + \int_{\gamma_{32}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{33}} g + \int_{\gamma_{43}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{44}} g + \int_{\gamma_{14}} g\right)$$

$$+ \left(\int_{\gamma_{12}} g + \int_{\gamma_{24}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{13}} g + \int_{\gamma_{41}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{23}} g + \int_{\gamma_{31}} g\right) + \left(\int_{\gamma_{34}} g + \int_{\gamma_{42}} g\right)$$

$$= \left(\int_{\gamma_{11}} + \int_{\gamma_{12}} + \int_{\gamma_{13}} + \int_{\gamma_{14}}\right) g + \left(\int_{\gamma_{21}} + \int_{\gamma_{22}} + \int_{\gamma_{23}} + \int_{\gamma_{24}}\right) g$$

$$+ \left(\int_{\gamma_{31}} + \int_{\gamma_{32}} + \int_{\gamma_{33}} + \int_{\gamma_{34}}\right) g + \left(\int_{\gamma_{41}} + \int_{\gamma_{42}} + \int_{\gamma_{43}} + \int_{\gamma_{44}}\right) g$$

$$= \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} g = \sum_{k=1}^{4} \int_{H\circ\gamma_k} f$$

これより

$$\max_{1\le k\le 4} \left| \int_{H\circ\gamma_k} f \right|$$

を与える k を一つ取り (γ_k, I_k) を $(\gamma^{(1)}, I^{(1)})$ と表す事にする。この時

$$\left| \int_{H\circ\gamma^{(0)}} f \right| \le 4 \left| \int_{H\circ\gamma^{(1)}} f \right|,$$

$$\mathrm{diam} I^{(1)} = 2^{-1}\mathrm{diam} I^{(0)},\ L(\gamma^{(1)}) = 2^{-1}L(\gamma^{(0)}),\ \gamma^{(1)} = \partial I^{(1)}$$

が成立つ。ここに $L(\gamma)$ は曲線 γ の長さとする。これを繰り返して任意の n に対し

$$I^{(n)} \subset I^{(n-1)} \subset \cdots \subset I^{(1)} \subset I^{(0)},\ \gamma^{(n)} = \partial I^{(n)},$$

$$\mathrm{diam} I^{(n)} = 2^{-n}\mathrm{diam} I^{(0)},\ L(\gamma^{(n)}) = 2^{-n}L(\gamma^{(0)})$$

$$\left| \int_{H\circ\gamma^{(0)}} f \right| \le 4^n \left| \int_{H\circ\gamma^{(n)}} f \right|$$

なる正方形 $I^{(n)}$ が存在する事が分かる。従って

$$\{\xi\} = \bigcap_{n\ge 1} I^{(n)}$$

なる $\xi \in I^{(0)}$ が唯一つ存在する。さて

$$\int_I (H\circ\gamma^{(n)})'(t)dt = [(H\circ\gamma^{(n)})(t)]_0^1 = H(\gamma^{(n)}(1)) - H(\gamma^{(n)}(0)) = 0,$$

$$\int_I (H\circ\gamma^{(n)})(t)(H\circ\gamma^{(n)})'(t)dt = \left[\frac{1}{2}((H\circ\gamma^{(n)})(t))^2\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}((H(\gamma^{(n)}(1)))^2 - (H(\gamma^{(n)}(0)))^2) = 0$$

となるので、等式

$$\int_{H\circ\gamma^{(n)}} f = \int_I f((H\circ\gamma^{(n)})(t))(H\circ\gamma^{(n)})'(t)dt$$
$$= \int_I (f(H(\gamma^{(n)}(t))) - f(H(\xi)) - f'(H(\xi))(H(\gamma^{(n)}(t)) - H(\xi)))(H\circ\gamma^{(n)})'(t)dt'$$
$$= \int_I R_f(H(\xi); H(\gamma^{(n)}(t)) - H(\xi)) \cdot (H(\gamma^{(n)}(t)) - H(\xi))(H\circ\gamma^{(n)})'(t)dt$$

