定係数偏微分作用素の基本解

令和 3 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

複素係数の実 n 変数多項式 $P(\neq 0)$ を表象とする偏微分作用素 $P(-i\partial)$ に対する基本解の存在定理である**マルグランジュ・エーレンプレイスの定理**に関し、その基本解の具体的構成法及び明示表現を P.Wagner に従って説明する。

1　問題設定

零でない複素係数の実 n 変数多項式を P とする。このとき $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び $(a_\alpha; |\alpha| \leq m) \subset \mathbb{C}$ が存在し $P_m \neq 0$ 且つ任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \tag{1}$$

が成立する。ここに $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ は多重指数であり P_m は P の主部

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha \tag{2}$$

である。P に対応する偏微分作用素 $P(-i\partial)$ は

$$P(-i\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-i\partial)^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} (-i)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \tag{3}$$

で定義される。ここに

$$\partial = \nabla = (\partial_1, \cdots, \partial_n), \quad \partial^\alpha = \prod_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j}$$

である。$\mathbb{R}^n$ 上の**分布** distribution $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は

$$P(-i\partial)E = \delta \tag{4}$$

を満たすとき $P(-i\partial)$ の**基本解** fundamental solution であると謂う。ここに δ は原点に於ける**ディラック分布** Dirac distribution である。$m = 0$ なら $a_0 \neq 0$ を用いて $E = \dfrac{1}{a_0}\delta$ とすれば良いから以下では $m \geq 1$ として考える。任意の $P \neq 0$ に対し $P(-i\partial)$ の基本解 $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在すると云うのが**マルグランジュ・エーレンプレイスの定理** The Malgrange-Ehrenpreis Theorem であり、偏微分方程式の線型理論の基本定理の一つとして位置付けられている。フーリエ変換が適用可能な設定であれば (4) は

$$\mathscr{F}^{-1} P \mathscr{F} E = \delta \tag{5}$$

と表されるので
$$P\mathscr{F}E = \mathscr{F}\delta \tag{6}$$
より E は形式的には
$$E = \mathscr{F}^{-1}\Big(\frac{1}{P}\mathscr{F}\delta\Big) \tag{7}$$
で与えられる。$\mathscr{F}\delta$ は定数なので E は $\dfrac{1}{P}$ の逆フーリエ変換 $\mathscr{F}^{-1}\Big(\dfrac{1}{P}\Big)$ の定数倍で与えられる事になる。P は多項式であるから実変数を複素変数に置き換える事により $\mathbb{C}^n$ 上の函数として拡張され $\mathbb{C}^n$ に於いて零点を持つ。この零点が $\mathbb{R}^n$ に存在する場合、$\dfrac{1}{P}$ はその零点に於いて意味を失い、$\mathscr{F}^{-1}\Big(\dfrac{1}{P}\Big)$ の明確な定義が必要となる。少くとも $\dfrac{1}{P}$（局所的）可積分性は吟味する必要が有る。$\mathbb{R}^n$ 上の孤立特異点を避けて意味の有る積分値を計算する方法の典型例として、コーシーの主値積分、アダマールの有限部分法、虚軸からの境界値に基づくものが有る。次節では具体例を見て行こう。

2　定係数偏微分作用素の基本解の例

本節では定係数偏微分作用素に対する基本解の具体例を見て行こう。作用素が単射でない限り基本解は一意的に定まらない。実際、一つの基本解に作用素の核の任意の元を加えたものも基本解である。特に、定数項の無い定係数偏微分作用素に対して基本解が一つ在ったとすると、それに定数を加えたものも基本解となる。また、以下に見る様に、同一の基本解が複数の具体的表示を持つ場合も存在する。

2.1　一次元に於ける一階及び二階作用素

基礎となるのがディラックのデルタ δ とヘビサイド函数 H の関係 $H' = \partial H = \delta$ である。ここに $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ は
$$\delta : C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \delta(\varphi) := \varphi(0) \in \mathbb{C}$$
で定義されるものであり $H \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ は
$$H(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$
で定義されるものである。$\delta(\varphi)$ を $\langle \delta, \varphi \rangle$ と表す事も多い。H に就いては原点に於ける値が異なる定義も存在する。$H' = \partial H = \delta$ の証明は
$$-\langle H, \partial\varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\partial\varphi(x)dx = -\int_0^{+\infty} \partial\varphi(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$
とするのが一般的である。別証として
$$(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-y)\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \varphi$$
を微分して得られる等式
$$(\partial H) * \varphi = \partial(H * \varphi) = (H * \varphi)' = \varphi$$

に於いて $\rho \in C_0^\infty,\ \rho \geq 0,\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho = 1$ なる ρ を取り φ として $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$ で与えられる ρ_ε を選んで $\varepsilon \downarrow 0$ とする方法もある。同様にして $\check{H}(x) := H(-x)$ で与えられる $\check{H}$ は等式 $-\partial\check{H} = \delta$ を満たす事が示される。さて、$\zeta \in \mathbb{C}$ に対し $e_\zeta \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ を

$$e_\zeta(x) = e^{\zeta x} = \exp(\zeta x), \quad x \in \mathbb{R}$$

で定める。同じ記号 e_ζ で掛算作用素

$$e_\zeta : C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto e_\zeta\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

及びその双対

$$e_\zeta : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R})$$

も表す事にすると、等式

$$\partial + \zeta = e_{-\zeta}\partial e_\zeta$$

が成立する。この等式を $e_{-\zeta}H,\ -e_{-\zeta}\check{H} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ に施すと

$$\begin{aligned}
&(\partial + \zeta)e_{-\zeta}H = (e_{-\zeta}\partial e_\zeta)(e_{-\zeta}H) = e_{-\zeta}\partial H = e_{-\zeta}\delta = \delta, \\
&(\partial + \zeta)(-e_{-\zeta}\check{H}) = (e_{-\zeta}\partial e_\zeta)(-e_{-\zeta}\check{H}) = e_{-\zeta}\partial(-\check{H}) = e_{-\zeta}\delta = \delta
\end{aligned}$$

を得る。従って $e_{-\zeta}H$ 及び $-e_{-\zeta}\check{H}$ は一階の作用素 $\partial + \zeta$ の基本解である。これらを積分核とする積分作用素は

$$\begin{aligned}
&((e_{-\zeta}H) * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_{-\zeta}(x-y)H(x-y)\varphi(y)dy = \int_{-\infty}^{x} e^{-\zeta(x-y)}\varphi(y)dy, \\
&\big((-e_{-\zeta}\check{H}) * \varphi\big)(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e_{-\zeta}(x-y)H(y-x)\varphi(y)dy = -\int_{x}^{+\infty} e^{-\zeta(x-y)}\varphi(y)dy
\end{aligned}$$

で与えられる。さて ζ を $-\zeta$ と置き換えると

$$\begin{aligned}
&(\partial - \zeta)(\partial + \zeta)e_{-\zeta}H = (\partial - \zeta)\delta = \partial\delta - \zeta\delta = \delta' - \zeta\delta \\
&(\partial - \zeta)(\partial + \zeta)e_\zeta\check{H} = (\partial + \zeta)(\partial - \zeta)e_\zeta\check{H} = (\partial + \zeta)(-\delta) = -\partial\delta - \zeta\delta = -\delta' - \zeta\delta
\end{aligned}$$

