フーリエ級数の長周期極限としてのフーリエ積分

平成 29 年 1 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

フーリエ積分をフーリエ級数の長周期極限と見做し、フーリエ反転公式を周期函数のフーリエ級数展開の長周期極限として合理的に理解する方法に就いて考える。

1．円環面と周期函数

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は加法とユークリッド位相 $\mathscr{O}_n$ に因って局所コンパクト (ハウスドルフ) 可換群を成している。周期 2π の**格子** (lattice)

$$(2\pi\mathbb{Z})^n = \{2\pi k = (2\pi k_1, \cdots, 2\pi k_n) \in \mathbb{R}^n; k \in \mathbb{Z}^n\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分群であるので $\mathbb{R}^n$ を $(2\pi\mathbb{Z})^n$ で割った商群 $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ が定義される。即ち $x \in \mathbb{R}^n$ の属す類 $[x]$ を

$$[x] = \{y \in \mathbb{R}^n; x - y \in (2\pi\mathbb{Z})^n\}$$

とすると、商集合として

$$\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n = \{[x]; x \in \mathbb{R}^n\}$$

と表され $[x], [y] \in \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ に対し、その和 $[x] + [y]$ を

$$[x] + [y] = [x + y]$$

と定めると右辺は左辺の二つの代表元の取り方に依らず定まり、この算法 (加法) に因って $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ は可換群を成す。(零元は $[0]$ であり $[x]$ の逆元は $[-x]$ で与えられる。)
$x \in \mathbb{R}^n$ に対し $\varphi(x) = [x]$ と置くと $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ は準同型写像となる:

$$\varphi(x + y) = [x + y] = [x] + [y] = \varphi(x) + \varphi(y)$$

この写像 φ に依って $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ に $\mathbb{R}^n$ から商位相を導入する。具体的には $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ の開集合族を

$$\mathscr{O}_n' = \{U' \subset \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n; \varphi^{-1}(U') \in \mathscr{O}_n\}$$

と定義する。このとき $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ は連続であり $\mathscr{O}_n'$ に因る位相は φ を連続にする $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ の最強位相である。φ は開写像である。即ち任意の $U \in \mathscr{O}_n$ に対し $\varphi(U) \in \mathscr{O}_n'$ となる。実際、任意の $x \in \varphi^{-1}(\varphi(U))$ に対し $\varphi(x) \in \varphi(U)$ であるから $x \in \{y \in \mathbb{R}^n; \exists u \in U : u - y \in (2\pi\mathbb{Z})^n\}$ となり $u - x \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ なる $u \in U$ が存在し $B(u;\varepsilon) \subset U$ なる $\varepsilon > 0$ の存在が従う。このとき任意の $y \in B(x;\varepsilon)$ に対し $|y - x| < \varepsilon$ より $|(y - x + u) - u| = |y - x| < \varepsilon$ であり $y - x + u \in B(u;\varepsilon) \subset U$ 且つ $(y - x + u) - y = u - x \in (2\pi\mathbb{Z})^n$ が従うので $y \in \varphi(U)$

を得る。これは $\varphi(B(x;\varepsilon)) \subset \varphi(U)$ 即ち $B(x;\varepsilon) \subset \varphi^{-1}(\varphi(U))$ である事を意味する。これより $\varphi^{-1}(\varphi(U)) \in \mathscr{O}_n$ が従う。これが示すべき事であった。

次に $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ に於ける加法の連続性を示そう。任意に $[x],[y]$ を取り $[x+y]$ の開近傍 U' を任意に与える: $[x+y] \in U',\ \varphi^{-1}(U') \in \mathscr{O}_n$

このとき $\varphi(x+y) = [x+y] \in U'$ より $x+y \in \varphi^{-1}(U')$ であり $\mathbb{R}^n$ に於ける加法の連続性より $x \in V,\ y \in W$ なる $V, W \in \mathscr{O}_n$ が在って

$$V + W = \{v + w \in \mathbb{R}^n; v \in V, w \in W\} \subset \varphi^{-1}(U')$$

が成立つ。$[x] = \varphi(x) \in \varphi(V),\ [y] = \varphi(y) \in \varphi(W)$ であり $\varphi(V), \varphi(W)$ は φ の開写像性から $\varphi(V), \varphi(W) \in \mathscr{O}'_n$ となり

$$\begin{aligned}\varphi(V) + \varphi(W) &= \{[v] + [w]; v \in V, w \in W\} \\ &= \{[v + w]; v \in V, w \in W\} \\ &= \varphi(V + W) \subset \varphi(\varphi^{-1}(U')) \subset U'\end{aligned}$$

を得る。これが示すべき事であった。

また、$\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ はコンパクト集合 $[-\pi,\pi]^n$ の連続写像 φ に因る像 $\varphi([-\pi,\pi]^n)$ と一致するのでコンパクト空間である。

以上に拠り $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ は商群の加法と商位相に因ってコンパクト可換群を成している事が示された。コンパクト可換群としての $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ を $\mathbb{T}^n$ と表し n 次元**円環面** (n-dimensional torus) と謂う。

複素平面 $\mathbb{C}$ の**単位円周** (unit circle) を $\mathbb{U}$ と表そう:

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \\ &= \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}; \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2; \theta \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$\mathbb{U}$ は $\mathbb{C}$ に於ける乗法に因って可換群を成し、その単位元は 1 で与えられる。即ち $z, z' \in \mathbb{U}$ に対し $zz' = z'z \in \mathbb{U}$ であり $z(z'z'') = (zz')z'', z\bar{z} = 1, z^{-1} = \bar{z}, z \cdot 1 = z$ 等が成立つ。$\mathbb{U}$ に $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ から相対位相を導入する。具体的には $\mathbb{U}$ の開集合族を

$$\mathscr{O}_{\mathbb{U}} = \mathscr{O}_2 \cap \mathbb{U} = \{O \cap \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2; O \in \mathscr{O}_2\}$$

と定義する。これより直ちに位相空間 $\mathbb{U}$ のハウスドルフ性が従う。$\mathbb{C}$ に於ける積

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z, z') \longmapsto zz' \in \mathbb{C}$$

の連続性に因り $\mathbb{U}$ に於ける積

$$\mathbb{U} \times \mathbb{U} \ni (z, z') \longmapsto zz' \in \mathbb{U}$$

の連続性が従う。$\mathbb{U}$ は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合故コンパクトである。

以上に拠り $\mathbb{U}$ は $\mathbb{C}$ に於ける乗法と相対位相に因ってコンパクト可換群を成している事が示された。$\mathbb{C}^n$ の単位多重円周を $\mathbb{U}^n$ とする:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}^n &= \{z \in \mathbb{C}^n ; |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\} \\
&= \{(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}) \in \mathbb{C}^n ; \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{(\cos\theta_1, \sin\theta_1, \cdots, \cos\theta_n, \sin\theta_n) \in \mathbb{R}^{2n} ; \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{U}^n$ は $\mathbb{C}^n$ に於ける乗法と相対位相に因ってコンパクト (ハウスドルフ) 可換群を成す。
$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$E(\theta) = (e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})$$

と置くと写像 $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{U}^n$ が定まる。E は加法群 $\mathbb{R}^n$ から乗法群 $\mathbb{U}^n$ への準同型写像

$$E(\theta + \theta') = E(\theta)E(\theta'),\ \forall\theta, \theta' \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{U}^n \\
\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n \arrow[ur, "\overline{E}"'] &
\end{tikzcd}
$$

であり

$$E(\theta) = (1, \cdots, 1) \Leftrightarrow \theta \in (2\pi\mathbb{Z})^n$$

であるから $\mathrm{Ker}E = (2\pi\mathbb{Z})^n$ である。故に $E = \overline{E} \circ \varphi$ なる同型写像

$$\overline{E} : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n \to \mathbb{U}^n$$

が誘導される。$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への写像 $\theta \mapsto E(\theta)$ としての連続性より $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{U}^n$ への連続性が従い、$\mathbb{T}^n$ の商位相の定義より $\overline{E} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{U}^n$ の連続性が導かれる。$\overline{E}$ はコンパクト空間 $\mathbb{T}^n$ からハウスドルフ空間 $\mathbb{U}^n$ への全単射連続写像故同相写像である。これより直ちに $\mathbb{T}^n$ のハウスドルフ性が従う。