が従う。任意の $t \in I$ に対し次の評価が成立つ：

$$\begin{aligned}
|\ \gamma^{(n)}(t) - \xi\ | &\leq \mathrm{diam} I^{(n)} = \ 2^{-n}\mathrm{diam} I^{(0)}, \\
|\ H(\gamma^{(n)}(t)) - H(\xi)\ | &\leq \ \sup_{\xi\in I^{(0)}} |H'(\zeta)| \cdot |\ \gamma^{(n)}(t) - \xi\ | \\
&= ||H'||_\infty \cdot |\ \gamma^{(n)}(t) - \xi\ | \\
&\leq \ 2^{-n}||H'||_\infty \mathrm{diam} I^{(0)}, \\
|\ (H\circ\gamma^{(n)})'(t)\ | &= |H'(\gamma^{(n)}(t))| \cdot |\gamma^{(n)\prime}(t)| \\
&\leq ||H'||_\infty |\gamma^{(n)\prime}(t)|
\end{aligned}$$

また

$$\int_I |\ \gamma^{(n)\prime}(t)\ |\ dt = L(\gamma^{(n)}) = 2^{-n}L(\gamma^{(0)})$$

となるから

$$M = \ ||H'||_\infty^2 \mathrm{diam} I^{(0)} \cdot L(\gamma^{(0)})$$

と置くと

$$|\int_{H\circ\gamma^{(n)}} f\ | \leq \sup_{\substack{|h|\leq 2^{-n}\mathrm{diam} I^{(0)} \\ H(\xi)+h\in D}} |\ R_f(H(\xi); h)\ | \cdot 2^{-n}||H'||_\infty^2 \mathrm{diam} I^{(0)} \cdot \int_I |\ \gamma^{(n)\prime}(t)\ |\ dt$$
$$= M4^{-n} \sup_{\substack{|h|\leq 2^{-n}\mathrm{diam} I^{(0)} \\ H(\xi)+h\in D}} |\ R_f(H(\xi); h)\ |$$

を得る。これより不等式

$$|\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f\ | \leq M \sup_{\substack{|h|\leq 2^{-n}\mathrm{diam} I^{(0)} \\ H(\xi)+h\in D}} |\ R_f(H(\xi); h)\ |$$

が従う。右辺は $n \to \infty$ とすれば 0 に収束する。

系 1　始点と終点とを共有する二つの C^1 級曲線 γ_0, γ_1 は D 内で C^1 級ホモトープであるとすると任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

(証明)　仮定により C^1 級ホモトピー $H : I \times I \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t),\ H(1,t) = \gamma_1(t), & t \in I \\ H(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \equiv \alpha, & s \in I \\ H(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \equiv \beta, & s \in I \end{cases}$$

を満たす。このとき

$$(H \circ \gamma^{(0)})(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in I_1 \\ \gamma_0(4t-1), & t \in I_2 \\ \beta, & t \in I_3 \\ \gamma_1(4-4t), & t \in I_4 \end{cases}$$

であり定理１によって

$$\int_{H \circ \gamma^{(0)}} f = 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{I_2} f(\gamma_0(4t-1)) \cdot 4\gamma_0'(4t-1)dt + \int_{I_4} f(\gamma_1(4-4t)) \cdot (-4)\gamma_1'(4-4t)dt \\ &= \int_I f(\gamma_0(t))\gamma_0'(t)dt - \int_I f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f \end{aligned}$$

を得る。

系２　二つの C^1 級閉曲線 γ_0, γ_1 は D 内で C^1 級ホモトープであるとすると任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

(証明)　仮定により $\gamma_0(0) = \gamma_0(1), \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ であり C^1 級ホモトピー $H : I \times I \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t),\ H(1,t) = \gamma_1(t), & t \in I \\ H(s,0) = H(s,1), \quad s \in I \end{cases}$$

を満たす。このとき

$$(H \circ \gamma^{(0)})(t) = \begin{cases} H(4t,0), & t \in I_1 \\ \gamma_0(4t-1), & t \in I_2 \\ H(3-4t,1), & t \in I_3 \\ \gamma_1(4-4t), & t \in I_4 \end{cases}$$

であり定理１によって

$$\int_{H \circ \gamma^{(0)}} f = 0$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} &\int_{I_1} f(H(4t)) \cdot 4H'(4t)dt + \int_{I_3} f(H(3-4t)) \cdot (-4)H'(3-4t)dt \\ &= \int_0^1 f(H(t))H'(t)dt + \int_1^0 f(H(s))H'(s)ds = 0 \end{aligned}$$