を得るので辺々加えると

$$(\partial^2 - \zeta^2)(e_{-\zeta}H + e_\zeta\check{H}) = -2\zeta\delta$$

が導かれる。従って $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対する二階の作用素 $\partial^2 - \zeta^2$ の基本解は

$$E_\zeta := -\frac{1}{2\zeta}(e_{-\zeta}H + e_\zeta\check{H})$$

で与えられる。E_ζ を積分核とする積分作用素は

$$\begin{aligned}
(E_\zeta * \varphi)(x) &= -\frac{1}{2\zeta}\Big(\int_{-\infty}^{x} e^{-\zeta(x-y)}\varphi(y)dy + \int_{x}^{+\infty} e^{\zeta(x-y)}\varphi(y)dy\Big) \\
&= -\frac{1}{2\zeta}\Big(\int_{-\infty}^{x} e^{-\zeta|x-y|}\varphi(y)dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-\zeta|x-y|}\varphi(y)dy\Big) \\
&= -\frac{1}{2\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta|x-y|}\varphi(y)dy
\end{aligned}$$

と表される。両辺共 $\zeta \to 0$ で発散するが、発散部分を引き去った

$$\Big(\big(E_\zeta - \frac{1}{2\zeta}\big) * \varphi\Big)(x) = -\frac{1}{2\zeta}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(e^{-\zeta|x-y|} - 1\big)\,\varphi(y)dy$$

の右辺は

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|\varphi(y)dy = \frac{1}{2}(|\cdot| * \varphi)(x)$$

に収束する。これは一次元のラプラス作用素 ∂^2 の基本解

$$\partial^2\Big(\frac{1}{2}|\cdot|\Big) = \delta$$

である $\frac{1}{2}|\cdot|$ を

$$\partial^2\Big(E_\zeta - \frac{1}{2\zeta}\Big) = \delta$$

の極限として積分作用素の枠組みで定式化したものと見做される。

$\partial^2 - \zeta^2$ の基本解は $(\partial-\alpha)(\partial-\beta) = \partial^2 - (\alpha+\beta)\partial + \alpha\beta$ の基本解の表示に直ちに一般化される。等式

$$(\partial-\alpha)(\partial-\beta)(e_\alpha H + e_\beta \check{H}) = (\alpha-\beta)\delta$$

を基礎とすれば良い。

2.2 多次元に於ける輸送作用素

$n \geq 2$ として $\mathbb{R}^2$ に於ける輸送作用素 $a\cdot\nabla = \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_j$ を考える。ここに $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は定ベクトルとする。n 次直交行列 $R_a = (r_{jk})$ を $R_a a = (|a|, 0, \cdots, 0)$ なるものとする。このとき $E_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ を $E_0(x) = H(x_1)\otimes\delta(x'),\ x = (x_1, x') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$，として $E := |a|^{-1}R_a^* E_0$ と定めたものが $a\cdot\nabla E = \delta$ を満たす事を示そう。$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\begin{aligned}\partial_j(R_a^*\varphi)(x) &= \sum_k \partial_j(R_a x)_k(\partial_k\varphi)(R_a x) = \sum_k \partial_j\Big(\sum_\ell r_{k\ell}x_\ell\Big)(\partial_k\varphi)(R_a x)\\ &= \sum_k\sum_\ell r_{k\ell}\delta_{j\ell}(\partial_k\varphi)(R_a x) = \sum_k r_{kj}(\partial_k\varphi)(R_a x)\end{aligned}$$

より

$$\partial_j(R_a^*\varphi) = \sum_k r_{kj}R_a^*\partial_k\varphi$$

となるので

$$\sum_j r_{\ell j}\partial_j(R_a^*\varphi) = \sum_j\sum_k r_{\ell j}r_{kj}R_a^*\partial_k\varphi = \sum_k \delta_{\ell k}R_a^*\partial_k\varphi = R_a^*\partial_\ell\varphi$$

が従う。$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ の元に対しても同様である。これより $R_a\nabla R_a^* = R_a^*\nabla$,

$$\begin{aligned}a\cdot\nabla R_a^*E_0 &= R_a a\cdot R_a\nabla R_a^*E_0 = R_a a\cdot R_a^*\nabla E_0 = |a|R_a^*\partial_1 E_0\\ &= |a|R_a^*\delta = |a||\det R_a|^{-1}\delta = |a|\delta\end{aligned}$$

が成立する。故に $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は $a \cdot \nabla$ の基本解である。

輸送作用素に定数項 $a_0 \in \mathbb{R}$ を加えた一階の作用素 $a \cdot \nabla + a_0$ は

$$(a \cdot \nabla + a_0) \exp\Big(-\frac{a_0}{|a|^2} a \cdot x\Big) = \exp\Big(-\frac{a_0}{|a|^2} a \cdot x\Big)\Big(a \cdot \Big(-\frac{a_0}{|a|^2} a\Big) + a_0\Big) = 0$$

より $E := |a|^{-1} e_{-\frac{a_0}{|a|^2}a} R_a^* E_0,\ e_{-\frac{a_0}{|a|^2}a}(x) := \exp\Big(-\frac{a_0}{|a|^2} a \cdot x\Big)$ としたものが基本解となる。また、この E は

$$\begin{aligned}\Big(({}^tR_a)^* e_{-\frac{a_0}{|a|^2}a}\Big)(x) &= \exp\Big(-\frac{a_0}{|a|^2} a \cdot {}^tR_a x\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{a_0}{|a|^2} R_a a \cdot x\Big) = \exp\Big(-\frac{a_0}{|a|} x_1\Big)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}E &= |a|^{-1} R_a^* \Big(\Big(({}^tR_a)^* e_{-\frac{a_0}{|a|^2}a}\Big) E_0\Big) \\ &= |a|^{-1} R_a^* \Big(\Big(\exp\big(-\frac{a_0}{|a|} x_1\big) H(x_1)\Big) \otimes \delta(x')\Big)\end{aligned}$$

とも表される。

2.3 時空二次元に於けるダランベール作用素

ここでは二次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ で考える。$H \otimes H \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ を

$$(H \otimes H)(x_1, x_2) = H(x_1)H(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

で定義する。このとき

$$\partial_1\partial_2(H \otimes H) = \partial_1(H \otimes \partial_2 H) = \partial_1 H \otimes \partial_2 H = H' \otimes H' = \delta \otimes \delta = \delta$$

となる。ここに最後の δ は $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ の元としての意味である。これより $H \otimes H$ は $\partial_1\partial_2$ の基本解である。さて $\mathbb{R}^2$ 内の線型変換 Φ を

$$\Phi(x_1, x_2) = \Big(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}}\Big), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

で定義する。

$$(\Phi \circ \Phi)(x_1, x_2) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\Big),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\Big)\Big) = (x_1, x_2)$$

より Φ は全単射で逆は同じ $\Phi^{-1} = \Phi$ であり、そのヤコビ行列は

$$\det \Phi'(x_1, x_2) = \det \begin{bmatrix} \partial_1\Phi_1 & \partial_2\Phi_1 \\ \partial_1\Phi_2 & \partial_2\Phi_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = -1$$