$\mathbb{R}^n$ 上の函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が (多重) 周期 2π を持つ周期函数であるとは等式

$$f(x + 2\pi k) = f(x) \tag{P}$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と任意の $k \in \mathbb{Z}^n$ に対し成立つ事を謂う。従って f は各辺の長さが 2π の立方体特に $[-\pi, \pi]^n$ 上の値で決定される。逆に $[-\pi, \pi]^n$ 上の函数で周期境界条件 ($(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ は標準基底):

$$f(-\pi\vec{e}_j + \sum_{k \neq j} x_k \vec{e}_k) = f(\pi\vec{e}_j + \sum_{k \neq j} x_k \vec{e}_k),\ j \in \{1, \cdots, n\} \tag{P$'$}$$

を満たすものは (P) に依って $\mathbb{R}^n$ 全体に拡張すれば周期 2π を持つ周期函数となる。一方、周期 2π を持つ周期函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対し

$$\tilde{f}([x]) = f(x)$$

と置くと (P) に依り

$$
\begin{aligned}
y \in [x] &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^n :\ y = x + 2\pi k \\
&\Rightarrow f(y) = f(x)
\end{aligned}
$$

となるので右辺 $f(x)$ は代表元の取り方に依らず定まり $\mathbb{T}^n$ 上の函数 $\tilde{f} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ が定義される。逆に $\mathbb{T}^n$ 上の函数 $\tilde{f} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ が与えられた時 $f = \tilde{f} \circ \varphi$ と置けば (P) を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が定まる。

2．局所コンパクト群のユニタリ表現

G を局所コンパクト(ハウスドルフ)群とする。G から或る複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_\pi \neq \{0\}$ 上のユニタリ作用素の成す群 $U(\mathscr{H}_\pi)$ への準同型写像 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ を考える。即ち π は任意の $x, y \in G$ に対し

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y),$$
$$\pi(x)\pi(x)^* = \pi(x)^*\pi(x) = \pi(x)\pi(x^{-1}) = \pi(x^{-1})\pi(x) = \pi(e) = I$$
即ち $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1}) = \pi(x)^*$

なる条件を満たすものとする。G や $\mathscr{H}$ には位相が入っているので π の連続性を議論する事が出来る。

命題 1　準同型写像 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ に対し次は同値である:

(1) $G \times \mathscr{H}_\pi$ から $\mathscr{H}_\pi$ への写像
$$G \times \mathscr{H}_\pi \ni (x, u) \longmapsto \pi(x)u \in \mathscr{H}_\pi$$
は連続である。

(2) 各 $u \in \mathscr{H}_\pi$ に対して定まる G から $\mathscr{H}_\pi$ への写像
$$G \ni x \longmapsto \pi(x)u \in \mathscr{H}_\pi$$
は連続である。

(3) 各 $(u, v) \in \mathscr{H}_\pi \times \mathscr{H}_\pi$ に対して定まる G から $\mathbb{C}$ への写像
$$G \ni x \longmapsto (\pi(x)u|v) \in \mathbb{C}$$
は連続である。

(4) 各 $u \in \mathscr{H}_\pi$ に対して定まる G から $\mathbb{R}$ への写像
$$G \ni x \longmapsto \mathrm{Re}(\pi(x)u|v) \in \mathbb{R}$$
は単位元の或る近傍で連続である。

(証明)　(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) は明らかであり (4) $\Rightarrow$ (1) は次の不等式から従う:

$$\begin{aligned}
&\|\pi(y)v - \pi(x)u\| \\
&= \|\pi(x)(\pi(x^{-1}y)v - u)\| \\
&= \|\pi(x^{-1}y)v - u\| \\
&= \|(\pi(x^{-1}y)v - v) + (v - u)\| \\
&\leq \|\pi(x^{-1}y)v - v\| + \|v - u\| \\
&= (\|\pi(x^{-1}y)v\|^2 - 2\mathrm{Re}(\pi(x^{-1}y)v|v) + \|v\|^2)^{1/2} + \|v - u\| \\
&= (2\|v\|^2 - 2\mathrm{Re}(\pi(x^{-1}y)v|v))^{1/2} + \|v - u\| \\
&\leq \sqrt{2}|(v|v) - \mathrm{Re}(\pi(x^{-1}y)v|v)|^{1/2} + \|v - u\| \\
&= \sqrt{2}|\mathrm{Re}(\pi(x^{-1}y)v|v) - \mathrm{Re}(\pi(e)v|v)|^{1/2} + \|v - u\|
\end{aligned}$$

定義　局所コンパクト (ハウスドルフ) 群 G の**ユニタリ表現** (unitary representation) とは G から或る複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_\pi \neq \{0\}$ 上のユニタリ作用素の成す群 $U(\mathscr{H}_\pi)$ への準同型写像で命題 1 に於ける同値な連続性を満たすものとする。このとき $\mathscr{H}_\pi$ を π の**表現空間** (representation space of π) と謂い $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}_\pi$ を π の**次元** (dimension of π) と謂う。

定義　局所コンパクト (ハウスドルフ) 群 G の二つのユニタリ表現 π_1 と π_2 に対する**繋絡作用素** (intertwining operator) とは任意の $x \in G$ に対し**繋絡関係** (intertwining relation)

$$T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$$

を満たす有界作用素 $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ の事と定義しその全体の成す $\mathscr{B}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ の部分空間を $\mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ と表す:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_{\pi_1} \arrow[r, "\pi_1(x)"] \arrow[d, "T"'] & \mathscr{H}_{\pi_1} \arrow[d, "T"] \\ \mathscr{H}_{\pi_2} \arrow[r, "\pi_2(x)"'] & \mathscr{H}_{\pi_2} \end{tikzcd}$$

$$\mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2}) = \{T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2}); \forall x \in G,\ T\pi_1(x) = \pi_2(x)T\}$$

π_1 と π_2 が**ユニタリ同値** (unitarily equivalent) であるとは $T \in U(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ が存在し任意の $x \in G$ に対し繋絡関係が成立つ事を謂い $\pi_1 \sim \pi_2$ と表す。簡単の為

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi) &= \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi; \mathscr{H}_\pi), \\ \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi) &= \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi; \mathscr{H}_\pi) \\ &= \{T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi); \forall x \in G,\ T\pi(x) = \pi(x)T\} \end{aligned}$$

と表す。$\mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ を π の**中心化** (centralizer of π) と謂う。

命題 2　π の中心化 $\mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ は弱閉 C^* 代数を成す。

(証明)

- $T, S \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ に対し $TS \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ なる事:

  $TS \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ であり任意の $x \in G$ に対し

  $$TS\pi(x) = T\pi(x)S = \pi(x)TS$$

- $T, S \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi),\ a, b \in \mathbb{C}$ に対し $aT + bS \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ なる事:

  $aT + bS \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ であり任意の $x \in G$ に対し

  $$\begin{aligned} (aT + bS)\pi(x) &= aT\pi(x) + bS\pi(x) \\ &= a\pi(x)T + b\pi(x)S = \pi(x)(aT + bS) \end{aligned}$$

- $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ に対し $T^* \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ なる事:

  $T^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ であり任意の $x \in G$ に対し

  $$\begin{aligned} T^*\pi(x) &= T^*\pi(x^{-1})^* = (\pi(x^{-1})T)^* = (T\pi(x^{-1}))^* = \pi(x^{-1})^*T^* \\ &= \pi(x)T^* \end{aligned}$$

- $(T_n; n \geq 1) \subset \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi), T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_\pi)$ は任意の $(u, v) \in \mathscr{H}_\pi \times \mathscr{H}_\pi$ に対し

$$(T_n u|v) \to (Tu|v) \ (n \to \infty)$$

を満たす時 $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ なる事:

$$\begin{aligned}(T\pi(x)u|v) &= \lim_{n\to\infty}(T_n\pi(x)u|v) = \lim_{n\to\infty}(\pi(x)T_n u|v) \\ &= \lim_{n\to\infty}(T_n u|\pi(x)^* v) = (Tu|\pi(x)^* v) = (\pi(x)Tu|v)\end{aligned}$$

が任意の $u, v \in \mathscr{H}_\pi$ に対して成立つので $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$

定義　局所コンパクト (ハウスドルフ) 群 G のユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ に対し $\mathscr{H}_\pi$ の閉部分空間 $\mathscr{M}$ が **π 不変部分空間** (invariant subspace for π) であるとは任意の $x \in G$ に対し

$$\pi(x)\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$$

である事を謂う。$\mathscr{M} \neq \{0\}$ が π 不変部分空間ならば

$$\pi^{\mathscr{M}} : G \ni x \longmapsto \pi^{\mathscr{M}}(x) = \pi(x)|\mathscr{M} \in U(\mathscr{M})$$