であるので系１の証明と同様

$$0 = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

を得る。

系３　D 内の C^1 級閉曲線 γ は一点にホモトープであるとすると任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{\gamma} f = 0$$

2. 有界変動ホモトピー類に関して不変なコーシーの積分定理

ホモトピーの滑らかさに関する条件を弱めた形のコーシーの積分定理を示そう。

定理２ (有界変動ホモトピー類上不変なコーシーの積分定理)
D 内の連続写像 $H : I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ は境界 $\partial(I \times I)$ 上有界変動であるとすると任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{H \circ \gamma^{(0)}} f = 0$$

(証明)　定理１の証明は、H が $I^{(0)}$ 内の各横軸 $(I \times \{k/2^n\}, 0 \leq k \leq 2^n, n \geq 1)$ 及び各縦軸 $(\{k/2^n\} \times I, 0 \leq k \leq 2^n, n \geq 1)$ で区分的に C^1 級であり全ての偏導関数が有界で $||H'||_{\infty}$ で抑えられる場合や、H が $I^{(0)}$ 上で一様にリプシッツ連続である場合 ($I^{(0)}$ 上殆ど至る所微分可能であるので）そのまま成立する。

$H(I^{(0)})$ はコンパクトであり閉集合 D^c と共通部分を持たないのでそれらの距離 $\rho \equiv \mathrm{dist}(H(I^{(0)}), D^c)$ は正 $(\rho > 0)$ であり

$$K_{\rho} \equiv \{z \in D;\ \mathrm{dist}(\{z\}, H(I^{(0)})) \leq \rho/2\}$$

は $H(I^{(0)}) \subset K_{\rho} \subset D$ なるコンパクト集合である。連続写像 $H : I \times I \to \mathbb{C}$ は $\partial(I \times I)$ 上有界変動であるから $H \circ \gamma^{(0)} : I \to \mathbb{C}$ は有界変動であり、その長さ $L(H \circ \gamma^{(0)})$ は有限である。任意に $\varepsilon > 0$ を与える。f は K_{ρ} 上一様連続である。$\delta > 0$ 及び I の分割

$$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

が存在し $|z - z'| \leq\ \delta$ なる任意の $z, z' \in K_{\rho}$ に対し

$$|\ f(z) - f(z')\ | \leq \varepsilon/(2L(H \circ \gamma^{(0)})),$$

$((s-s')^2 + (t-t')^2)^{1/2} \leq \delta$ なる任意の $(s,t), (s',t') \in I \times I$ に対し

$$|H(s,t) - H(s',t')| \leq \rho/2,$$

$$|\Delta|\ = \max_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1}) \leq \delta/4\sqrt{2},$$

$$\left| \int_{H\circ\gamma^{(0)}} f - \sum_{j=1}^{n} f(H(\gamma^{(0)}(t_j)))(H(\gamma^{(0)}(t_j)) - H(\gamma^{(0)}(t_{j-1}))) \right| \le \varepsilon/2$$

が成立つ。このとき $\{\gamma^{(0)}(t_j)\}$ は原点から出発して $I^{(0)}$ の境界を正の向きに一周する。$\gamma^{(0)}(t_j) \in \partial I^{(0)}$ が頂点にない場合は属す辺と垂直な直線を考えると $\partial I^{(0)}$ との共有点が向かい合う辺に唯一つ存在する。こうした全ての点と頂点を考え、対応する分点を新たに追加する事により I の分割 Δ は

$$\begin{gathered}\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n_1} = 1/4 < t_{n_1+1} < \cdots < t_{n_2} = 1/2 < t_{n_2+1} < \cdots \\ \cdots < t_{n_3} = 3/4 < t_{n_3+1} < \cdots < t_n = 1,\end{gathered}$$

$$t_j = \begin{cases} 1/4 + t_{j-n_1}, & j = n_1+1, \cdots, n_2 \\ 1/2 + t_{j-n_2}, & j = n_2+1, \cdots, n_3 \\ 3/4 + t_{j-n_3}, & j = n_3+1, \cdots, n \end{cases}$$

として良い事が分かる。$1 \le j, k \le n_1$ に対し長方形 Q_{jk} を

$$Q_{jk} = [4t_{j-1}, 4t_j] \times [4t_{k-1}, 4t_k]$$

と定義すると

$$I^{(0)} = \bigcup_{1\le j,k\le n_1} Q_{jk},\ \mathrm{Int}Q_{jk} \cap \mathrm{Int}Q_{i\ell} = \emptyset\ ((j,k) \ne (i,\ell))$$

