

ガリレイ時空

平成 22 年 9 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

1. ガリレイ時空の定義：時間と空間の分離

実ベクトル空間 V を基準ベクトル空間とするアフィン空間 X がガリレイ時空 Galilean spacetime であるとは、零でない線型形式 $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し、 V の部分空間 $\text{Ker } T$ 自身がノルム空間であることと定義する。 X の点を事象 event と呼び T を時間間隔と呼ぶ。事象 p と q とが同時であるとは p と q の差 $q - p$ の時間間隔が 0 であること、即ち $q - p \in \text{Ker } T$ であることと定義する。事象 $p \in X$ に対し同時事象の全体を X_p と表す：

$$\begin{aligned} X_p &= \{q \in X; q - p \in \text{Ker } T\} \\ &= \{q \in X; T(q - p) = 0\} \end{aligned}$$

ノルム空間 $\text{Ker } T$ のノルムを $\|\cdot\|$ と表そう。

事象 p に対する同時事象の空間 X_p に於いて

$$d_p(q, r) = \|q - r\|, \quad q, r \in X_p$$

と置くと写像 $d_p : X_p \times X_p \rightarrow \mathbb{R}$ が定まる。

命題 1 X_p は $\text{Ker } T$ を基準ベクトル空間とする X の部分アフィン空間であり d_p は X_p の平行移動に関して不変な距離である。

(証明) 任意の $p' \in X_p$ を一つ取る。このとき $p' - p \in \text{Ker } T$ であるから

$$\begin{aligned} q \in X_p &\Leftrightarrow q - p \in \text{Ker } T \\ &\Leftrightarrow q - p' = (q - p) + (p - p') \in \text{Ker } T \\ &\Leftrightarrow q \in p' + \text{Ker } T \end{aligned}$$

即ち $X_p = p' + \text{Ker } T$ となり X_p は $\text{Ker } T$ を基準ベクトル空間とする X のアフィン部分空間であることが従う。

$q, r \in X_p, u \in \text{Ker } T$ に対し

$$(q + u) - (r + u) = q - r$$

であるから $d_p(q + u, r + u) = d_p(q, r)$ となり d_p は X_p の平行移動に関して不変である。 d_p が X_p 上の距離となることは、 $\text{Ker } T$ がノルム空間となることより従う。

線型形式 $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ は零ではないので $\text{Ker } T \subsetneq V$ となり $v_0 \in V \setminus \text{Ker } T$ なる元 v_0 が存在する。この v_0 は $T(v_0) \neq 0$ かつ $v_0 \neq 0$ である。そこで写像

$$\varphi : \mathbb{R} \times \text{Ker } T \ni (t, u) \mapsto u + tv_0 \in V$$

を考える。ここに $\mathbb{R} \times \text{Ker } T$ は二つのベクトル空間 \mathbb{R} と $\text{Ker } T$ との積ベクトル空間と考える。このとき φ は線型写像となる：

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda(t, u) + \lambda'(t', u')) &= \varphi(\lambda t + \lambda' t', \lambda u + \lambda' u') \\ &= \lambda u + \lambda' u' + (\lambda t + \lambda' t') v_0 \\ &= \lambda(u + t v_0) + \lambda'(u' + t' v_0) \\ &= \lambda \varphi(t, u) + \lambda' \varphi(t', u')\end{aligned}$$

また $v \in V$ に対し

$$\psi(v) = \left(\frac{T(v)}{T(v_0)}, v - \frac{T(v)}{T(v_0)} v_0 \right)$$

と置くと ψ は V から $\mathbb{R} \times \text{Ker } T$ への線型写像となり $v \in V$ 及び $(t, u) \in \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ に対し等式

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(v) &= \left(v - \frac{T(v)}{T(v_0)} v_0 \right) + \frac{T(v)}{T(v_0)} v_0 = v \\ (\psi \circ \varphi)(t, u) &= \left(\frac{T(u + t v_0)}{T(v_0)}, (u + t v_0) - \frac{T(u + t v_0)}{T(v_0)} v_0 \right) \\ &= \left(\frac{T(t v_0)}{T(v_0)}, (u + t v_0) - \frac{T(t v_0)}{T(v_0)} v_0 \right) = (t, u)\end{aligned}$$

が成立つので $\psi = \varphi^{-1}$ となり $\varphi : \mathbb{R} \times \text{Ker } T \rightarrow V$ は線型同型写像となる。ガリレイ時空 X の基準ベクトル空間 V の元 v は

$$v = \frac{T(v)}{T(v_0)} v_0 + \left(v - \frac{T(v)}{T(v_0)} v_0 \right)$$

の様に、線型形式としての時間間隔 T によって、時間 $T(v)/T(v_0)$ と空間 $v - (T(v)/T(v_0))v_0$ とに分解される。この分解は v_0 の取り方に依存する。 $\dim(V/\text{Ker } T) = 1$ なので v_0 の取り方は定数倍の任意性がある。定数倍は時間のスケールに対応する。スケールの規格化には $\|v_0\| = 1$ なる v_0 を用いれば良いが、それでも正負 $\pm v_0$ の不定性は残る。正負をどちらか一方に定めることは時間軸の正負を定めることに相当する。

線型同型写像 $\psi : V \rightarrow \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ を $v_0 \in V \setminus \text{Ker } T$ に伴う時空表示と謂う。