で定まる $\pi^{\mathscr{M}}$ は G の $U(\mathscr{M})$ に於ける表現であり π の**部分表現** (subrepresentation of π) と謂う。G のユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ が自明でない部分表現 (即ち $\mathscr{M} \neq \{0\}$ 且つ $\mathscr{M} \neq \mathscr{H}_\pi$ なる部分表現 $\pi^{\mathscr{M}} : G \to U(\mathscr{M})$) を持つ時 π は**可約** (reducible) であると謂い、そうでない時 π は**既約** (irreducible) であると謂う。

命題３　$\mathscr{H}_\pi$ の閉部分空間 $\mathscr{M}$ が π 不変ならば、その直交補空間 $\mathscr{M}^\perp$ も π 不変である。

(証明)　任意の $v \in \mathscr{M}^\perp$ を取る。この時任意の $u \in \mathscr{M}$ 及び $x \in G$ に対し $\pi(x^{-1})u \in \mathscr{M}$ であるから

$$(\pi(x)v|u) = (v|\pi(x)^* u) = (v|\pi(x^{-1})u) = 0$$

が従う。即ち $\pi(x)v \in \mathscr{M}^\perp$ となる。

ユニタリ表現の族 $(\pi_i; i \in I)$ に対しヒルベルト空間の直和 $\mathscr{H}_\pi = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_{\pi_i}$ を取り $x \in G$ 及び $v = (v_i; i \in I) \in \mathscr{H}$ に対し $\pi(x)v = (\pi_i(x)v_i; i \in I)$ と置けば G のユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ が定まる。これを $(\pi_i; i \in I)$ の**直和** (direct sum) と謂い $\bigoplus_{i\in I} \pi_i$ と表す。このとき各 $i \in I$ に対し $\mathscr{H}_{\pi_i}$ は $\mathscr{H}_\pi$ の閉部分空間更には π 不変となり π_i は π の部分表現となる。

命題３の系　ユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ に対し $\{0\} \subsetneqq \mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{H}_\pi$ なる π 不変部分空間 $\mathscr{M}$ が存在すれば π は $\pi^{\mathscr{M}}$ と $\pi^{\mathscr{M}^\perp}$ の直和となる:

$$\pi = \pi^{\mathscr{M}} \oplus \pi^{\mathscr{M}^\perp}$$

ユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ と $u \in \mathscr{H}_\pi$ に対し

$$\mathscr{M}_u = \overline{\mathrm{span}}\ \{\pi(x)u \in \mathscr{H}_\pi; x \in G\}$$

を u の生成する**巡回部分空間** (cyclic subspace generated by u) と謂う。任意の $v \in \mathrm{span}\{\pi(x)u; x \in G\}$ は $(\lambda_i; i \in I) \subset \mathbb{C}, (x_i; i \in I) \subset G(\sharp I < \infty)$ に依り $v = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi(x_i)u$ と表されるので任意の $y \in G$ に対し $\pi(y)v = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi(yx_i)u$ より $\pi(y)v \in \mathrm{span}\{\pi(x)u;\ x \in G\}$ が従う。任意の $v \in \mathscr{M}_u$ 及び任意の $y \in G$ に対して $(v_n; n \geq 1) \subset \mathrm{span}\{\pi(x)u;\ x \in G\}$ が存在し $\|v_n - v\| \to 0$ となる。このとき $\|\pi(y)v_n - \pi(y)v\| = \|v_n - v\| \to 0$ 且つ $\pi(y)v_n \in \mathrm{span}\{\pi(x)u;\ x \in G\}$ であるので $\pi(y)v \in \mathscr{M}_u$ を得る。即ち $\mathscr{M}_u$ は π 不変部分空間である。

$\mathscr{M}_u = \mathscr{H}_\pi$ なる $u \in \mathscr{H}_\pi$ を π の**巡回ベクトル** (cyclic vector) と謂う。巡回ベクトルが存在するユニタリ表現 π を**巡回表現** (cyclic representation) と謂う。

命題４　局所コンパクト (ハウスドルフ) 群のユニタリ表現は巡回表現の直和で表される。

(証明)　局所コンパクト (ハウスドルフ) 群 G のユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ を与える。$\mathscr{H}_\pi \neq \{0\}$ 故 $u \in \mathscr{H}_\pi \setminus \{0\}$ が存在し u の生成する巡回部分空間 $\mathscr{M}_u$ が $\mathscr{H}_\pi$ の π 不変部分空間として定まる。互いに直交する巡回部分空間の集合 $(\mathscr{M}_v; v \in I), I \subset \mathscr{H}_\pi$ の全体 $\mathscr{F} = \{(\mathscr{M}_v; v \in I); I \subset \mathscr{H}_\pi\} \neq \emptyset$ を考え包含関係に因って関係 $\leq$ を導入する:

$$(\mathscr{M}_v; v \in I) \leq (\mathscr{M}_w; w \in J) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} I \subset J$$

この関係 $\leq$ は $\mathscr{F}$ の順序関係となる。$\mathscr{F}$ の任意の (空でない) 全順序部分集合 $\{(\mathscr{M}_v; v \in I_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ は上限 $(\mathscr{M}_v; v \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$ を $\mathscr{F}$ の中に持つので $\mathscr{F}$ は帰納的順序集合を成す。ツォルンの補題に拠り $\mathscr{F}$ には極大元 $(\mathscr{M}_v; v \in \tilde{I})$ が存在する。もし $u_0 \in \mathscr{H}_\pi \setminus \{0\}$ が存在し

$$u_0 \perp \mathscr{M}_v\ (\forall v \in \tilde{I})$$

となっていたと仮定すると命題３の議論から $\mathscr{M}_{u_0}$ は任意の $v \in \tilde{I}$ に対し $\mathscr{M}_{u_0} \perp \mathscr{M}_v$ なる π 不変部分空間となり $(\mathscr{M}_v; v \in \tilde{I} \cup \{u_0\})$ は極大元 $(\mathscr{M}_v; v \in \tilde{I})$ より真に大きい $\mathscr{F}$ の元となり極大性に反する。従って $u_0 = 0$ となる。これは

$$\mathscr{H}_\pi = \bigoplus_{v \in \tilde{I}} \mathscr{M}_v,\ \pi = \bigoplus_{v \in \tilde{I}} \pi^{\mathscr{M}_v}$$

である事を意味する。

命題５　$\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ を G のユニタリ表現とする。$\mathscr{H}_\pi$ の閉部分空間 $\mathscr{M}$ に対し次は同値となる。

(1) $\mathscr{M}$ は π 不変 $(\pi(x)\mathscr{M} \subset \mathscr{M}\ \forall x \in G)$

(2) $\mathscr{M}$ への直交射影 $P_{\mathscr{M}}$ は π の中心化に属す $(P_{\mathscr{M}}\pi(x) = \pi(x)P_{\mathscr{M}} \forall x \in G)$

(証明)　(1) $\Rightarrow$ (2)：$v \in \mathscr{M}$ ならば $P_{\mathscr{M}}v = v$ であり $\pi(x)\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ より $\pi(x)P_{\mathscr{M}}v \in \mathscr{M}$ 故 $\pi(x)P_{\mathscr{M}}v = P_{\mathscr{M}}(\pi(x)P_{\mathscr{M}}v) = P_{\mathscr{M}}\pi(x)v$ を得る。$v \in \mathscr{M}^{\perp}$ ならば $\pi(x)P_{\mathscr{M}}v = 0$ であり $\pi(x)\mathscr{M}^{\perp} \subset \mathscr{M}^{\perp}$ より $\pi(x)v \in \mathscr{M}^{\perp}$ 故 $P_{\mathscr{M}}\pi(x)v = 0$ となり $\pi(x)P_{\mathscr{M}}v = 0 = P_{\mathscr{M}}\pi(x)v$ が従う。故に $\mathscr{H}_\pi = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^{\perp}$ 上で $P_{\mathscr{M}}\pi(x) = \pi(x)P_{\mathscr{M}}$ が成立つ。
(2) $\Rightarrow$ (1)：$v \in \mathscr{M}$ を任意に取る。$P_{\mathscr{M}}v = v$ 及び仮定 $P_{\mathscr{M}}\pi(x) = \pi(x)P_{\mathscr{M}}$ より $\pi(x)v = \pi(x)P_{\mathscr{M}}v = P_{\mathscr{M}}\pi(x)v \in \mathscr{M}$ が従う。即ち $\pi(x)\mathscr{M} \subset \mathscr{M}$ が成立つ。

命題６　(シューアの補題 (Schur's Lemma))