が成立つ。$H_\Delta : I^{(0)} \to \mathbb{C}$ を Q_{jk} 上で $\theta, \eta \in [0,1]$ に対し

$$\begin{aligned} &H_\Delta((1-\theta)\cdot 4t_{j-1} + \theta\cdot 4t_j, (1-\eta)\cdot 4t_{k-1} + \eta\cdot 4t_k) \\ &= (1-\theta)(1-\eta)H(4t_{j-1}, 4t_{k-1}) + (1-\theta)\eta H(4t_{j-1}, 4t_k) \\ &\quad + \theta(1-\eta)H(4t_j, 4t_{k-1}) + \theta\eta H(4t_j, 4t_k) \end{aligned}$$

と定義する。これは $(s,t) \in Q_{jk}$ に対し

$$\begin{aligned} H_\Delta(s,t) = &\frac{4t_j - s}{4(t_j - t_{j-1})} \cdot \frac{4t_k - t}{4(t_k - t_{k-1})} H(4t_{j-1}, 4t_{k-1}) \\ &+ \frac{4t_j - s}{4(t_j - t_{j-1})} \cdot \frac{t - 4t_{k-1}}{4(t_k - t_{k-1})} H(4t_{j-1}, 4t_k) \\ &+ \frac{s - 4t_{j-1}}{4(t_j - t_{j-1})} \cdot \frac{4t_k - t}{4(t_k - t_{k-1})} H(4t_j, 4t_{k-1}) \\ &+ \frac{s - 4t_{j-1}}{4(t_j - t_{j-1})} \cdot \frac{t - 4t_{k-1}}{4(t_k - t_{k-1})} H(4t_j, 4t_k) \end{aligned}$$

と定義する事と同値である。

$H_\Delta(I^{(0)}) \subset K_\rho$ より $H_\Delta(I^{(0)}) \subset D$ となる。以上より $H_\Delta^{(0)}$ は D 内のリプシッツ連続ホモトピーで有限個の点を除いて C^1 級である事が分かり

$$\int_{H_\Delta\circ\gamma^{(0)}} f = 0$$

が従う。

$H_\Delta \circ \gamma^{(0)}$ の具体的表示を求める為に $(s,t) \in \partial(I \times I)$ での値を調べよう。任意の $t \in I$ に対し $(t,0) \in Q_{j1}$ なる j を取ると定義より

$$\begin{aligned}H_\Delta(t,0) &= \frac{4t_j - t}{4(t_j - t_{j-1})}H(4t_{j-1},0) + \frac{t-4t_{j-1}}{4(t_j - t_{j-1})}H(4t_j,0)\\ &= H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})) + \frac{t-4t_{j-1}}{4(t_j-t_{j-1})}(H(\gamma^{(0)}(t_j)) - H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\end{aligned}$$

が従う。$(1,t) \in Q_{n_1k}, 1 \le k \le n_1$ なる k に対して $n_1 + 1 \le j \le n_z$ なる j が在って $t \in [4t_{j-1} - 1, 4t_j - 1]$ となるので $4t_k = 4t_j - 1, 4t_{k-1} = 4t_{j-1} - 1,$

$$\begin{aligned}H_\Delta(1,t) &= \frac{4t_k - t}{4(t_k - t_{k-1})}H(1,4t_{k-1}) + \frac{t-4t_{k-1}}{4(t_k - t_{k-1})}H(1,4t_k)\\ &= \frac{4t_{j-1} - 1 - t}{4(t_j - t_{j-1})}H(1,4t_{j-1}-1) + \frac{t+1-4t_{j-1}}{4(t_j - t_{j-1})}H(1,4t_j - 1)\\ &= H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})) + \frac{t+1-4t_{j-1}}{4(t_j-t_{j-1})}(H(\gamma^{(0)}(t_j)) - H^{(0)}(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\end{aligned}$$