と計算される。さて Φ^* を Φ による引き戻しとすると

$$\partial_1\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^*(-\partial_1 + \partial_2),\ \partial_2\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi^*(\partial_1 + \partial_2)$$

となるから

$$\partial_1\partial_2\Phi^* = \frac{1}{2}\Phi^*(-\partial_1+\partial_2)(\partial_1+\partial_2) = \frac{1}{2}\Phi^*(\partial_1-\partial_2)$$
$$(\partial_2^2-\partial_1^2)\Phi^* = \frac{1}{2}\Phi^*\left((\partial_1+\partial_2)^2-(-\partial_1+\partial_2)^2\right) = 2\Phi^*\partial_1\partial_2$$

が従う。これより $(\Phi^*(H\otimes H))(x_1,x_2) = H\Bigl(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{2}}\Bigr)H\Bigl(\frac{x_2+x_1}{\sqrt{2}}\Bigr)$ で与えられる $\Phi^*(H\otimes H)$ は

$$\begin{aligned}(\partial_2^2-\partial_1^2)\Phi^*(H\otimes H) &= 2\Phi^*\partial_1\partial_2(H\otimes H) = 2\Phi^*(\delta\otimes\delta)\\ &= 2|\det\Phi'(0,0)|^{-1}(\delta\otimes\delta)_{\Phi^{-1}(0,0)}\\ &= 2\delta\otimes\delta = 2\delta\end{aligned}$$

を満たす。ここに最後の δ は $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ の元であり、式変形には $\delta\otimes\delta$ の Φ による引き戻し $\Phi^*(\delta\otimes\delta)$ の変換則と $\Phi^{-1}(0,0)=(0,0)$ なる関係式を用いた。これより $\dfrac{1}{2}\Phi^*(H\otimes H)$ は $\partial_2^2-\partial_1^2$ の基本解である。

さて $\Phi^*(H\otimes H)$ の台 $\mathrm{supp}\,(\Phi^*(H\otimes H)) = \mathrm{supp}\,((H\otimes H)\circ\Phi)$ は x_1 を空間軸及び x_2 を時間軸とする**前方光円錐** forward light cone

$$\begin{aligned}\Gamma_+ :=&\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ |x_1|\le x_2\} = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ \pm x_1\le x_2\}\\ =&\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ x_2-x_1\ge 0,\ x_2+x_1\ge 0\}\end{aligned}$$

に一致する。従って基本解 $E_+ := \dfrac{1}{2}\Phi^*(H\otimes H)$ の各点に於ける値は

$$E_+(x_1,x_2) = \begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x_1,x_2)\in\Gamma_+,\\ 0, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_+\end{cases}$$

となる。この各点表示された E_+ は任意の $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned}&\langle E_+,(\partial_2^2-\partial_1^2)\varphi\rangle\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_+(x_1,x_2)\partial_2^2\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_+(x_1,x_2)\partial_1^2\varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigl(\int_{|x_1|}^{+\infty}\partial_2^2\varphi(x_1,x_2)dx_2\Bigr)dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\Bigl(\int_{-x_2}^{x_2}\partial_1^2\varphi(x_1,x_2)dx_1\Bigr)dx_2\\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_2\varphi(x_1,|x_1|)dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\partial_1\varphi(x_2,x_2)-\partial_1\varphi(-x_2,x_2))dx_2\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\partial_2\varphi(x_1,x_1)dx_1 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\partial_2\varphi(x_1,-x_1)dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\partial_1\varphi(x_2,x_2)dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\partial_1\varphi(-x_2,x_2)dx_2\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\partial_2\varphi(y,y)+\partial_1\varphi(y,y))\,dy - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\partial_2\varphi(-y,y)-\partial_1\varphi(-y,y))\,dy\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dy}(\varphi(y,y))\,dy - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dy}(\varphi(-y,y))\,dy\\ &= \frac{1}{2}\varphi(0,0)+\frac{1}{2}\varphi(0,0) = \varphi(0,0) = \langle\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

を満たす。これは E_+ が $\partial_2^2 - \partial_1^2$ の基本解である事の別証である。

また E_+ は $\mathbb{R}^2$ の零集合 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\, x_1 = x_2 \geq 0\}$ を除いて

$$E_+(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(H(x_2 + x_1) - H(x_1 - x_2)\right) H(x_2)$$

と表示されるので $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 及び $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ に於ける表示として意味を持つ。さてこの右辺を E と表し $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ に於ける微分を実行すると

$$\begin{aligned}
\partial_1 E &= \frac{1}{2}\left(\delta(x_2 + x_1) - \delta(x_1 - x_2)\right) H(x_2),\\
\partial_1^2 E &= \frac{1}{2}\left(\delta'(x_2 + x_1) - \delta'(x_1 - x_2)\right) H(x_2),\\
\partial_2 E &= \frac{1}{2}\left(\delta(x_2 + x_1) + \delta(x_1 - x_2)\right) H(x_2) + \frac{1}{2}\left(H(x_2 + x_1) - H(x_1 - x_2)\right) \delta(x_2)\\
&= \frac{1}{2}\left(\delta(x_2 + x_1) + \delta(x_1 - x_2)\right) H(x_2),\\
\partial_2^2 E &= \frac{1}{2}\left(\delta'(x_2 + x_1) - \delta'(x_1 - x_2)\right) H(x_2) + \frac{1}{2}\left(\delta(x_2 + x_1) + \delta(x_1 - x_2)\right) \delta(x_2)
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
\partial_2^2 E - \partial_1^2 E &= \frac{1}{2}\left(\delta(x_2 + x_1) + \delta(x_1 - x_2)\right) \delta(x_2) = \frac{1}{2}\left(\delta(x_1) + \delta(x_1)\right) \delta(x_2)\\
&= \delta \otimes \delta = \delta
\end{aligned}$$

を得る。ここに最後の δ は $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ の元である。上の計算により、$E_+ = E$ が $\partial_2^2 - \partial_1^2$ の基本解である事が再び確かめられた。

一方、**後方光円錐** backward light cone

$$\begin{aligned}
\Gamma_- :=& \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 \leq -|x_1|\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 \leq \pm x_1\}\\
=& \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 - x_1 \leq 0,\ x_2 + x_1 \leq 0\}
\end{aligned}$$

を台とする $\partial_2^2 - \partial_1^2$ の基本解は

$$E_- := \frac{1}{2}\Phi^*(\check{H} \otimes \check{H})$$

で与えられる事は、等式

$$\partial_1\partial_2(\check{H} \otimes \check{H}) = \partial_1(\check{H} \otimes \partial_2\check{H}) = \partial_1\check{H} \otimes \partial_2\check{H} = (-\delta) \otimes (-\delta) = \delta$$

より従う。E_- の各点に於ける値は

$$E_-(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (x_1, x_2) \in \Gamma_-,\\ 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_- \end{cases}$$

