急減少函数のフーリエ変換

平成 20 年 6 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな急減少函数 $u \in \mathscr{S}$ に対し、そのフーリエ変換 $\mathscr{F}u$ を

$$(\mathscr{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

で定める。ここに $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ とする。$\mathscr{S}$ 上のフーリエ変換 $\mathscr{F} : u \mapsto \mathscr{F}u$ に関する基本的性質に就いて考えよう。先ず比較的容易に証明出来るものを初めに纏めておこう。以下 $y \in \mathbb{R}^n$ による函数 u の**並進** translation $\tau_y u$ を $(\tau_y u)(x) = u(x-y)$, 函数 u の**反射** reflection $u^\vee$ を $u^\vee(x) = u(-x)$ 及び L^2 内積 $(\cdot|\cdot)$ を

$$(u|v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx$$

で定義する。ここに $\bar{z}$ は z の複素共軛とする。また、$y \in \mathbb{R}^n$ に対して函数 e_y を $e_y(x) = \exp(iy \cdot x), \ x \in \mathbb{R}^n$ で定める。

命題　$u, v \in \mathscr{S}$ とする。次が成立つ。

(1) $\mathscr{F}(au + bv) = a\mathscr{F}u + b\mathscr{F}v, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{C}$

(2) $\|\mathscr{F}u\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2}\|u\|_1$
$u \ge 0$ ならば $\|\mathscr{F}u\|_\infty = (\mathscr{F}u)(0) = (2\pi)^{-n/2}\|u\|_1$

(3) $\tau_h \mathscr{F}u = \mathscr{F}(e_h u), \quad e_{-h}\mathscr{F}u = \mathscr{F}(\tau_h u), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$

(4) $\partial_\xi^\alpha \mathscr{F}u = \mathscr{F}((-ix)^\alpha u), \ \xi^\alpha \mathscr{F}u = \mathscr{F}((-i\partial)^\alpha u), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$

(5) $\mathscr{F}u \in \mathscr{S}$

(6) $(\mathscr{F}u|v) = (u|\mathscr{F}(v^\vee)) = (u|(\mathscr{F}v)^\vee)$

(7) $\mathscr{F}(u * v) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{v}$

証明　(1)、(2) の前半、及び (3) はフーリエ変換の定義により直ちに従う。(2) の後半は

$$(2\pi)^{-n/2}\|u\|_1 = (2\pi)^{-n/2}\int u(x)dx = (\mathscr{F}u)(0) \le \|\mathscr{F}u\|_\infty$$

より従う。(4) は $|\alpha|=1$ の場合 (3) に基づき微分係数を求める事により従い、高階の場合は帰納的に証明される。(5) は (4) と (2) より従う。(6) と (7) はフビニの定理により直ちに従う。

$\mathscr{S}$ 上のフーリエ変換の基本的性質のうち、証明に工夫を要するものとしてフーリエ反転公式、プランシュレルの等式、パーセバルの等式等が挙げられる。命題 1 の下で、それらの関係に就いて考える。

命題２　次は同値である。

(1) $\displaystyle\int\varphi\neq 0$ を満たす或る $\varphi\in\mathscr{S}$ に対し $\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi=\varphi^{\vee}$

(2) 任意の $u\in\mathscr{S}$ に対し $(\mathscr{F}\mathscr{F}u)(0)=u(0)$

(3) 任意の $u\in\mathscr{S}$ に対し $\mathscr{F}\mathscr{F}u=u^{\vee}$

(4) 任意の $u,v\in\mathscr{S}$ に対し $(\mathscr{F}u|\mathscr{F}v)=(u|v)$

(5) 任意の $u\in\mathscr{S}$ に対し $\|\mathscr{F}u\|_2=\|u\|_2$

(6) 任意の $u,v\in\mathscr{S}$ に対し $\mathscr{F}(uv)=(2\pi)^{-n/2}\hat{u}*\hat{v}$

(証明)(1) $\Rightarrow$ (2) : (1) の φ を取り $\varepsilon>0$ に対し $\varphi_\varepsilon\in\mathscr{S}$ を $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x),\ x\in\mathbb{R}^n$ で定める。仮定 (1) より $\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi_\varepsilon=\varphi_\varepsilon^{\vee}$ となるので命題 1 の (6) を 2 回用いると、任意の $u\in\mathscr{S}$ に対し

$$(\mathscr{F}\mathscr{F}u|\varphi_\varepsilon)=(\mathscr{F}u|(\mathscr{F}\varphi_\varepsilon)^{\vee})=(u|\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi_\varepsilon)=(u|\varphi_\varepsilon^{\vee})=(u^{\vee}|\varphi_\varepsilon)$$

となる。そこで最左辺と最右辺に於いて $\varepsilon\to 0$ とすると

$$(\mathscr{F}\mathscr{F}u)(0)\overline{\int\varphi}=u^{\vee}(0)\overline{\int\varphi}=u(0)\overline{\int\varphi}$$