が従う。$(t,1) \in Q_{kn_1}, 1 \le k \le n_1$ なる k に対して $n_2 + 1 \le j \le n_3$ なる j が在って $t \in [3-4t_j, 3-4t_{j-1}]$ となるので $4t_k = 3 - 4t_{j-1}, 4t_{k-1} = 3 - 4t_j,$

$$\begin{aligned}H_\Delta(t,1) &= \frac{4t_k - t}{4(t_k - t_{k-1})}H(4t_{k-1},1) + \frac{t-4t_{k-1}}{4(t_k - t_{k-1})}H(4t_k,1)\\ &= \frac{3-4t_{j-1} - t}{-4(t_j - t_{j-1})}H(3-4t_j,-1) + \frac{t-3+4t_j}{-4(t_j - t_{j-1})}H(3-4t_{j-1},1)\\ &= H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})) + \frac{3-t-4t_{j-1}}{4(t_j-t_{j-1})}(H(\gamma^{(0)}(t_j)) - H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\end{aligned}$$

が従う。$(0,t) \in Q_{1k}, 1 \le k \le n_1$ なる k に対して $n_3 + 1 \le j \le n$ なる j が在って $t \in [4-4t_j, 4-4t_{j-1}]$ となるので $4t_k = 4 - 4t_{j-1}, 4t_{k-1} = 4 - 4t_j,$

$$\begin{aligned}H_\Delta(0,t) &= \frac{4t_k - t}{4(t_k - t_{k-1})}H(0,4t_{k-1}) + \frac{t-4t_{k-1}}{4(t_k - t_{k-1})}H(0,4t_k)\\ &= \frac{4-4t_{j-1} - t}{-4(t_j - t_{j-1})}H(0,4-4t_j) + \frac{t-4+4t_j}{-4(t_j - t_{j-1})}H(0,4-4t_{j-1})\\ &= H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})) + \frac{4-t-4t_{j-1}}{4(t_j-t_{j-1})}(H(\gamma^{(0)}(t_j)) - H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\end{aligned}$$

が従う。これより $t \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, \cdots, n$ に対し

$$(H_\Delta \circ \gamma^{(0)})'(t) = \frac{1}{t_j - t_{j-1}}(H(\gamma^{(0)}(t_j)) - H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))$$

が成立つ。以上より

$$\begin{aligned}
&|\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f\,| \\
=\ & |\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f - \int_{H_\Delta\circ\gamma^{(0)}} f\,| \\
=\ & |\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f - \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f((H_\Delta\circ\gamma^{(0)})(t))(H_\Delta\circ\gamma^{(0)})'(t)dt\,| \\
=\ & |\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(H_\Delta(\gamma^{(0)}(t)))dt(H(\gamma^{(0)}(t_j))-H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\,| \\
\le\ & |\int_{H\circ\gamma^{(0)}} f - \sum_{j=1}^{n} f(H(\gamma^{(0)}(t_j)))(H(\gamma^{(0)}(t_j))-H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\,| \\
+\ & |\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(H(\gamma^{(0)}(t_j)))-f(H_\Delta(\gamma^{(0)}(t))))dt(H(\gamma^{(0)}(t_j))-H(\gamma^{(0)}(t_{j-1})))\,| \\
\le\ & \frac{\varepsilon}{2}+\sup\{|f(H(\gamma^{(0)}(s)))-f(H_\Delta(\gamma^{(0)}(t)))|;\ s,t\in I, |s-t|\le|\Delta|\} \\
&\quad\cdot\sum_{j=1}^{n}|\,H(\gamma^{(0)}(t_j))-H(\gamma^{(0)}(t_{j-1}))\,| \\
\le\ & \frac{\varepsilon}{2}+\sup\{|\,f(z)-f(z')\,|;\ z,z'\in K_\rho, |z-z'|\le\delta\}\cdot L(H\circ\gamma^{(0)}) \\
\le\ & \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

を得る。$\varepsilon>0$ は任意であったから定理 2 が従う。

系 1　始点と終点とを共有する二つの有界変動曲線 γ_0, γ_1 は D 内で連続ホモトープであるとすると任意の $f\in\mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

(証明)　定理 1 の系 1 の証明に沿って考える。γ_0 と γ_1 は有界変動なので積分はリーマン和で近似して議論すれば良い。

系 2　二つの有界変動閉曲線 γ_0, γ_1 は D 内で連続ホモトープであるとすると任意の $f\in\mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

(証明)　定理 1 の系 2 の証明に沿って考える。$I\ni s\mapsto H(s,1)\in\mathbb{C}$ は有界変動とは限らないので定理 2 の証明の議論に用いた折線近似を行う。対応する二つの積分は打消し合って 0 となる。