である。この各点表示された E_- は任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\langle E_-, (\partial_2^2 - \partial_1^2)\varphi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_-(x_1, x_2)\partial_2^2\varphi(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_-(x_1, x_2)\partial_1^2\varphi(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{-|x_1|} \partial_2^2\varphi(x_1, x_2)dx_2\Big)dx_1 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\Big(\int_{x_2}^{-x_2} \partial_1^2\varphi(x_1, x_2)dx_1\Big)dx_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_2\varphi(x_1, -|x_1|)dx_1 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(\partial_1\varphi(-x_2, x_2) - \partial_1\varphi(x_2, x_2))dx_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\partial_2\varphi(x_1, -x_1)dx_1 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\partial_2\varphi(x_1, x_1)dx_1 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\partial_1\varphi(-x_2, x_2)dx_2 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\partial_1\varphi(x_2, x_2)dx_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (\partial_2\varphi(-y, y) - \partial_1\varphi(-y, y))\, dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (\partial_2\varphi(y, y) + \partial_1\varphi(y, y))\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dy}\,(\varphi(-y, y))\, dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dy}\,(\varphi(y, y))\, dy \\
&= \frac{1}{2}\varphi(0, 0) + \frac{1}{2}\varphi(0, 0) = \varphi(0, 0) = \langle \delta, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

を満たす。これは E_- が $\partial_2^2 - \partial_1^2$ の基本解である事の別証である。

また E_- は $\mathbb{R}^2$ の零集合 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 = -x_2 \geq 0\}$ を除いて

$$
E_-(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\,(H(x_1 - x_2) - H(x_2 + x_1))\, H(-x_2)
$$

と表示されるので $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 及び $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ に於ける表示として意味を持つ。さてこの右辺を E と表し $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ に於ける微分を実行すると

$$
\begin{aligned}
\partial_1 E &= \frac{1}{2}\,(\delta(x_1 - x_2) - \delta(x_2 + x_1))\, H(-x_2), \\
\partial_1^2 E &= \frac{1}{2}\,(\delta'(x_1 - x_2) - \delta'(x_2 + x_1))\, H(-x_2), \\
\partial_2 E &= \frac{1}{2}\,(-\delta(x_1 - x_2) - \delta(x_2 + x_1))\, H(-x_2) - \frac{1}{2}\,(H(x_1 - x_2) - H(x_2 + x_1))\, \delta(-x_2) \\
&= -\frac{1}{2}\,(\delta(x_1 - x_2) + \delta(x_2 + x_1))\, H(-x_2), \\
\partial_2^2 E &= \frac{1}{2}\,(\delta'(x_1 - x_2) - \delta'(x_2 + x_1))\, H(-x_2) + \frac{1}{2}\,(\delta(x_1 - x_2) + \delta(x_1 + x_2))\, \delta(-x_2)
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
\partial_2^2 E - \partial_1^2 E &= \frac{1}{2}\,(\delta(x_1 - x_2) + \delta(x_1 + x_2))\, \delta(x_2) = \frac{1}{2}\,(\delta(x_1) + \delta(x_1))\, \delta(x_2) \\
&= \delta \otimes \delta = \delta
\end{aligned}
$$

を得る。これで $E_- = E$ が $\partial_2^2 - \partial_1^2$ の基本解である事が再び確かめられた。

最後に、時空二次元に於けるダランベール作用素 $\partial_2^2 - \partial_1^2$ の基本解 $E_\pm$ を用いて一階の作用素 $\partial_2 \pm \partial_1$ の基本解を求めておこう。E_+ は

$$
(\partial_2 \pm \partial_1)(\partial_2 \mp \partial_1)E_+ = \delta
$$

を満たしているので $E_+^\pm := (\partial_2 \mp \partial_1)E_+$ は

$$(\partial_2 \pm \partial_1)E_+^\pm = \delta$$

を満たす。このとき $E_+^\pm$ は定義より

$$\begin{aligned}
E_+^+ &= (\partial_2 - \partial_1)E_+ \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta(x_1+x_2)+\delta(x_1-x_2)\right)H(x_2) - \frac{1}{2}\left(\delta(x_1+x_2)-\delta(x_1-x_2)\right)H(x_2) \\
&= \delta(x_2-x_1)H(x_2), \\
E_+^- &= (\partial_2 + \partial_1)E_+ \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta(x_1+x_2)+\delta(x_1-x_2)\right)H(x_2) + \frac{1}{2}\left(\delta(x_1+x_2)-\delta(x_1-x_2)\right)H(x_2) \\
&= \delta(x_2+x_1)H(x_2)
\end{aligned}$$

と表される。$E_+^\pm$ の台は $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, $\operatorname{supp} H = [0,+\infty)$ より

$$\operatorname{supp} E_+^\pm = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ x_2 = \pm x_1 \geq 0\}$$

で与えられる。これより

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} E_+^+ \cup \operatorname{supp} E_+^- &= \partial\Gamma_+ \\
&= \partial(\operatorname{supp} E_+)
\end{aligned}$$

が成立する。同様に $E_-^\pm := (\partial_2 \mp \partial_1)E_-$ は

$$(\partial_2 \pm \partial_1)E_-^\pm = \delta$$

を満たす。定義より $E_-^\pm$ は

$$\begin{aligned}
E_-^\pm &= (\partial_2 \mp \partial_1)E_- \\
&= -\frac{1}{2}\left(\delta(x_1-x_2)+\delta(x_2+x_1)\right)H(-x_2) \mp \frac{1}{2}\left(\delta(x_1-x_2)-\delta(x_2+x_1)\right)H(-x_2) \\
&= -\delta(x_1 \mp x_2)H(-x_2)
\end{aligned}$$

と表される。$E_-^\pm$ の台は

$$\operatorname{supp} E_-^* = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\ x_2 = \pm x_1 \leq 0\}$$

で与えられる。これより

$$\operatorname{supp} E_-^+ \cup \operatorname{supp} E_-^- = \partial\Gamma_- = \partial(\operatorname{supp} E_-)$$

が成立する。

2.4 二次元に於けるコーシー・リーマン及びラプラス作用素

二次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ で二つの作用素

$$\partial := \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \overline{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$$

を考える。後者 $\overline{\partial}$ を**コーシー・リーマン作用素** Cauchy-Riemann operator と謂う。勾配作用素 $\partial = (\partial_1, \partial_2)$ と混同する可能性を避ける為、以下では常に $\dfrac{1}{2}(\partial_1 \mp i\partial_2)$ と表す事にする。原点を除いた $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の函数

$$E_\pm(x_1, x_2) := \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{x_1 \pm ix_2}$$

の原点に於ける特異性は

$$|E_\pm(x_1, x_2)| = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

より $E_\pm \in L^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ であり、積分で制御可能である。特に $E_\pm \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ と見做す事が出来る。$E_\pm$ が $\dfrac{1}{2}(\partial_1 \pm i\partial_2)$ の基本解である事を示そう。任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned}
\langle(\partial_1 \pm i\partial_2)E_\pm, \varphi\rangle &= \langle\partial_1 E_\pm, \varphi\rangle \pm i\langle\partial_2 E_\pm, \varphi\rangle = -\langle E_\pm, \partial_1\varphi\rangle \mp i\langle E_\pm, \partial_2\varphi\rangle \\
&= -\langle E_\pm, (\partial_1 \pm i\partial_2)\varphi\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E_\pm(x_1, x_2)(\partial_1 \pm i\partial_2)\varphi(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1 \mp ix_2}{x_1^2 + x_2^2}\left(\partial_1\varphi(x_1, x_2) \pm i\partial_2\varphi(x_1, x_2)\right)dx_1dx_2 \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1\partial_1\varphi(x_1, x_2) + x_2\partial_2\varphi(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2}dx_1dx_2 \\
&\quad \pm \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1\partial_2\varphi(x_1, x_2) - x_2\partial_1\varphi(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2}dx_1dx_2
\end{aligned}$$