となり (2) を得る。

(2) $\Rightarrow$ (3) :　$u\in\mathscr{S},\ x\in\mathbb{R}^n$ を任意に取って固定する。このとき $\tau_x u\in\mathscr{S}$ に対し (2) を適用して $(\mathscr{F}\mathscr{F}\tau_x u)(0)=(\tau_x u)(0)$ を得る。命題 1 の (3) を両方用いると

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\tau_x u=\mathscr{F}(e_{-x}\mathscr{F}u)=\tau_{-x}\mathscr{F}\mathscr{F}u$$

となるので $(\mathscr{F}\mathscr{F}\tau_x u)(0)=(\tau_{-x}\mathscr{F}\mathscr{F}u)(0)=(\mathscr{F}\mathscr{F}u)(x)$ となり、一方 $(\tau_x u)(0)=u(-x)=u^{\vee}(x)$ であるから $\mathscr{F}\mathscr{F}u=u^{\vee}$ を得る。

(3) $\Rightarrow$ (4) :　(3) より $\mathscr{F}\mathscr{F}v^{\vee}=v$ となるので命題 1 の (6) を用いて $(\mathscr{F}u|\mathscr{F}v)=(u|\mathscr{F}\mathscr{F}v^{\vee})=(u|v)$ を得る。

(4) ⇒ (5)： (5) は (4) の特別な場合である。

(5) ⇒ (3)： (3) の左辺と右辺の差の L^2 ノルムの自乗を次の様に計算する：

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}\mathscr{F}u - u^\vee\|_2^2 &= \|\mathscr{F}\mathscr{F}u\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(\mathscr{F}\mathscr{F}u|u^\vee) + \|u^\vee\|_2^2 \\ &= \|u\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(\mathscr{F}\mathscr{F}u|u^\vee) + \|u^\vee\|_2^2 \\ &= 2\|u\|_2^2 - 2\mathrm{Re}(\mathscr{F}\mathscr{F}u|u^\vee)\end{aligned}$$

ここで初めの等式の第一項に (5) を 2 回用いた。命題 1 の (6) より $\mathrm{Re}(\mathscr{F}\mathscr{F}u|u^\vee) = \mathrm{Re}(\mathscr{F}u|\mathscr{F}u) = \|\mathscr{F}u\|_2^2$ となるので、(5) を再び用いると $\|\mathscr{F}\mathscr{F}u - u^\vee\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 - 2\|\mathscr{F}u\|_2^2 = 0$ となり (3) を得る。

(3) ⇒ (1)： (1) は (3) の特別な場合である。

(3) ⇒ (6)： 命題 1 の (7) を $\hat{u}, \hat{v} \in \mathscr{S}$ に用いると $\mathscr{F}(\hat{u} * \hat{v}) = (2\pi)^{n/2}\hat{\hat{u}}\hat{\hat{v}}$ となる。(3) より $\hat{\hat{u}} = u^\vee,\ \hat{\hat{v}} = v^\vee$ となるので $\mathscr{F}(\hat{u} * \hat{v}) = (2\pi)^{n/2}(uv)^\vee$ 更には $uv = (2\pi)^{-n/2}\mathscr{F}(\hat{u} * \hat{v})^\vee$ を得る。従って

$$\mathscr{F}(uv) = (2\pi)^{-n/2}(\mathscr{F}\mathscr{F}(\hat{u} * \hat{v}))^\vee = (2\pi)^{-n/2}\hat{u} * \hat{v}$$

(6) ⇒ (5)： (6) を $\bar{u}, u \in \mathscr{S}$ に用いると $\mathscr{F}(\bar{u}u) = (2\pi)^{-n/2}\hat{\bar{u}} * \hat{u}$ となる。$\bar{u}u = |u|^2 \geq 0$ を命題 1 の (2) の後半に適用すると

$$\mathscr{F}(\bar{u}u)(0) = (2\pi)^{-n/2}\|\bar{u}u\|_1 = (2\pi)^{-n/2}\|u\|_2^2$$

となる。一方、$\hat{\bar{u}} = \bar{\hat{u}}^\vee$ を用いて

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n/2}(\hat{\bar{u}} * \hat{u})(0) &= (2\pi)^{-n/2}(\bar{\hat{u}}^\vee * \hat{u})(0) \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int \bar{\hat{u}}^\vee(-y)\hat{u}(y)dy \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int \overline{\hat{u}(y)}\hat{u}(y)dy = (2\pi)^{-n/2}\|\hat{u}\|_2^2\end{aligned}$$

を得るので (5) が従う。

以上より $\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi = \varphi^\vee$ を満たす $\varphi \in \mathscr{S}$ の存在を $\mathscr{S}$ 上のフーリエ変換の基礎とする理論体系が標準的である事情が説明できる。その最も代表的な函数が $\hat{\varphi} = \varphi = \varphi^\vee$ を満たすガウス函数 Gaussian $\varphi(x) = \exp(-|x|^2/2)$ である。

参考文献： Bent E. Pertersen, Introduction to the Fourier Transform &
Pseudo-differential Operators, Pitman 1983