系３　D 内の有界変動閉曲線 γ は一点にホモトープであるとすると任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_\gamma f = 0$$

3. 有界変動ホモロジー類に関して不変なコーシーの積分定理

有界変動閉曲線上のコーシーの積分定理をホモトピー同値な形からホモロジー同値な形に一般化しよう。$I = [0,1]$ で定義された D 内の有界変動閉曲線全体の成す集合を $\mathscr{L}(D)$ と表そう：

$$\mathscr{L}(D) = \{\gamma : I \to \mathbb{C}; \gamma \text{ は有界変動で} \gamma(0) = \gamma(1), \gamma(I) \subset D\}$$

$\mathscr{L}(D)$ の整係数形式的一次結合の成す $\mathbb{Z}$ 加群を $Z_1(D)$ と表しその元を一輪体 cycle と謂う。一輪体 $\gamma = \sum_{i\in I} n_i\gamma_i$ $(n_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i \in \mathscr{L}(D), \sharp I < \infty)$ 上の $f \in \mathcal{O}(D)$ の積分は

$$\int_\gamma f = \sum_{i\in I} n_i \int_{\gamma_i} f$$

で定義される。有界変動ホモロジー類上不変なコーシーの積分定理の証明を Dixon, Loeb に従って述べるのが本節の目的である。その為に幾つかの命題を準備しよう。

命題１　任意の $\gamma \in \mathscr{L}(D), z \in \gamma(I)$ に対し $\sigma \in \mathscr{L}(D)$ 及び $\varepsilon > 0$ が存在し $B(z;\varepsilon) \cap \sigma(I) = \emptyset$ 且つ任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_\gamma f = \int_\sigma f$$

を満たす。

(証明)　$\gamma(I)$ が一点 z のみから成る場合 $(\gamma(I) = \{z\})$ は $\zeta \in D \setminus \{z\}$ を一つ取り $\sigma(t) = \zeta, t \in I,$ とすれば γ 上の積分も σ 上の積分も共に 0 となり等しい。以下 $\gamma(I) \setminus \{z\} \neq \emptyset$ なる場合を考える。このとき次の二つの場合のどちらか一方が成立している：

$$\text{(i) } \gamma(0) = \gamma(1) \neq z \qquad \text{(ii) } \gamma(0) = \gamma(1) = z$$

そこで先ず (i) の場合を考えよう。$r > 0$ が在って $\gamma(0) \notin B(z;r), \mathrm{dist}(\gamma(I), D^c) \geq r$ とする事が出来る。$\gamma : I \to \mathbb{C}$ の一様連続性により $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が在って $|t-s| < 1/n$ なる任意の $t, s \in I$ に対し $|\gamma(t) - \gamma(s)| < r$ となる。非負整数の部分集合 $K \equiv \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \gamma(k/n) \neq z\}$ は $0, n \in K$ なる有限集合である。その要素を $m+1$ 個 $(1 \leq m \leq n)$ として
$K = \{t_j : 0 \leq j \leq m\}$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

と表す事にする。定義により $\gamma(t_j) \neq z$ である。$I_j = [t_{j-1}, t_j]$ を一つ考えた時に次の二つの場合のどちらか一方が成立している：

$$\text{(a) 任意の } t \in I_j \text{ に対し} \gamma(t) \neq z \qquad \text{(b) } \tau_j \in I_j \text{が在って} \gamma(\tau_j) = z$$

(a) の場合は $\sigma \mid I_j = \gamma \mid I_j$ と定義する。(b) の場合は次の二つの内どちらか一方が成立している：

$$\text{(b1)} \quad \gamma(t_j) = \gamma(t_{j-1}) \qquad \text{(b2)} \quad \gamma(t_j) \neq \gamma(t_{j-1})$$

(b1) の場合は $\sigma(t) = \gamma(t_j) = \gamma(t_{j-1}), t \in I_j$ と置く。(b2) の場合 $\zeta = \gamma(t_{j-1}) - z, \zeta' = \gamma(t_j) - z$ と置き $\zeta = \rho e^{i\theta'}, \zeta' = \rho e^{i\theta'} (\rho, \rho' > 0;\ \theta, \theta' \in [0, 2\pi))$ と極座標表示し次の 5 通りに分類する：