(1) G のユニタリ表現 $\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ に対し次は同値である：

  (i) π は既約である

  (ii) $\mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi) = \{\lambda I_{\mathscr{H}_\pi}; \lambda \in \mathbb{C}\}$

(2) G の二つの既約ユニタリ表現 π_1 と π_2 に対し

  ・ $\pi_1 \sim \pi_2 \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2}) = 1$

  ・ $\pi_1 \not\sim \pi_2 \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2}) = 0$

(証明)　(1) 対偶を示す。一般に $\{\lambda I_{\mathscr{H}_\pi}; \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ である事に注意する。
(ii) $\Rightarrow$ (i)：π は可約であると仮定する。即ち $\{0\} \subsetneqq \mathscr{M} \subsetneqq \mathscr{H}_\pi$ なる π 不変部分空間 $\mathscr{M}$ 及び部分表現 $\pi^{\mathscr{M}} : G \to U(\mathscr{M})$ を持つとする。命題５より $P_{\mathscr{M}} \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ となり $P_{\mathscr{M}} \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi) \setminus \{\lambda I_{\mathscr{H}_\pi}; \lambda \in \mathbb{C}\}$ が従い (ii) に反する。
(i) $\Rightarrow$ (ii)：$T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi) \setminus \{\lambda I_{\mathscr{H}_\pi}; \lambda \in \mathbb{C}\}$ が存在すると仮定する。このとき $T_r := \dfrac{1}{2}(T + T^*)$ 及び $T_i := \dfrac{1}{2i}(T - T^*)$ は C^* 代数 $\mathscr{C}(\mathscr{H}_\pi)$ の元である。$T = T_r + iT_i$ 故 T_r, T_i 共に恒等変換の複素数倍では有り得ない。そこで先ず T_r が恒等変換の複素数倍でないと仮定する。T_r は有界自己共軛作用素であり $T_r \in \mathscr{C}(\pi)$ 即ち任意の $x \in G$ に対し $\pi(x)T_r = T_r\pi(x)$ となるので任意の有界開区間 $I \subset \mathbb{R}$ の特性函数 χ_I に対する有界自己共軛作用素 $\chi_I(T_r)$ も $\pi(x)$ と可換となる。命題５より π は非自明な部分表現 $\pi^{\mathscr{M}} : G \to U(\mathscr{M})$ を $\mathscr{M} = \chi_I(T_r)\mathscr{H}_\pi$ として実現する $I \subset \mathbb{R}$ を持つ。即ち π は可約である。T_i が恒等変換の複素数倍でない場合も T_i は有界自己共軛作用素故 π の可約性が従う。
(2) 先ず $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ ならば $T^* \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_2}; \mathscr{H}_{\pi_1})$ となる。実際任意の $x \in G$ に対し

$$\begin{aligned} T^*\pi_2(x) &= T^*\pi_2(x^{-1})^* \\ &= (\pi_2(x^{-1})T)^* \\ &= (T\pi_1(x^{-1}))^* \\ &= \pi_1(x^{-1})^*T^* = \pi_1(x)T^* \end{aligned}$$

となるからである。これより

$$T^*T\pi_1(x) = T^*\pi_2(x)T = \pi_1(x)T^*T$$

及び

$$TT^*\pi_2(x) = T\pi_1(x)T^* = \pi_2(x)TT^*$$

即ち $T^*T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1})$ 及び $TT^* \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_2})$ が従う。π_1 及び π_2 は既約なので (1) より $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ が存在し $T^*T = \lambda I_{\mathscr{H}_{\pi_1}}$ 及び $TT^* = \mu I_{\mathscr{H}_{\pi_2}}$ が従う。

$$\overline{\lambda} I_{\mathscr{H}_\pi} = (T^*T)^* = TT^* = \mu I_{\mathscr{H}_\pi}$$

より $\overline{\lambda} = \mu$ であり

$$\lambda \|u\|^2 = \lambda(u|u) = (T^*Tu|u) = \|Tu\|^2 \ \forall u \in \mathscr{H}_{\pi_1}$$

より $\lambda \geq 0$ となるので結局 $\lambda \geq 0$ が存在し $T^*T = \lambda I_{\mathscr{H}_{\pi_1}}$ 及び $TT^* = \lambda I_{\mathscr{H}_{\pi_2}}$ が従う事となる。このとき次の二つの場合のどちらか一方が必ず成立つ:

(i) 任意の $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ に対し $T^*T = TT^* = 0$

(ii) $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ 及び $\lambda > 0$ が存在し
$T^*T = \lambda I_{\mathscr{H}_{\pi_1}}$, $TT^* = \lambda I_{\mathscr{H}_{\pi_2}}$

(i) の場合：任意の $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ 及び任意の $u \in \mathscr{H}_{\pi_1}$ に対し $\|Tu\|^2 = (T^*Tu|u) = 0$ 故 $\mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2}) = \{0\}$ 即ち π_1 と π_2 はユニタリ同値ではない。
(ii) の場合：$\lambda^{-1/2}T$ はユニタリ作用素となり $\lambda^{-1/2}T \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ となるから π_1 と π_2 はユニタリ同値となる。さて $\mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2})$ から任意に二つの元 T_1, T_2 を取ると $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ が存在し

$$\begin{aligned} {T_1}^*T_1 &= \lambda_1 I_{\mathscr{H}_{\pi_1}},\ T_1{T_1}^* = \lambda_1 I_{\mathscr{H}_{\pi_2}} \\ {T_2}^*T_2 &= \lambda_2 I_{\mathscr{H}_{\pi_1}},\ T_2{T_2}^* = \lambda_2 I_{\mathscr{H}_{\pi_2}} \end{aligned}$$

が成立つ事となる。常に $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ の場合は (i) の場合なので起こらない。従って λ_1 と λ_2 の少なくとも一方は正となる。$\lambda_1 > 0$ とすると

$$\begin{aligned} &{T_1}^{-1}T_2 = \lambda_1^{-1}{T_1}^*T_2, \\ &{T_1}^*T_2\pi_1(x) = {T_1}^*\pi_2(x)T_2 = \pi_1(x){T_1}^*T_2 \end{aligned}$$

より ${T_1}^{-1}T_2 \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1})$ が従う。(1) より $c \in \mathbb{C}$ が存在し ${T_1}^{-1}T_2 = cI_{\mathscr{H}_{\pi_1}}$ 即ち $T_2 = cT_1$ となる。$\lambda_2 > 0$ の場合も同様である。従って $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1}; \mathscr{H}_{\pi_2}) = 1$ を得る。

命題６の系　G が可換群ならば G の全ての既約ユニタリ表現は一次元である。

(証明)　$\pi : G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ をユニタリ表現とする。G は可換なので任意の $x, y \in G$ に対し

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) = \pi(yx) = \pi(y)\pi(x)$$

となる。従って任意の $x \in G$ に対し $\pi(x) \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\pi_1})$ となる。
　π が既約なら命題６ (1) より任意の $x \in G$ に対し $\lambda(x) \in \mathbb{C}$ が存在し $\pi(x) = \lambda(x) I_{\mathscr{H}_\pi}$ となる。さて $\mathscr{M}$ を $\mathscr{H}_\pi$ の一次元部分空間とする。$u \in \mathscr{H}_\pi \setminus \{0\}$ が存在し $\mathscr{M} = \{cu; c \in \mathbb{C}\}$ と表される。このとき $\pi(x)(cu) = \lambda(x)cu = c\lambda(x)u \in \mathscr{M}$ 故 $\mathscr{M}$ は π 不変である。即ち $\mathscr{H}_\pi$ の任意の一次元部分空間は π 不変となる。$\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}_\pi \geq 2$ ならば π の既約性に反する。従って $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{H}_\pi = 1$ となる。

局所コンパクト可換群 G の既約ユニタリ表現 $\pi: G \to U(\mathscr{H}_\pi)$ は一次元であるから $\mathscr{H}_\pi$ は $\mathbb{C}$ と同型となる。以降 $\mathscr{H}_\pi = \mathbb{C}$ として内積 $(\cdot|\cdot)$ を

$$(z|z') = z\overline{z'},\ z, z' \in \mathbb{C}$$

で与える。このとき任意の $x \in G$ に対し $\xi(x) \in \mathbb{C}$ が一意的に定まり任意の $z \in \mathscr{H}_\pi = \mathbb{C}$ に対し

$$(\pi(x))(z) = \xi(x)z$$

が成立つ。π は準同型であるから任意の $x, y \in G$ に対し

$$\begin{aligned}\xi(xy) &= (\pi(xy))(1) = (\pi(x)\pi(y))(1) = \pi(x)((\pi(y))(1)) \\ &= \xi(x)(\pi(y))(1) = \xi(x)\xi(y)\end{aligned}$$