を得るので、問題は最後の二つの二重積分を求める事に帰着される。極座標

$$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \ni (r, \theta) \mapsto \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$$

を用いて $(x_1, x_2) = \Phi(r, \theta),\ \varphi(x_1, x_2) = (\Phi^*\varphi)(r, \theta)$ とすると二つの被積分函数は

$$\begin{aligned}
\frac{x_1\partial_1\varphi(x_1, x_2) + x_2\partial_2\varphi(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} &= \frac{1}{r}\partial_r(\Phi^*\varphi)(r, \theta), \\
\frac{x_1\partial_2\varphi(x_1, x_2) - x_2\partial_1\varphi(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2} &= \frac{1}{r^2}\partial_\theta(\Phi^*\varphi)(r, \theta)
\end{aligned}$$

と表されるから対応する積分は

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1\partial_1\varphi(x_1, x_2) + x_2\partial_2\varphi(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2}dx_1dx_2 \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \partial_r(\Phi^*\varphi)(r, \theta)drd\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\Phi^*\varphi)(0, \theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(0, 0)d\theta \\
&= 2\varphi(0, 0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mp \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_1\partial_2\varphi(x_1,x_2)-x_2\partial_1\varphi(x_1,x_2)}{x_1^2+x_2^2}dx_1dx_2 \\
&=\mp\frac{i}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\Big(\int_0^{2\pi}\partial_\theta(\Phi^*\varphi)(r,0)d\theta\Big)dr \\
&=\mp\frac{i}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{r}\left((\Phi^*\varphi)(r,2\pi)-(\Phi^*\varphi)(r,0)\right)dr=0
\end{aligned}
$$

と計算される。故に

$$
\Big\langle\frac{1}{2}(\partial_1\pm i\partial_2)E_\pm,\varphi\Big\rangle=\varphi(0,0)=\langle\delta,\varphi\rangle
$$

即ち $E_\pm$ が $\dfrac{1}{2}(\partial_1\pm i\partial_2)$ の基本解である事が示された。

これを用いて二次元**ラプラス作用素** Laplace operator $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2$ の基本解 E を求めよう。解くべき方程式 $\Delta E=\delta$ は

$$
\delta=(\partial_1-i\partial_2)(\partial_1+i\partial_2)E
$$

と表されるので

$$
(\partial_1+i\partial_2)E=\frac{1}{2}E_-=\frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{x_1-ix_2}=\frac{1}{2\pi}\ \frac{x_1+ix_2}{x_1^2+x_2^2}
$$

を満たす E を求めれば充分である。E が実数値函数ならば、この方程式は実部と虚部を比較して

$$
\partial_1E(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2},\quad \partial_2E(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\ \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}
$$

と書き換えられる。これらを満たす

$$
E(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi}\log(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{4\pi}\log|x|^2=\frac{1}{2\pi}\log|x|
$$

で与えられる E は $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ の元であり、計算を逆に辿る事により Δ の基本解である事が分かる。

2.5 三次元以上のラプラス作用素

三次元以上のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於けるラプラス作用素 $\Delta=\displaystyle\sum_{j=1}^n\partial_j^2$ の基本解 $E\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は

$$
E(x)=\frac{\Gamma(n/2)}{2(2-n)\pi^{n/2}}|x|^{2-n}
$$

で与えられる事は「ユークリッド空間に於けるラプラシアンの基本解」で詳説した。$n=3$ の場合の

$$
E(x)=-\frac{1}{4\pi|x|}
$$

は次節で用いる。

2.6　時空四次元に於けるダランベール作用素

四次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ を三次元空間 $\mathbb{R}^3$ と時間軸 $\mathbb{R}$ との直積空間と見做し空間変数及び時間変数を $x' = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 及び $x_4 \in \mathbb{R}$ で表す事にする。空間変数に関して動径対称な基本解を求めよう。便宜上 $r = |x'|$, $t = x_4$ とも表す。ダランベール作用素 $\Box = \partial_4^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 = \partial_t^2 - \Delta$ は t と r の変数に対して

$$\Box = \partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r$$

と表され

$$r\Box u = \partial_t^2(ru) - r\partial_r^2 u - 2\partial_r u = (\partial_t^2 - \partial_r^2)(ru)$$

となるから、基本解 $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^4)$ の候補として

$$u(x', x_4) = \frac{1}{|x'|}\left(F(x_4 + |x'|) + G(x_4 - |x'|)\right)$$

なる形をしたものが考えられる。そこで

$$u_\pm(x', x_4) = \frac{1}{|x'|}\delta(x_4 \pm |x'|)$$

と置き x' についての三次元ラプラス作用素 Δ を施すと

$$\begin{aligned}
\Delta u_\pm &= \Delta\Big(\frac{1}{|x'|}\Big)\delta(x_4 \pm |x'|) + 2\nabla\Big(\frac{1}{|x'|}\Big)\cdot\nabla\left(\delta(x_4 \pm |x'|)\right) + \frac{1}{|x'|}\Delta\left(\delta(x_4 \pm |x'|)\right) \\
&= -4\pi\delta(x')\delta(x_4 \pm |x'|) + 2\Big(-\frac{x'}{|x'|^3}\Big)\cdot\Big(\pm\frac{x'}{|x'|}\delta'(x_4 \pm |x'|)\Big) \\
&\quad + \frac{x'}{|x'|}\mathrm{div}\Big(\pm\frac{x'}{|x'|}\delta'(x_4 \pm |x'|)\Big) \\
&= -4\pi\delta(x')\delta(x_4) \mp \frac{2}{|x'|^2}\delta'(x_4 \pm |x'|) \\
&\quad \pm \frac{1}{|x'|}\Big(\frac{2}{|x'|}\delta'(x_4 \pm |x'|) + \frac{x'}{|x'|}\cdot\Big(\pm\frac{x'}{|x'|}\delta''(x_4 \pm |x'|)\Big)\Big) \\
&= -4\pi\delta + \frac{1}{|x'|}\delta''(x_4 \pm |x'|)
\end{aligned}$$

と計算される。一方

$$\partial_4^2 u_\pm = \frac{1}{|x'|}\delta''(x_4 \pm |x'|)$$

であるから

$$\Box u_\pm = (\partial_4^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2)u_\pm = 4\pi\delta$$

となる。即ち

$$E_\pm := \frac{1}{4\pi|x'|}\delta(x_4 \pm |x'|)$$

は $\Box$ の基本解である。これはまた任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4;\mathbb{C})$ に対する等式

$$\langle E_\pm,\ \Box\varphi\rangle = \langle\delta, \varphi\rangle$$

からも確かめられる。実際

$$\langle E_\pm,\ \Box\varphi\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}(\Box\varphi)(x',\pm|x'|)\frac{1}{|x'|}dx'$$