(b2-1) $\quad \rho = \rho',\ \theta < \theta'$

(b2-2) $\quad \rho = \rho',\ \theta > \theta'$

(b2-3) $\quad \rho \neq \rho',\ \theta < \theta'$

(b2-4) $\quad \rho \neq \rho',\ \theta = \theta'$

(b2-5) $\quad \rho \neq \rho',\ \theta > \theta'$

このとき σ を I_j 上次で定義する：

(b2-1) $\quad \sigma(t) = z + \rho \exp(i(\theta + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\theta' - \theta))), \quad t \in I_j$

(b2-2) $\quad \sigma(t) = z + \rho \exp(i(\theta + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(2\pi + \theta' - \theta))), \quad t \in I_j$

(b2-3) $\quad \sigma(t) = z + \rho \exp(i(\theta + \frac{2(t - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(\theta' - \theta))), \quad t \in [t_{j-1}, \frac{t_j + t_{j-1}}{2}]$

$\qquad \sigma(t) = z + \rho + \frac{2t - t_j - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\rho' - \rho), \qquad t \in [\frac{t_j + t_{j-1}}{2}, t_j]$

(b2-4) $\quad \sigma(t) = z + \rho + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\rho' - \rho), \quad t \in I_j$

(b2-5) $\quad \sigma(t) = z + \rho \exp(i(\theta + \frac{2(t - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(2\pi + \theta' - \theta))), \quad t \in [t_{j-1}, \frac{t_j + t_{j-1}}{2}]$

$\qquad \sigma(t) = z + \rho + \frac{2t - t_j - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\rho' - \rho), \quad t \in [\frac{t_j + t_{j-1}}{2}, t_j]$

以上の構成法より $\sigma : I \to \mathbb{C}$ は有界変動で $z \notin \sigma(I) \subset D$ を満たし定理 2 の系 1 より

$$\int_\sigma f = \int_\gamma f$$

が成立つ。

次に (ii) の場合を考えよう。$\gamma(I) \setminus \{z\} \neq \emptyset$ より $\zeta \in \gamma(I) \setminus \{z\}$ 及び $t^* \in I$ が存在し $\gamma(t^*) = \zeta$ を満たす。条件 (ii) より $0 < t^* < 1$ が従う。そこで $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{C}$ を

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t + t^*),\ t \in [0, 1 - t^*] \\ \gamma(t + t^* - 1),\ t \in [1 - t^*, 1] \end{cases}$$

と定義すると $\tilde{\gamma} \in \mathscr{L}(D)$ は

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f$$

及び $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(t^*) = \zeta \neq z$ を満たす。よって (i) の場合に帰着される。

命題 2 $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し函数 $\varphi : D \times D \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi(\zeta, z) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z), & \zeta \neq z \\ f'(\zeta), & \zeta = z \end{cases}$$

で定める。このとき任意の $z \in D$ に対し函数

$$\varphi(\cdot, z) : D \ni \zeta \mapsto \varphi(\zeta, z) \in \mathbb{C}$$

は正則である。また任意の $\gamma \in \mathscr{L}(D), z \in D$ に対し

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(\zeta, z) d\zeta$$

と置いて定まる函数

$$g : D \ni z \mapsto g(z) \in \mathbb{C}$$

は正則である。

(証明) $\varphi(\cdot, z)$ は D で連続で $D \setminus \{z\}$ で正則なので z を含む開円板 $B(z; r) \subset D$ で正則である事を示せば良い。これは開円板上での正則函数は解析的である事から従う（その為には開円板上でのコーシーの積分公式を用いる）。さて $z \notin \gamma(I)$ なら $g(z)$ は

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(\zeta, z) d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

と表され g は $D \setminus \gamma(I)$ 上で正則である事が分かる。$z_0 \in \gamma(I)$ なら命題 1 を用いると $B(z_0 : \varepsilon) \cap \sigma(I) = \emptyset$ なる $\sigma \in \mathscr{L}(D)$ が存在し任意の $z \in B(z_0; \varepsilon)$ に対し $\varphi(\cdot, z) \in \mathcal{O}(D)$ であるから

$$\int_{\gamma} \varphi(\zeta, z) d\zeta = \int_{\sigma} \varphi(\zeta, z) d\zeta$$