となる。また π のユニタリ性により任意の $x \in G$ 及び任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned}\|z\|^2 = \|(\pi(x))(z)\|^2 &= ((\pi(x))z|(\pi(x))z) = (\xi(x)z|\xi(x)z) \\ &= |\xi(x)|^2\|z\|^2\end{aligned}$$

となる。従って準同型写像 $\xi: G \ni x \longmapsto \xi(x) \in \mathbb{U}$ が定まる。特に $\xi(e) = 1$ となる。等式

$$\xi(x) = (\pi(x))(1),\ x \in G$$

により $\xi: G \to \mathbb{C}$ の連続性が従い $\mathbb{U}$ の相対位相に依り $\xi: G \to \mathbb{U}$ の連続性が従う。この様な G から $\mathbb{U}$ への準同型連続写像を G の (ユニタリ) **指標** ((unitary) character) と謂い、その全体の成す集合を $\hat{G}$ と表す：

$$\hat{G} = (\mathrm{Hom} \cap C)(G; \mathbb{U})$$

$\hat{G}$ は $(\xi\eta)(x) = \xi(x)\eta(x), x \in G,$ で定まる二項演算 $\hat{G} \times \hat{G} \ni (\xi, \eta) \longmapsto \xi\eta \in \hat{G}$ で可換群を成す。単位元は $G \ni x \longmapsto 1 \in \mathbb{U}$ であり $\xi \in \hat{G}$ の逆元 ξ^{-1} は $\overline{\xi}: G \ni x \longmapsto \overline{\xi(x)} \in \mathbb{U}$ で与えられる。$\hat{G}$ を**指標群** (character group) または**双対群** (dual group) と謂う。

命題 (1) $G = \mathbb{R}^n$ の指標群 $\hat{G}$ は $\mathbb{R}^n$ に同型であり $\xi \in \hat{G}$ は適当な $k \in \mathbb{R}^n$ に依って $\xi(x) = e^{ik\cdot x}(x \in \mathbb{R})$ で与えられる。

(2) $G = \mathbb{T}^n$ の指標群 $\hat{G}$ は $\mathbb{Z}^n$ に同型であり $\xi \in \hat{G}$ は適当な $k \in \mathbb{Z}^n$ に依って
$\xi(\varphi(\theta)) = (E(\theta))^k(\theta \in \mathbb{R}^n)$ で与えられる。ここに $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ は
商写像で $E(\theta) = (e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}), (E(\theta))^k = E(\theta)^k = \prod_{j=1}^{n} e^{ik_j\theta_j}$ とする。
$E(\theta)$ は $\varphi(\theta)$ の代表元の取り方に依らず定まる。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "E(\cdot)^k"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{U}^n \\ \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n \arrow[ur, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

(3) $G = \mathbb{Z}^n$ の指標群 $\hat{G}$ は $\mathbb{T}^n$ に同型であり $\xi \in \hat{G}$
は適当な $\varphi(\theta) \in \mathbb{T}^n$ に依って $\xi(k) = (E(\theta))^k(k \in \mathbb{Z}^n)$ で与えられる。
右辺は $\varphi(\theta)$ の代表元の取り方に依らず定まる。

(証明)　(1) 先ず $n=1$ の場合を示す。任意に $\xi \in \hat{G} = (\mathrm{Hom} \cap C)(\mathbb{R};\mathbb{U})$ を取る。或る $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_0^{x_0} \xi \neq 0$ なる事を示そう。

もしそうでないとすると任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_0^x \xi = 0$ となり $h \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned}
|\xi(x)| &= \left|\xi(x) - \frac{1}{h}\left(\int_0^{x+h} \xi - \int_0^x \xi\right)\right| = \left|\xi(x) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \xi\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (\xi(y) - \xi(x))dy\right| \\
&\leq \sup_{|x-y|\leq|h|} |\xi(y) - \xi(x)| \to 0\ (|h| \to 0)
\end{aligned}$$

となり $|\xi(x)| = 1$ に反する。

そこで $c_0 = 1 \Big/ \left(\displaystyle\int_0^{x_0} \xi\right) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と置く。このとき

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= c_0\xi(x)\int_0^{x_0} \xi(y)dy = c_0\int_0^{x_0} \xi(x)\xi(y)dy = c_0\int_0^{x_0} \xi(x+y)dy \\
&= c_0\int_x^{x_0+x} \xi(y)dy
\end{aligned}$$

であり $\xi \in C(\mathbb{R};\mathbb{C})$ であるから、この積分表示に因り $\xi \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ となり

$$\xi'(x) = c_0(\xi(x_0+x) - \xi(x)) = c_0(\xi(x_0) - 1)\xi(x)$$

が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成立つ。これより

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(\exp(-c_0(\xi(x_0)-1)x)\xi) = 0, \\
&\xi(x) = \xi(0)\exp(c_0(\xi(x_0)-1)x) = \exp(c_0(\xi(x_0)-1)x)
\end{aligned}$$

を得る。$|\xi(x)| = 1 (\forall x \in \mathbb{R})$ である為の必要充分条件は $c_0(\xi(x_0)-1) \in i\mathbb{R}$ である。従って $k = -ic_0(\xi(x_0)-1) \in \mathbb{R}$ とすれば良い。

$n \geq 2$ の場合を考える。$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n),\ j = 1, \cdots, n,\ t \in \mathbb{R}$ に対し $\xi_j(t) = \xi(t\vec{e}_j)$ と置くと $\xi_j \in (\mathrm{Hom} \cap C)(\mathbb{R};\mathbb{U})$ であるから前段に拠り $k_j \in \mathbb{R}$ が存在し $\xi_j(t) = e^{ik_jt}\ (t \in \mathbb{R})$ と表される。そこで $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \xi\left(\sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j\right) = \prod_{j=1}^n \xi(x_j\vec{e}_j) = \prod_{j=1}^n \xi_j(x_j) = \prod_{j=1}^n e^{ik_jx_j} \\
&= \exp\left(i\sum_{j=1}^n k_jx_j\right) = \exp(ik \cdot x)
\end{aligned}$$

が成立つ。

(2) $\xi \circ \varphi \in \widehat{\mathbb{R}^n}$ 故 (1) より $k \in \mathbb{R}^n$ が存在し $\xi(\varphi(\theta)) = e^{ik\cdot\theta}(\theta \in \mathbb{R}^n)$ となる。
$\theta = (0, \cdots, 0),\ \theta = 2\pi\vec{e}_j$ として $1 = \xi(\varphi(0)) = \xi(\varphi(2\pi e_j)) = e^{2\pi i k_j}$ を得るので $k \in \mathbb{Z}^n$ が従う。

(3) $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}^n} = (\mathrm{Hom}\cap C)(\mathbb{Z}^n; \mathbb{U})$ を取る。各 $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し $\xi(\vec{e}_j) = e^{i\theta_j}$ なる $\theta_j \in \mathbb{R}$ を取ると任意の $k \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$\xi(k) = \xi\left(\sum_{j=1}^n k_j \vec{e}_j\right) = \prod_{j=1}^n \xi(k_j\vec{e}_j) = \prod_{j=1}^n \xi(\vec{e}_j)^{k_j} = \prod_{j=1}^n e^{ik_j\theta_j} = (E(\theta))^k$$

が従う。

３．フーリエ級数

この節では $k = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}$ に対して $e_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を

$$e_k(x) = e^{ik\cdot x} = \exp(ik\cdot x) = \exp(i\sum_{j=1}^n k_j x_j) = \prod_{j=1}^n \exp(ik_j x_j),$$

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ で定まる函数とする。e_k は 2π 周期であるから
$\overline{e_k} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ が唯一存在して

$$\overline{e}_k \circ \varphi = e_k$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "e_k"] \arrow[d, "\varphi"'] & & \mathbb{C} \\ \mathbb{T}^n \arrow[urr, "\overline{e}_k"'] & & \end{tikzcd}$$

を満たす。以降 $\overline{e}_k$ と e_k を同一視して
$e_k : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ 或いは $e_k : \mathbb{T}^n \to \mathbb{U}$ と見做す事もある。
また $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ と周期境界条件 (P)$'$ を満たす $[-\pi, \pi]^n$ 上の
自乗可積分函数の成すヒルベルト空間 $L^2_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi]^n; \mathbb{C})$ を同一視し、その内積は

$$(u|v) = \int_{[-\pi,\pi]^n} u\overline{v} = \int_{[-\pi,\pi]^n} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$$