における $(\Box\varphi)(x',\pm|x'|)$ は

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\varphi(x',\pm|x'|)\right) = \operatorname{div}\Big(\nabla\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{x'}{|x'|}\partial_4\varphi(x',\pm|x'|)\Big)\\
=& \Delta\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{x'}{|x'|}\cdot\nabla\partial_4\varphi(x',\pm|x'|) \pm \Big(\operatorname{div}\frac{x'}{|x'|}\Big)\partial_4\varphi(x',\pm|x'|)\\
&\pm \frac{x'}{|x'|}\cdot\Big(\nabla\partial_4\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{x'}{|x'|}\partial_4^2\varphi(x',\pm|x'|)\Big)\\
=& \Delta\varphi(x',\pm|x'|) \pm 2\frac{x'}{|x'|}\cdot\nabla\partial_4\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{2}{|x'|}\partial_4\varphi(x',\pm|x'|) + \partial_4^2\varphi(x',\pm|x'|)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&(\Box\varphi)(x',\pm|x'|) = \partial_4^2\varphi(x',\pm|x'|) - \Delta\varphi(x',\pm|x'|)\\
=&2\partial_4^2\varphi(x',\pm|x'|) - \Delta\left(\varphi(x',\pm|x'|)\right) \pm 2\frac{x'}{|x'|}\cdot\nabla\partial_4\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{2}{|x'|}\partial_4\varphi(x',\pm|x'|)
\end{aligned}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}
&4\pi\langle E_\pm,\ \Box\varphi\rangle\\
=& \int_{\mathbb{R}^3}(\Box\varphi)(x',\pm|x'|)\frac{1}{|x'|}dx'\\
=& 2\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\partial_4^2\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{x'}{|x'|}\cdot\nabla\partial_4\varphi(x',\pm|x'|) \pm \frac{1}{|x'|}\partial_4\varphi(x',\pm|x'|)\Big)\frac{1}{|x'|}dx'\\
&- \int_{\mathbb{R}^3}\Delta(\varphi(x',\pm|x'|))\frac{1}{|x'|}dx'\\
=& 2\int_{S^2}\int_0^{+\infty} r\Big(\partial_4^2\varphi(r\omega,\pm r) \pm \omega\cdot\nabla\partial_4\varphi(r\omega,\pm r) \pm \frac{1}{r}\partial_4\varphi(r\omega,\pm r)\Big)drd\sigma(\omega)\\
&- \int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x',\pm|x'|)\Delta\Big(\frac{1}{|x'|}\Big)dx'\\
=& 2\int_{S^2}\int_0^{+\infty}\partial_r\left(r\partial_r(\varphi(r\omega,\pm r)) - r\omega\cdot\nabla\varphi(r\omega,\pm r)\right)drd\sigma(\omega) + 4\pi\varphi(0,0)\\
=& 4\pi\langle\delta,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

となるからである。ここに

$$\begin{aligned}
&r\partial_4^2\varphi(r\omega,\pm r) \pm r\omega\cdot\nabla\partial_4\varphi(r\omega,\pm r) \pm \partial_4\varphi(r\omega,\pm r)\\
=& r\left(\partial_r^2(\varphi(r\omega,\pm r)) - (\omega\cdot\nabla)^2\varphi(r\omega,\pm r) \mp 2\omega\cdot\nabla\partial_4\varphi(r\omega,\pm r)\right) \pm r\omega\cdot\nabla\partial_4\varphi(r\omega,\pm r)\\
&+ \left(\partial_r(\varphi(r\omega,\pm r)) - \omega\cdot\nabla\varphi(r\omega,\pm r)\right)\\
=& r\left(\partial_r^2(\varphi(r\omega,\pm r)) - (\omega\cdot\nabla)^2\varphi(r\omega,\pm r) \mp \omega\cdot\nabla\partial_4\varphi(r\omega,\pm r)\right)\\
&+ \partial_r(\varphi(r\omega,\pm r)) - \omega\cdot\nabla\varphi(r\omega,\pm r)\\
=& r\left(\partial_r^2(\varphi(r\omega,\pm r)) - \partial_r(\omega\cdot\nabla\varphi(r\omega,\pm r))\right) + \partial_r(\varphi(r\omega,\pm r)) - \omega\cdot\nabla\varphi(r\omega,\pm r)\\
=& \partial_r\left(r\partial_r(\varphi(r\omega,\pm r)) - r\omega\cdot\nabla\varphi(r\omega,\pm r)\right)
\end{aligned}$$

を用いた。

3　マルグランジュ・エーレンプレイスの定理の構成的証明

　フーリエ変数 $\xi \in \mathbb{R}^n$ の多項式 $P \in \mathbb{C}[\xi] \setminus \{0\}$ に対し $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び $(a_\alpha; |\alpha| \leq m) \subset \mathbb{C}$ が一意的に存在し任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$

及び $P_m \neq 0$ が成立する。ここに P_m は P の主部

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha$$

である。m を P の**次数** degree と謂い $m = \deg P$ と表す。変数 $\xi \in \mathbb{R}^n$ はそのまま $\xi \in \mathbb{C}^n$ として P は $\mathbb{C}^n$ 上の函数として拡張される。$\mathbb{R}^n$ 上の分布 $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は

$$P(-i\partial)E = \delta$$

を満たすとき P の基本解であると謂う。以下 $m \geq 1$ とする。

　任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し $e_\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ を

$$e_\zeta(x) = \exp(\zeta \cdot x) = \exp(\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

で定める。同じ記号 e_ζ を用いて $C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ に於ける掛算作用素

$$e_\zeta : C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto e_\zeta \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$$

及び

$$\langle e_\zeta T,\ \varphi \rangle = \langle T,\ e_\zeta \varphi \rangle, \quad T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$$

で定まる双対

$$e_\zeta : \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \ni T \longmapsto \langle e_\zeta T,\ \cdot \rangle \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

も表す事にする。また滑らかな急減少函数の成すフレシェ空間 $\mathscr{S}$ 上のフーリエ変換 $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ を

$$(\mathscr{F}\varphi)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix \cdot \xi)\varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

で定め、同じ記号で

$$\langle \mathscr{F}T,\ \varphi \rangle = \langle T,\ \mathscr{F}\varphi \rangle, \quad T \in \mathscr{S}', \quad \varphi \in \mathscr{S}$$

で定まる双対

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}' \ni T \longmapsto \langle \mathscr{F}T,\ \cdot \rangle \in \mathscr{S}'$$

も表す事にする。$\mathbb{R}^n$ 上の函数 φ の $y \in \mathbb{R}^n$ に依る**並進** translation by y を

$$(\tau_y \varphi)(x) = \varphi(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

で定まる函数 $\tau_y\varphi$ とする。さて任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\begin{aligned}
-i\partial_j(e_\zeta\varphi) &= e_\zeta(-i\partial_j\varphi - i\zeta_j\varphi) = e_\zeta\left(-i(\partial_j+\zeta_j)\right)\varphi,\\
(-i\partial_j)^k(e_\zeta\varphi) &= e_\zeta\left(-i(\partial_j+\zeta_j)\right)^k\varphi,\\
(-i\partial_j)^k(e_\zeta\varphi) &= \prod_{j=1}^n(-i\partial_j)^{\alpha_j}(e_\zeta\varphi) = e_\zeta\prod_{j=1}^n\left(-i(\partial_j+\zeta_j)\right)^{\alpha_j}\varphi,\\
&= e_\zeta\left(-i(\partial_j+\zeta)\right)^\alpha\varphi
\end{aligned}$$