と表す事が出来る。右辺はその函数として $B(z_0; \varepsilon)$ 上正則であるから g もそうである。従って g は D 上正則である。

定理 3 (有界変動ホモロジー類上不変なコーシーの積分定理)
D を $\mathbb{C}$ の空でない開集合、$\gamma \in Z_1(D)$ は D 内で 0 にホモロジー同値であるとする：

$$\text{任意の } z \in \mathbb{C} \setminus D \text{ に対し } \mathrm{Ind}_{\gamma}(\mathrm{z}) = 0$$

このとき任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対しコーシーの積分公式

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in D \setminus \gamma(I)$$

及びコーシーの積分定理

$$\int_\gamma f = 0$$

が成立つ。

（証明）　$f \in \mathcal{O}(D)$ に対し函数 $\varphi : D \times D \to \mathbb{C}$ を

$$\varphi(\zeta, z) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z), & \zeta \neq z \\ f'(\zeta), & \zeta = z \end{cases}$$

で定める。このとき任意の $z \in D$ に対し函数

$$\varphi(\cdot, z) : D \ni \zeta \mapsto \varphi(\zeta, z) \in \mathbb{C}$$

は正則であり

$$g(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta, z) d\zeta$$

と置いて定まる函数

$$g : D \ni z \mapsto g(z) \in \mathbb{C}$$

は正則である。さて $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$E_n = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I) : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = n\}$$

と置くと

$$\mathbb{C} \setminus \gamma(I) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n$$

となり $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma(I) \to \mathbb{Z}$ は連続であり $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ の各連結成分上一定の整数を取る。$\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ は非有界連結成分を唯一つ持ち、その上で Ind_γ は 0 を取る。従って E_0 は非有界な開集合である。仮定より $\mathbb{C} \setminus D \subset E_0$ であるから $\mathbb{C} = D \cup E_0$ となる。$z \in E_0$ に対し

$$h(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

と置く。$E_0 \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ であるから $h : E \to \mathbb{C}$ は正則である。任意の $z \in D \cap E_0$ に対し $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} g(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta, z) d\zeta &= h(z) - \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= h(z) - f(z) \cdot 2\pi i \, \mathrm{Ind}_\gamma(z) = h(z) \end{aligned}$$

となり $D \cap E_0$ 上 $g = h$ が成立つ。そこで

$$G(z) = \begin{cases} g(z), & z \in D \\ h(z), & z \in E_0 \end{cases}$$

と置くと G は整函数となる。一方 $z \in E_0, |z| \to \infty$ とすると

$$G(z) = h(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \to 0$$

となるからリウビルの定理より G は恒等的に 0 を取る。従って特に任意の $z \in D$ に対し $g(z) = 0$ であり任意の $z \in D \setminus \gamma(I)$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_\gamma(z) \cdot f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + g(z) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f(z)}{\zeta - z} + \varphi(\zeta, z) \right) d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta
\end{aligned}$$

が成立つ。これより

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f = & \int_\gamma \frac{f(\zeta)(\zeta - z)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= 2\pi i \ \mathrm{Ind}_\gamma(z)(f(\zeta)(\zeta - z) \mid_{\zeta = z}) = 0
\end{aligned}$$

を得る。

系 1　$\gamma_0, \gamma_1 \in Z_1(D)$ はホモロジー同値、即ち任意の $z \in \mathbb{C} \setminus D$ に対し

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$$

であるとすると任意の $f \in \mathcal{O}(D)$ に対し

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

参考文献：

H. カルタン、複素函数論、岩波書店
高橋礼司、[新版] 複素解析、東京大学出版会
加藤昌英、複素関数論、朝倉書店
John D. Dixon, A brief proof of Cauchy's integral theorem, Proc.AMS, **29**(1971),625-626.
Harald Hanche-Olsen, On Goursat's proof of Cauchy's integral theorem, Amer. Math. Monthly, **115**(2008),648-652.
Peter A. Loeb, A note on Dixon's proof of Cauchy's integral theorem, Amer. Math. Monthly, **98**(1991),242-244.
Peter A. Loeb, A further simplification of Dixon's proof of Cauchy's intergal theorem, Amer. Math. Monthly, **100**(1993),680-681.
Rudolf Výborný, On the use of differentiable homotopy in the proof of Cauchy's theorem, Amer. Math. Monthly, **86**(1979),380-382.