で与えられるものとする。次の定理は基本的である。

定理１． $((2\pi)^{-\frac{n}{2}} e_k; k \in \mathbb{Z}^n)$ は $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ の完全正規直交系を成す。

(証明)　正規直交条件は

$$\begin{aligned} (e_k|e_l) &= \int_{[-\pi,\pi]^n} e_k \overline{e}_l \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_j x_j} e^{-il_j x_j} dx_j \\ &= \prod_{j=1}^n (2\pi)\delta_{k_j l_j} = (2\pi)^n \delta_{kl} \end{aligned}$$

より従う。完全性を示そう。

$$\mathscr{A} = \mathrm{span}(e_k; k \in \mathbb{Z}^n)$$

と置く。$e_k e_l = e_{k+l}$ より $\mathscr{A}$ は単位元 $e_0 = 1$ を持つ代数を成し $\overline{e_k} = e_{-k}$ より $\mathscr{A}$ は複素共軛に就いて閉じている事が分かる。

次に $x \neq y$ なる $x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in [-\pi, \pi]^n$ を考える。$x_j \neq y_j$ なる j を取ると $e^{ix_j} \neq e^{iy_j}$ であるから第 j 成分のみ 1 でその他は 0 の $k \in \mathbb{Z}^n$ に対して $e_k(x) = e^{ix_j} \neq e^{iy_j} = e_k(y)$ が従い $\mathscr{A}$ は点を分離する事が分かる。$\mathbb{T}^n$ はコンパクト故ストーン・ワイエルストラスの定理より $\mathscr{A}$ は $C(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ に於いて (一様ノルムに関し) 稠密となる。これより $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ に於ける $\mathscr{A}$ の稠密性即ち正規直交系 $((2\pi)^{-\frac{n}{2}} e_k; k \in \mathbb{Z}^n)$ の完全性が従う。

定理 1 より任意の $f \in L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ に対し

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (f|e_k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx,\ k \in \mathbb{Z}^n$$

で定まる $\hat{f} = (\hat{f}(k); k \in \mathbb{Z}^n)$ は $l^2(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$ の元となり等式

$$f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e_k = (2\pi)^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (f|e_k) e_k$$

が $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ に於いて成立つ（即ち総和は L^2 収束し、それらは全て L^2 の元として等しい)。更に $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C}), a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned}
&(af + bg)^\wedge(k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k),\ k \in \mathbb{Z}^n \\
&(f|g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)\ \overline{\hat{g}(k)}
\end{aligned}$$

が成立ち $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C}) \ni f \longmapsto \hat{f} \in l^2(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$ はユニタリである事が分かる。

４．フーリエ変換

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の自乗可積分函数の成すヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ を考える。いま $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ の台は原点中心の一辺 $2L_0\pi$ の立方体に含まれているものとする:

$$\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n$$

このとき任意の $L \geq L_0$ に対し $F_L \in L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C}) = L^2_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi]^n; \mathbb{C})$ が

$$F_L(x) = f(Lx),\ x \in [-\pi, \pi]^n$$

で定まり $L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ でフーリエ展開される:

$$\begin{aligned}
&F_L = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{F_L}(k) e_k, \\
&\widehat{F_L}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (F_L|e_k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{[-\pi,\pi]^n} F_L(x) e^{-ik\cdot x} dx
\end{aligned}$$

f の台の条件よりフーリエ係数 $\hat{F}_L(k)$ は

$$\begin{aligned}\widehat{F_L}(k) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(Lx) e^{-ik\cdot x} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\frac{k}{L}\cdot y} dy\end{aligned}$$

と表されるので F_L のフーリエ展開は

$$f(Lx) = (2\pi)^{-n} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\frac{k}{L}\cdot y} dy \right) e^{ik\cdot x},\ x \in [-\pi, \pi]^n$$

なる形を取る。以降 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $e_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を

$$e_\xi(x) = e^{i\xi\cdot x} = \exp(i\xi \cdot x) = \exp\left(i \sum_{j=1}^n \xi_j x_j \right) = \prod_{j=1}^n \exp(i\xi_j x_j)$$

とし

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx$$

と置く。$\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n$ 故右辺の積分は絶対収束し

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{[-L_0\pi, L_0\pi]^n} |f| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (2L_0\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\| = L_0^{\frac{n}{2}} \|f\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big| \int f(x)(e^{-i\xi\cdot x} - e^{-i\eta\cdot x}) dx \Big| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |f(x)||e^{-i(\xi-\eta)\cdot x} - 1| dx \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\xi - \eta| \int |f(x)||x| dx \\ &\leq C_n L_0^{\frac{n}{2}+1} \|f\| |\xi - \eta|\end{aligned}$$

より $\hat{f} : \mathbb{R}^n \ni \xi \longmapsto \hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$ は有界でリプシッツ連続 (特に一様連続) 函数である事が分かる。上のフーリエ展開は

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e^{i\frac{k}{L}\cdot x},\ x \in [-L\pi, L\pi]^n$$

と書き換えられ対応するパーセバルの等式は

$$\|f\|^2 = L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2$$

なる形を取る。一方任意の $N \geq 1$ に対し不等式

$$\begin{aligned}\int_{[-N,N]} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \lim_{L\to\infty} L^{-n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=-LN}^{LN} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2 \\ &\leq \sup_{L\geq L_0} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2 = \|f\|^2\end{aligned}$$

が成立つので $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ となり

$$\|\hat{f}\| \leq \|f\|$$

なる不等式が従う。この不等式は等式として成立する事を示そう。稠密性の議論に依り $\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n$ なる $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対して示せば充分である。(実際 $\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n$ なる任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し $\mathrm{supp} f_j \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n, \|f_j - f\| \to 0$ $(j \to \infty)$ なる列 $(f_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ を取ると $\|\widehat{f_j} - \widehat{f_l}\| = \|f_j - f_l\| \to 0$ $(j, l \to \infty)$ より $g \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ が存在して $\|\widehat{f_j} - g\| \to 0$ $(j \to \infty)$ となるが $\|\widehat{f_j} - \hat{f}\|_\infty \leq L_0^{\frac{n}{2}} \|f_j - f\| \to 0$ $(j, \to \infty), \|\hat{f} - g\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|\widehat{f_j} - g\| = 0$ より $\hat{f} = g \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$,

$$\|\hat{f}\| = \|g\| = \lim_{j\to\infty} \|\hat{f}_j\| = \lim_{j\to\infty} \|f_j\| = \|f\|$$

が従う。) 特に

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{\sum_{\lambda\in\Lambda} f_1^\lambda \otimes \cdots \otimes f_n^\lambda; f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}), \sharp\Lambda < \infty\}$$

の元で $\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n$ を満たすものに対して示せば充分である。その中でも単項のテンソル積 $f_\lambda = f_1^\lambda \otimes \cdots \otimes f_n^\lambda$ に対して示せば充分である。実際

$$\begin{aligned}\|\widehat{\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda}\|^2 &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in\Lambda} (\widehat{f_\lambda}|\widehat{f_\mu}) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in\Lambda} (\|\widehat{f_\lambda} + \widehat{f_\mu}\|^2 - \|\widehat{f_\lambda} - \widehat{f_\mu}\|^2 + i\|\widehat{f_\lambda} + i\widehat{f_\mu}\|^2 - i\|\widehat{f_\lambda} - i\widehat{f_\mu}\|^2) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in\Lambda} (\|f_\lambda + f_\mu\|^2 - \|f_\lambda - f_\mu\|^2 + i\|f_\lambda + if_\mu\|^2 - i\|f_\lambda - if_\mu\|^2) \\ &= \|\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\|^2\end{aligned}$$

が成立つからである。さて $f = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$, $\mathrm{supp} f_j \subset [-L_0\pi, L_0\pi] (\forall j)$ としよう。このとき

$$\begin{aligned}|f(x)|^2 &= \left|\prod_{j=1}^n f_j(x_j)\right|^2 = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \cdot \overline{f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)} \\ &= \prod_{j=1}^n |f_j(x_j)|^2\end{aligned}$$

より

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx = \int \prod_{j=1}^n |f_j(x_j)|^2 dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |f_j(x_j)|^2 dx_j$$

が従う。一方

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \int f_j(x_j) e^{-i\xi_j x_j} dx_j \\ &= \prod_{j=1}^n \widehat{f_j}(\xi_j)\end{aligned}$$