となるから

$$P(-i\partial)(e_\zeta\varphi) = e_\zeta P\left(-i(\partial+\zeta)\right)\varphi$$

が成立する。これより $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上の等式

$$e_{-\zeta}P(-i\partial)e_\zeta = P\left(-i(\partial+\zeta)\right)$$

が成立する。フーリエ変換を用いれば $\mathscr{S}'$ 上の等式

$$P\left(-i(\partial+\zeta)\right) = \mathscr{F}^{-1}P(\cdot - i\zeta)\mathscr{F} = \mathscr{F}^{-1}(\tau_{i\zeta}P)\mathscr{F}$$

が成立する。さて m 次多項式 P は任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$P(\xi+\zeta) = P_m(\zeta) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j}\frac{\zeta^\alpha}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\xi), \quad \zeta \in \mathbb{R}^n$$

と分解される。実際 $\xi \in \mathbb{R}^n$ に於けるテイラー展開は有限和として

$$P(\xi+\zeta) = \sum_{|\alpha|\le m}\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!}\zeta^\alpha$$

で与えられ、最高次の項は

$$P^{(\alpha)}(\zeta) = (\partial^\alpha P)(\zeta) = \alpha! a_\alpha$$

より

$$\sum_{|\alpha|=m}\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!}\zeta^\alpha = \sum_{|\alpha|=m}a_\alpha\zeta^\alpha = P_m(\zeta)$$

となるからである。この分解は $\lambda \in \mathbb{C},\ \zeta \in \mathbb{C}^n$ によって

$$P(\xi+\lambda\zeta) = \lambda^m P_m(\zeta) + \sum_{j=0}^{m-1}\lambda^j\Big(\sum_{|\alpha|=j}\frac{\zeta^\alpha}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\xi)\Big)$$

と表す事も出来る。さて次の定理は基本的である。

定理 1. $P \in \mathbb{C}[\xi]$ に対し次は同値である。

(1) $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在し　$P(-i\partial)E = \delta$ を満たす。

(2) 任意の $Q \in \mathbb{C}[\xi]$ 及び任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し $E_{Q,\zeta} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在し $P(-i\partial)E_{Q,\zeta} = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta$ を満たす。

(3) $Q \in \mathbb{C}[\xi]$ が存在し任意の $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し $E_\zeta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在し $P(-i\partial)E_\zeta = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta$ を満たす。

(4) $Q \in \mathbb{C}[\xi]$ が存在し任意の $\zeta \in \mathbb{R}^n$ に対し $E_\zeta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在し $P(-i\partial)E_\zeta = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta$ を満たす。

(5) $Q \in \mathbb{C}[\xi]$ 及び $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ が存在し　$\ell(= \deg Q \geq 1)$ 次斉次の Q の主部 Q_ℓ に対し $Q_\ell(\omega) \neq 0$ 且つ任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $E_{\lambda\omega} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在し　$P(-i\partial)E_{\lambda\omega} = Q\left(-i(\partial+\lambda\omega)\right)\delta$ を満たす。

(6) $Q \in \mathbb{C}[\xi],\ \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$、相異なる実数から成る $\{\lambda_j;\, 0 \leq j \leq \ell\} \subset \mathbb{R},\ \{E_{\lambda_j\omega};\, 0 \leq j \leq \ell\} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ が存在し　$\ell(= \deg Q \geq 1)$ 次斉次の Q の主部 Q_ℓ に対し $Q_\ell(\omega) \neq 0$ 且つ任意の $j \in \{0, 1, \cdots, \ell\}$ に対し $P(-i\partial)E_{\lambda_j\omega} = Q\left(-i(\partial+\lambda_j\omega)\right)\delta$ が成立する。

上の同値な条件が満たされている場合 (2) の $Q \in \mathbb{C}[\xi],\ \zeta \in \mathbb{C}^n$ に対する $E_{Q,\zeta}$ は (1) の E により

$$E_{Q,\zeta} = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)E$$

で与えられ (1) の E は (6) の $Q \in \mathbb{C}[\xi],\ \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \{\lambda_j;\, 0 \leq j \leq \ell\} \subset \mathbb{R},\ \{E_{\lambda_j\omega};\, 0 \leq j \leq \ell\} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ により

$$E = \frac{1}{Q_\ell(-i\omega)} \sum_{j=0}^{\ell} \Big(\prod_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \neq j}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \Big) E_{\lambda_j\omega}$$

で与えられる。

（定理 1 の証明）(1) $\Rightarrow$ (2)：任意の $Q \in \mathbb{C}[\xi]$ 及び $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し $E_{Q,\zeta} := Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)E$ と置くと $E_{Q,\zeta} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ であり

$$\begin{aligned} P(-i\partial)E_{Q,\zeta} &= P(-i\partial)Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)E = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)P(-i\partial)E \\ &= Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta \end{aligned}$$

が成立する。

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) は明らかである。

(6) $\Rightarrow$ (1)：$Q \in \mathbb{C}[\xi]$ を $\lambda \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ によって

$$Q(\xi+\lambda\omega) = \lambda^\ell Q_\ell(\omega) + \sum_{j=0}^{\ell-1} \lambda^j \Big(\sum_{|\alpha|=j} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!} Q^{(\alpha)}(\xi) \Big)$$

と分解し、対応する $Q\left(-i(\partial+\lambda\omega)\right)$ を

$$Q(-i(\partial+\lambda\omega)) = (-i\lambda)^\ell Q_\ell(\omega) + \sum_{j=0}^{\ell-1} (-i\lambda)^j \Big(\sum_{|\alpha|=j} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!} Q^{(\alpha)}(-i\partial) \Big)$$

と表して置こう。両辺を δ に作用させ

$$Q(-i(\partial+\lambda\omega))\delta=(-i)^\ell\lambda^\ell Q_\ell(\omega)\delta+\sum_{j=0}^{\ell-1}\lambda^j T_j$$

を得る。ここに

$$T_j=(-i)^j\sum_{|\alpha|=j}\frac{\omega^\alpha}{\alpha!}Q^{(\alpha)}(-i\partial)\delta\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

とする。さて仮定された $(\lambda_j;\,0\leq j\leq\ell)$ を取り $c_j:=\displaystyle\prod_{\substack{0\leq k\leq\ell\\ k\neq j}}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}$ と置く。

このとき $(c_j;\,0\leq j\leq\ell)$ は

$$\sum_{j=0}^{\ell}c_j\lambda_j^m=\delta_{\ell m}$$

を満たす。そこで $E_0\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ を

$$E_0:=\sum_{j=0}^{\ell}c_jE_{\lambda_j\omega}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
P(-i\partial)E_0&=\sum_{j=0}^{\ell}c_jP(-i\partial)E_{\lambda_j\omega}=\sum_{j=0}^{\ell}c_jQ\left(-i(\partial+\lambda_j\omega)\right)\delta\\
&=\sum_{j=0}^{\ell}c_j\Big((-i)^\ell\lambda_j^\ell Q_\ell(\omega)\delta+\sum_{k=0}^{\ell-1}\lambda_j^kT_k\Big)\\
&=(-i)^\ell\Big(\sum_{j=0}^{\ell}c_j\lambda_j^\ell\Big)Q_\ell(\omega)\delta+\sum_{k=0}^{\ell-1}\Big(\sum_{k=0}^{\ell-1}c_j\lambda_j^k\Big)T_k\\
&=(-i)^\ell Q_\ell(\omega)\delta
\end{aligned}$$

