Euler の定数

平成 19 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ で定め、その極限の存在を考える。a_n を

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

と表せば $a_n > 0$ が従う。次に $\{a_n\}$ が単調減少である事を示して $\lim_{n\to\infty} a_n$ の存在を示すのが一般的なようである。ここでは別の方法で考えてみる。

$n \geq 2$ に対して a_n を

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx \right) \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx
\end{aligned}
$$

と表せば、$m > n \geq 2$ に対し

$$
a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx
$$

となる。絶対値を取ると

$$
\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\le \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right| dx \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right) dx \\
&\le \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \to 0
\end{aligned}
$$

となり $\{a_n\}$ はコーシー列故収束する。その極限を γ と表し Euler の定数と呼ぶ：

$$
\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)
$$

この収束性を考えよう。上の不等式で $m \to \infty$ とすれば $|a_n - \gamma| \le \frac{1}{n}$ は直ちに従う。次に問題となるのは漸近形である。定義より

$$
\begin{aligned}
a_n - \gamma &= a_n - \lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} (a_n - a_m) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right) dx \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k} \right) dx
\end{aligned}
$$

さて $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx = \log k - \log(k-1) = \log \frac{k}{k-1} = \log \left(1 + \frac{1}{k-1} \right)$ であるから $0 < t \le 1$ での $\log(1+t)$ の挙動を調べるのは自然であろう。テーラー展開を参考にして 2 次迄考え

$$
\begin{aligned}
\log(1+t) - t + \frac{t^2}{2} &= \int_0^t \left(\frac{1}{1+s} - 1 + s \right) ds \\
&= \int_0^t \frac{s^2}{1+s} ds
\end{aligned}
$$

と表すと、この値は正であり

$$
\int_0^t \frac{s^2}{1+s} ds \le \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}
$$

を用いると $0 < t \le 1$ では

$$
0 < \log(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \le \frac{t^3}{3}
$$

が成立する事が分かる。これより

$$
\begin{aligned}
0 &< \int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{k}\right)dx \\
&= \log\left(1+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k} \\
&< \frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}+\frac{1}{3(k-1)^3}-\frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2(k-1)^2}+\frac{1}{3(k-1)^3}
\end{aligned}
$$

ここで最右辺の中央の項に対し

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(k-1)^2} &= \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{(k-1)^2}-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k(k-1)^2}
\end{aligned}
$$

を用いると

$$
0<\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{k}\right)dx<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2k(k-1)^2}+\frac{1}{3(k-1)^3}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
0<a_n-\gamma &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{k}\right)dx \\
&< \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^3}+\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)^3} \\
&= \frac{1}{2n}-\frac{1}{6}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)k^3}
\end{aligned}
$$

即ち

$$
a_n-\gamma=\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
$$

である事が分かる。

参考文献：杉浦光夫、解析入門 I、東京大学出版会
森毅、現代の古典解析、現代数学社