より上と同様に

$$\|\hat{f}\|^2 = \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int \prod_{j=1}^n |\widehat{f_j}\,(\xi_j)|^2 d\xi = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f_j}\,(\xi_j)|^2 d\xi_j$$

が従う。故に問題は $n=1$ の場合に帰着された。即ち $\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]$ なる任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ に対して等式

$$\|\hat{f}\| = \|f\|$$

を示せば充分である事が分かった。さて $N \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\int_{-N}^{N} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \left(\int_{-N}^{N} e^{ix\xi} e^{-iy\xi} d\xi \right) \overline{f(x)} f(y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \frac{\sin N(x-y)}{x-y} \overline{f(x)} f(y) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \overline{f(x)} \left(\int_{-2L_0\pi}^{2L_0\pi} \frac{\sin Ny}{y} f(x-y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \overline{f(x)} \left(\int_{-2L_0\pi}^{2L_0\pi} \frac{\sin Ny}{y} (f(x) + (f(x-y) - f(x)) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-2L_0\pi}^{2L_0\pi} \frac{\sin Ny}{y}\, dy \|f\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \overline{f(x)} \left(\int_{-2L_0\pi}^{2L_0\pi} \frac{\sin Ny}{y} (f(x-y) - f(x)) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-2NL_0\pi}^{2NL_0\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \|f\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \overline{f(x)} \left(\int_{-2L_0\pi}^{2L_0\pi} e^{iNy} g_x(y) dy \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-L_0\pi}^{L_0\pi} \overline{f(x)} \left(\int_{-2L_0\pi}^{2L_0\pi} e^{-iNy} g_x(y) dy \right) dx\end{aligned}$$

が成立つ。ここに $\dfrac{\sin Nt}{t}$ は $t=0$ に於いて N を取る函数として $\mathbb{R}$ 上の連続函数に拡張されたものと見做し、各 $x \in [-L_0\pi, L_0\pi]$ に対し $g_x \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ は

$$g_x(y) = \begin{cases} \dfrac{f(x-y) - f(x)}{y}, & y \neq 0 \\ -f'(x), & y = 0 \end{cases}$$

として定義された函数とする。さて $N \to \infty$ とすると g_x のフーリエ係数は 0 に収束するから

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|^2 &= \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}|\hat{f}|^2 \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt\|f\|^2 = \|f\|^2\end{aligned}$$

を得る。これが示すべき事であった。

以上を定理の形に纏めて置こう。

定理２． $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ は有界な台を持ち、或る $L_0 \geq 1$ に対し $\mathrm{supp} f \subset [-L_0\pi, L_0\pi]^n$ となっているものとする。このとき $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ であり任意の $L \geq L_0$ に対し等式

$$\|\hat{f}\|^2 = \|f\|^2 = L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2$$

が成立つ。また $\hat{f} \in BUC(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$(有界一様連続) であり $L^2([-L\pi, L\pi]^n;\mathbb{C})$ に於ける等式として

$$f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)e_{\frac{k}{L}}$$

が成立つ。

次に台の有界性の条件を外す事を考えよう。

定理３． (1) 定理 2 で与えられるフーリエ変換 $f \longmapsto \hat{f}$ は $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ 上のユニタリ変換に拡張される。即ち全単射線型写像

$$\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \ni f \longmapsto \mathscr{F}f = \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$$

が定まり任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し等式

$$(\mathscr{F}f|\mathscr{F}g) = (f|g)$$

が成立つ。

(2) フーリエの反転公式

$$f = (\mathscr{F}\mathscr{F}f)^\vee$$

が $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に於ける等式として成立つ。ここに $f^\vee$ は $f^\vee(x) = f(-x), x \in \mathbb{R}^n$ で定まる反射とする。

(3) $\mathscr{F}(L^2 \cap L^1) \subset L^2 \cap BUC$ であり $\mathscr{F}$ は L^1 から BUC への有界線型写像に拡張され $f \in L^1$ に対し $\hat{f} \in BUC$ は各点 $\xi \in \mathbb{R}^n$ に於ける積分表示

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx$$

を持つ。

(4) $f \in L^1$ のフーリエ変換 $\hat{f}$ が再び $\hat{f} \in L^1$ であればフーリエの反転公式

$$f = (\mathscr{F}\mathscr{F}f)^{\vee}$$

は $L^{\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に於ける等式として意味を持つ。即ち等式

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot x} d\xi$$

が殆んど至る所成立する。

(5) $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し次の等式が成立つ。

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 &= \lim_{L\to\infty} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2 \\ &= \lim_{L\to\infty} \left\|(2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e_{\frac{k}{L}}\right\|^2_{L^2([-L\pi,L\pi]^n)}\end{aligned}$$

(6) $f \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ に対し

$$\lim_{L\to\infty} \left\| f - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e_{\frac{k}{L}} \right\|_{L^2([-L\pi,L\pi]^n)} = 0$$

(証明)　任意に $f \in L^1 \cap L^2$ を取り $f_N = f \cdot \chi_{[-N\pi,N\pi]^n}$ と置く。ここに $\chi_{[-N\pi,N\pi]^n}$ は立方体 $[-N\pi,N\pi]^n$ の特性函数とする。$|f_N| \leq |f|$ 故 $\|f_N - f\| \to 0$ $(N\to\infty)$ であり定理 2 より

$$\|\widehat{f_M} - \widehat{f_N}\| = \|f_M - f_N\| \to 0 \ (M,N\to\infty)$$

となるので $g \in L^2$ が存在し $\|\hat{f}_N - g\| \to 0$ $(N\to\infty)$ となる。一方

$$\|\widehat{f_M} - \hat{f}\|_{\infty} \leq \|f_N - f\|_1 \to 0$$

より

$$\|\hat{f} - g\| \leq \liminf_{N\to\infty} \|\widehat{f_N} - g\| = 0$$

となるので $\hat{f} = g \in L^2$ 且つ

$$\|\hat{f}\| = \|g\| = \lim_{N\to\infty} \|\widehat{f_N}\| = \lim_{N\to\infty} \|f_N\| = \|f\|$$

が従う。また

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)| &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big| \int f(x)(e^{-i(\xi+\eta)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x}) dx \Big| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |f(x)||e^{-i\eta\cdot x} - 1| dx\end{aligned}$$

であり $|e^{-i\eta\cdot x}-1|\leq 2$ 故

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{|\eta|\leq\delta}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi+\eta)-\hat{f}(\xi)|\leq \lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{|\eta|\leq\delta}\int|f(x)||e^{-i\eta\cdot x}-1|dx \\ =0\end{aligned}$$

となり $\mathscr{F}(L^1\cap L^2)\subset L^2\cap BUC$ が従う。更に $\hat{f}\in L^1$ ならば
$\mathscr{F}\mathscr{F}f=\mathscr{F}(\hat{f})\in\mathscr{F}(L^1\cap L^2)\subset L^2\cap BUC$ であり

$$\begin{aligned}\|f^\vee-\mathscr{F}\mathscr{F}f\|^2&=\|f^\vee\|^2-2\mathrm{Re}(f^\vee|\mathscr{F}\mathscr{F}f)+\|\mathscr{F}\mathscr{F}f\|^2\\&=\|f\|^2-2\mathrm{Re}(\mathscr{F}f|\mathscr{F}f)+\|\mathscr{F}f\|^2\\&=\|f\|^2-\|\mathscr{F}f\|^2\\&=0\end{aligned}$$

故 $f=(\mathscr{F}\mathscr{F}f)^\vee$ が従う。ここに

$$\begin{aligned}(f^\vee|\mathscr{F}\mathscr{F}f)&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int f(-x)\left(\int e^{ix\cdot\xi}\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi\right)dx\\&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\left(\int f(-x)e^{ix\cdot\xi}dx\right)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi\\&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int\left(\int f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\right)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi\\&=(\hat{f}|\hat{f})\end{aligned}$$

を用いた。以上より (3)(4) が示された。さて任意の $N\geq 1$ に対し不等式

$$\begin{aligned}\int_{[-N,N]^n}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi&=\lim_{L\to\infty}L^{-n}\sum_{k_1=-LN}^{LN}\cdots\sum_{k_n=-LN}^{LN}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2\\&\leq\liminf_{L\to\infty}L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2\end{aligned}$$

が成立つので

$$\|f\|^2=\|\hat{f}\|^2\leq\liminf_{L\to\infty}L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2$$