となるので E_0 を $(-i)^\ell Q_\ell(\omega)=Q_\ell(-i\omega)\neq0$ で割った

$$E:=\frac{1}{Q_\ell(-i\omega)}\sum_{j=0}^{\ell}c_jE_{\lambda_j\omega}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

は $P(-i\partial)E=\delta$ を満たす。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

　以上より $P(-i\partial)$ の基本解の存在の問題は

$$P(-i\partial)E_\zeta=Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta$$

を満たす $Q\in\mathbb{C}[\xi]$ と $(E_\zeta;\zeta\in\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ の存在の問題に帰着された。そこで E_ζ を

$$E_\zeta=e_\eta\mathscr{F}^{-1}\sigma,\quad\eta\in\mathbb{R}^n,\quad\sigma\in\mathscr{S}'$$

の形で求めよう。$\delta = e_\eta \delta$ であるから右辺は

$$Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)e_\eta\delta = e_\eta Q\left(-i(\partial+\zeta-\eta)\right)\delta$$

であり左辺は E_ζ の定義より

$$P(-i\partial)E_\zeta = P(-i\partial)e_\eta \mathscr{F}^{-1}\sigma = e_\eta P\left(-i(\partial-\eta)\right)\mathscr{F}^{-1}\sigma$$

と表される。従って問題は

$$\begin{aligned}
&P(-i\partial)E_\zeta = Q\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta \\
\Longleftrightarrow\ & P\left(-i(\partial-\eta)\right)\mathscr{F}^{-1}\sigma = Q\left(-i(\partial+\zeta-\eta)\right)\delta \\
\Longleftrightarrow\ & \mathscr{F}P\left(-i(\partial-\eta)\right)\mathscr{F}^{-1}\sigma = \mathscr{F}Q\left(-i(\partial+\zeta-\eta)\right)\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\delta \\
\Longleftrightarrow\ & (\tau_{-i\eta}P)\sigma = (\tau_{i(\zeta-\eta)}Q)\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \\
\Longleftrightarrow\ & P(\xi+i\eta)\sigma(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}Q\left(\xi-i(\zeta-\eta)\right) \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

と同値な形に書き換えられ σ は Q を P で割った形で与えられる事が期待される。P と Q に対する変数の依存度を同等に保つ為 $\eta = \dfrac{1}{2}\zeta$ とすると最後の方程式は

$$P(\xi+\frac{i}{2}\zeta)\sigma(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}Q\Big(\xi-\frac{i}{2}\zeta\Big) \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n$$

と表される。そこで Q を

$$\overline{P}(\xi) := \sum_{|\alpha|\le m}\overline{a_\alpha}\xi^\alpha$$

で与えられる $\overline{P}\in\mathbb{C}[\xi]$ とすると

$$Q\Big(\xi-\frac{i}{2}\zeta\Big) = \overline{P}\Big(\xi-\frac{i}{2}\zeta\Big) = \overline{P\Big(\xi+\frac{i}{2}\zeta\Big)}$$

となって $\sigma=\sigma_\zeta$ は

$$\sigma_\zeta(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\overline{P\Big(\xi+\frac{i}{2}\zeta\Big)}}{P\Big(\xi+\frac{i}{2}\zeta\Big)}, \quad \xi\in\mathbb{R}^n$$

即ち

$$\sigma_\zeta := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\frac{\overline{\tau_{-\frac{i}{2}\zeta}P}}{\tau_{-\frac{i}{2}\zeta}P} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{sign}\Big(\tau_{-\frac{i}{2}\zeta}P\Big)$$

で求まった事になる。ここに $\mathrm{sign}z = \dfrac{\overline{z}}{z}$ とする。この形より $\sigma_\zeta\in L^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{S}'$ である。ここに分母 $\tau_{-\frac{i}{2}\zeta}P$ の零点は分子 $\overline{\tau_{-\frac{i}{2}\zeta}P} = \tau_{\frac{i}{2}\zeta}\overline{P}$ の零点と位数も込めて一致するので、その点で σ_ζ の値を 1 と定義したと見做すものとする。以上より

$$E_\zeta := e_{\frac{1}{2}\zeta}\mathscr{F}^{-1}\sigma_\zeta = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e_{\frac{1}{2}\zeta}\mathscr{F}^{-1}\Big(\mathrm{sign}\Big(\tau_{-\frac{i}{2}\zeta}P\Big)\Big)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

は

$$P(-i\partial)E_\zeta = \overline{P}\left(-i(\partial+\zeta)\right)\delta$$

を満たす事が分かる。定理１より

$$E := \frac{1}{\overline{P}_m(-i\omega)} \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{\substack{0\le k\le m \\ k\neq j}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right) E_{\lambda_j \omega}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{P_m(i\omega)}} \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{\substack{0\le k\le m \\ k\neq j}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right) e_{\frac{1}{2}\lambda_j\omega} \mathscr{F}^{-1}\Big(\mathrm{sign}\Big(\tau_{-\frac{i}{2}\lambda_j\omega} P\Big)\Big)$$

は $P(-i\partial)$ の基本解である。ここに $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は $P_m(\omega) \neq 0$ を満たす点であり $\{\lambda_j; 0 \le j \le m\}$ は相異なる $(m+1)$ 個の実数である。これを定理の形に纏めて置こう。

定理 2. **（マルグランジュ・エーレンプレイスの定理** The Malgrange-Ehrenpreis Theorem）
$P \in \mathbb{C}[\xi] \setminus \{0\}$ を m 次の n 変数多項式とし $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ を P の主部 P_m の零点でないとする。$\{\lambda_j; 0 \le j \le m\}$ を相異なる $(m+1)$ 個の実数とする。このとき

$$E := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{P_m(i\omega)}} \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{\substack{0\le k\le m \\ k\neq j}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right) e_{\frac{1}{2}\lambda_j\omega} \mathscr{F}^{-1}\Big(\mathrm{sign}\Big(\tau_{-\frac{i}{2}\lambda_j\omega} P\Big)\Big) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$$

は $P(-i\partial)E = \delta$ を満たす。

参考文献：

小澤徹，ユークリッド空間に於けるラプラシアンの基本解
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/Laplacian.pdf

小澤徹，曲面上のディラック分布
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/Dirac distribution on surfaces.pdf

J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, “ Distributions,” Birkhäuser.

L. Ehrenpreis, Solution of some problems of division. Part I. Division by a polynomial of derivation, Amer. J. Math., **76** (1954), 883-903.

L. Ehrenpreis, Solution of some problems of division. Part Ⅱ. Division by a punctual distribution, Amer. J. Math., **77** (1955), 286-292.

L. Hörmander, “ The Analysis of Linear Partial Differential Operators Ⅱ: Differential Operators with Constant Coefficients,” Springer.

H. Leinfelder, Zum Satz von Malgrange-Ehrenpreis, 2012,
th-nuernberg. de/person/leinfelder-herbert/

B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Imst. Fourier **6** (1955/56), 271-355.

P. Wagner, A new constructive proof of the Malgrange-Ehrenpreis theorem, Amer. Math. Monthly, **116** (2009), 457-462.