が従う。一方、

$$\begin{aligned}\left||\widehat{f_N}(\xi)|^2-|\hat{f}(\xi)|^2\right|&=(|\widehat{f_N}(\xi)|+|\hat{f}(\xi)|)\left||\widehat{f_N}(\xi)|-|\hat{f}(\xi)|\right|\\&\leq(|\widehat{f_N}(\xi)|+|\hat{f}(\xi)|)|\widehat{f_N}(\xi)-\hat{f}(\xi)|\\&\leq 2\|f\|_1\int_{|x|\geq N\pi}|f|\end{aligned}$$

より、任意の $\varepsilon>0$ に対し $N_\varepsilon\geq 1$ が存在し $N\geq N_\varepsilon$ ならば任意の $k\in\mathbb{Z}^n$ に対し

$$\sup_{L\geq 1}\left|\left|\widehat{f_N}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2-\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2\right|\leq\frac{\varepsilon}{2^{|k_1|+\cdots+|k_n|+2n}}$$

とする事が出来る。従って $L \geq N$ に対し

$$
\begin{aligned}
L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 &\leq \varepsilon + L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \widehat{f_N}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&= \varepsilon + \|f_N\|^2 \\
&\leq \varepsilon + \|f\|^2
\end{aligned}
$$

を得る。これより

$$
\limsup_{L \to \infty} L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \leq \|f\|^2
$$

が従うので

$$
\begin{aligned}
\|\hat{f}\|^2 = \|f\|^2 &= \lim_{L \to \infty} L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&= \lim_{L \to \infty} \left\| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e_{\frac{k}{L}} \right\|^2_{L^2([-L\pi, L\pi]^n)}
\end{aligned}
$$

を得る。これより

$$
\begin{aligned}
&\left\| f - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e_{\frac{k}{L}} \right\|^2_{L^2([-L\pi, L\pi]^n)} \\
&= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} \left(f \middle| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e_{\frac{k}{L}} \right)_{L^2([-L\pi, L\pi]^n)} \\
&\qquad + \left\| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) e_{\frac{k}{L}} \right\|^2_{L^2([-L\pi, L\pi]^n)} \\
&= \|f\|^2 - L^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&\to 0 \ (L \to \infty)
\end{aligned}
$$

が成立つ。

次に $f \in L^2$ とする。$g \in L^2$ が一意的に存在し $\|f_l - f\| \to 0$ なる任意の列 $(f_l) \subset L^1 \cap L^2$ に対し $\|\widehat{f_l} - g\| \to 0$ が成立つ。そこで $\hat{f} = g$ と置く。このとき $\mathscr{F} : L^2 \ni f \mapsto \hat{f} \in L^2$ は線型で任意の $f \in L^2$ に対し

$$
\|\hat{f}\|^2 = \|f\|^2
$$

が成立つ。故に $\mathscr{F}$ は単射である。また任意の $f, g \in L^2$ に対し

$$\begin{aligned}
(\hat{f}|\hat{g}) &= \frac{1}{4}(\|\hat{f}+\hat{g}\|^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|^2 + i\|\hat{f}+i\hat{g}\|^2 - i\|\hat{f}-i\hat{g}\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2) \\
&= (f|g), \\
(\hat{f}|g) &= \lim_{\substack{l\to\infty \\ m\to\infty}} (\widehat{f_l}|g_m) = \lim_{\substack{l\to\infty \\ m\to\infty}} (f_l^\vee|\widehat{g_m}) = (f^\vee|\hat{g}), \\
\|f - (\mathscr{F}\mathscr{F}f)^\vee\|^2 &= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}(f^\vee|\mathscr{F}\mathscr{F}f) + \|\mathscr{F}\mathscr{F}f\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}(\mathscr{F}f|\mathscr{F}f) + \|\mathscr{F}f\|^2 \\
&= \|f\|^2 - \|\mathscr{F}f\|^2 = 0
\end{aligned}$$

を得るので $\mathscr{F}$ の全射性が従う。以上より (1)(2) が示された。
(5)(6) に就いては $f \in L^1 \cap L^2$ に対して既に示されているので $f \in L^2$ に対して証明しよう。$\|f_l - f\| \to 0$ $(l \to \infty)$ なる列 $(f_l; l \geq 1) \subset L^1 \cap L^2$ を取る。部分列 $(f_{l_j}; j \geq 1)$ が存在し殆んど至る所 $\widehat{f_{l_j}}$ は $\hat{f}$ に各点収束するので、初めから $(f_l; l \geq 1) \subset L^1 \cap L^2$ は $\|f_l - f\| \to 0$ 且つ $\widehat{f_l} \to \hat{f}$ $a.e.$ として良い。
l, m に対し

$$\lim_{L\to\infty} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| \widehat{f_l}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 = \|f_l - f_m\|^2$$

となっているので任意の $\varepsilon > 0$ に対し $L_0 \geq 1$ が存在し任意の $L \geq L_0$ に対し

$$L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| \widehat{f_l}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 < \|f_l - f_m\|^2 + \varepsilon$$

が成立つ。このとき単調性の下での総和と極限の可換性より

$$\begin{aligned}
&L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&= L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lim_{l\to\infty} \left| \widehat{f_l}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&= L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lim_{j\to\infty} \inf_{l\geq j} \left| \widehat{f_l}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&= \lim_{j\to\infty} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \inf_{l\geq j} \left| \widehat{f_l}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&\leq \lim_{j\to\infty} L^{-n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| \widehat{f_j}\left(\frac{k}{L}\right) - \widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right) \right|^2 \\
&\leq \lim_{j\to\infty} (\|f_j - f_m\|^2 + \varepsilon) \\
&= \|f - f_m\|^2 + \varepsilon
\end{aligned}$$

が従う。これより

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2\right)^{1/2}-\left(L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2\right)^{1/2}\right| \\
&\le\left(L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)-\widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\le(\|f-f_m\|^2+\varepsilon)^{1/2}
\end{aligned}
$$

を得るので

$$
\begin{aligned}
&\lim_{L\to\infty}L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2 \\
&=\lim_{m\to\infty}\lim_{L\to\infty}L^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\widehat{f_m}\left(\frac{k}{L}\right)\right|^2 \\
&=\lim_{m\to\infty}\|\widehat{f_m}\|^2=\|\hat{f}\|^2
\end{aligned}
$$

が従う。これが示すべき事であった。

註． 証明中に用いた総和と極限の可換性は次の通りである：
非負値二重数列 $(a_{nk}; n\in\mathbb{Z}_{>0}, k\in\mathbb{Z})$ は各 $k\in\mathbb{Z}$ に対し $(a_{nk}; n\in\mathbb{Z}_{>0})$ は単調増加列であるとすると、$(\lim_{n\to\infty}a_{nk}; k\in\mathbb{Z})$ から成る正項級数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{n\to\infty}a_{nk}$ 及び正項級数 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}$ から成る単調増加列 $(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}; n\in\mathbb{Z}_{>0})$ の極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}$ は収束・発散を共にし（$[0,\infty]$ に於いて）等式

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{n\to\infty}a_{nk}
$$

が成立つ。

（証明） 各 $k\in\mathbb{Z}$ 及び $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $a_{nk}\le\lim_{m\to\infty}a_{mk}$ であるから

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{m\to\infty}a_{mk}
$$

を得る。左辺は単調増加列 $(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}; n\in\mathbb{Z}_{>0})$ を成し、右辺はその一つの上界であるから

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{m\to\infty}a_{mk}
$$

を得る。一方、任意の $n, N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$
\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{nk}\ge\sum_{k=-N}^{N}a_{nk}
$$

であり $(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{nk}; n\in\mathbb{Z}_{>0})$ は単調増加列であるから

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{mk} = \sup_{m\in\mathbb{Z}_{>0}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{mk} \geq \sum_{k=-N}^{N} a_{nk}$$

を得る。右辺は単調増加列 $(\sum_{k=-N}^{N} a_{nk}; n\in\mathbb{Z}_{>0})$ を成し、左辺はその一つの上界であるから

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{mk} \geq \sum_{k=-N}^{N}\lim_{n\to\infty} a_{nk}$$

を得る。$N\in\mathbb{Z}_{>0}$ に就いて上限（或いは極限 $N\to\infty$）を取り

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{mk} \geq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\lim_{n\to\infty} a_{nk}$$

を得るので上の主張が従う。

参考文献：

G. B. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRC Press.
G. B. Folland, Real Analysis, John Wiley
小林 俊行・大島 利雄, 『リー群と表現論』, 岩波書店
小澤 徹, 急減少函数のフーリエ変換,
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/Fourier.pdf
小澤 徹, トーラスと回転行列,
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/torus.pdf