2 . ガリレイ変換とその構造

定義 ガリレイ時空 X 内の写像 $g : X \rightarrow X$ は次の三つの条件を満たすときガリレイ変換であると謂う。

(G 1) (アフィン同型) $A_g \in GL(V)$ が存在し任意の $p, q \in X$ に対し $g(p) - g(q) = A_g(p - q)$

(G 2) (時間間隔の保存) 任意の $p, q \in X$ に対し $T(g(p) - g(q)) = T(p - q)$

(G 3) (同時事象間の距離の保存) 任意の $p \in X$ に対し $g(X_p) \subset X_{g(p)}$ であり任意の $q, r \in X_p$ に対し

$$d_{g(p)}(g(q), g(r)) = \|g(q) - g(r)\| = \|q - r\| = d_p(q, r)$$

註1 写像 $g : X \rightarrow X$ がガリレイ変換であるとき (G 3) の条件 $g(X_p) \subset X_{g(p)}$ は

$g(X_p) = X_{g(p)}$ に強められる。実際、任意の $q \in X_{g(p)}$ に対し (G 1) より $g^{-1}(q)$ が X 内に定まるので $r = g^{-1}(q)$ とすると (G 2) より $T(r - p) = T(g(r) - g(p)) = T(q - g(p)) = 0$ となるので $r \in X_p$ であり $q = g(r) \in g(X_p)$ となる。

註2 (G 1) の $A_g \in GL(V)$ は g に対して一意的に定まる。

定理 1 (ガリレイ変換の構造定理) 基準ベクトル空間を V とするガリレイ時空 X に於いて $v_0 \in V \setminus \text{Ker } T$ を一つ固定し対応する時空表示を $\psi : V \rightarrow \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ とする。このとき X 内の任意のガリレイ変換 $g : X \rightarrow X$ に対し $u_0 \in \text{Ker } T$ 及び線型同型等長写像 $A : \text{Ker } T \rightarrow \text{Ker } T$ が唯一つ定まり任意の $(t, u) \in \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ に対し

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A_g} & V \\ \psi \downarrow \uparrow \varphi & & \psi \downarrow \uparrow \varphi \\ \mathbb{R} \times \text{Ker } T & \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi} & \mathbb{R} \times \text{Ker } T \\ \cup & & \cup \\ (t, u) & \longmapsto & (t, tu_0 + Au) \end{array}$$

$$(\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t, u) = (t, tu_0 + Au)$$

が成立つ。

註 u_0 はガリレイ変換に於ける等速度運動の定速度ベクトルに対応し、空間 $\text{Ker } T$ のノルムが内積から導かれる場合には A は広義回転 (直交変換) に対応する。

(証明) 積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times \text{Ker } T$ に於いて自然に定まる射影 $\pi_1 : \mathbb{R} \times \text{Ker } T \rightarrow \mathbb{R}$ 及び $\pi_2 : \mathbb{R} \times \text{Ker } T \rightarrow \text{Ker } T$ をそれぞれ $\pi_1(t, u) = t$ 及び $\pi_2(t, u) = u$ で定め、自然に定まる埋め込み $\iota_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ 及び $\iota_2 : \text{Ker } T \rightarrow \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ をそれぞれ $\iota_1(t) = (t, 0)$ 及び $\iota_2(u) = (0, u)$ で定める。さて

$$\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi : \mathbb{R} \times \text{Ker } T \rightarrow \mathbb{R} \times \text{Ker } T$$

は線型であるから任意の $(t, u) \in \mathbb{R} \times \text{Ker } T$ に対し

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t, u) &= (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t(1, 0) + (0, u)) \\ &= t(\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) + (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(0, u) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} a &= (\pi_1 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) \in \mathbb{R} \\ u_0 &= (\pi_2 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) \in \text{Ker } T \\ \ell &= \pi_1 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi \circ \iota_2 : \text{Ker } T \rightarrow \mathbb{R} \\ A &= \pi_2 \circ \varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi \circ \iota_2 : \text{Ker } T \rightarrow \text{Ker } T \end{aligned}$$

と置くと等式

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(1, 0) &= (a, u_0) \\ (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(0, u) &= (\ell(u), Au) \\ (\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t, u) &= (ta + \ell(u), tu_0 + Au) \end{aligned}$$

が成立つ。

任意の $u \in \text{Ker } T$, $p \in X$ に対し $p+u \in X_p$ であるから (G 2) より $T(g(p+u) - g(p)) = T((p+u) - p) = T(u) = 0$ が従う。 ψ の定義より $\psi(g(p+u) - g(p)) = (0, g(p+u) - g(p))$ となり

$$\begin{aligned} \ell(u) &= (\pi_1 \circ \psi \circ A_g \circ \varphi \circ \iota_2)(u) = (\pi_1 \circ \psi)(A_g(u)) \\ &= (\pi_1 \circ \psi)(A_g((p+u) - p)) \\ &= (\pi_1 \circ \psi)(g(p+u) - g(p)) = 0 \end{aligned}$$

を得る。 $u \in \text{Ker } T$ は任意だったので $\ell = 0$ が従う。

任意の $t \in \mathbb{R}$, $u \in \text{Ker } T$, $p \in X$ に対し $\varphi(t, u) = u + tv_0$ であるから $T(\varphi(t, u)) = tT(v_0)$ であり $T(\varphi(t, u)) = T((p + \varphi(t, u)) - p) = T(g(p + \varphi(t, u)) - g(p)) = TA_g((p + \varphi(t, u)) - p) = TA_g\varphi(t, u) = TA_g(t\varphi(1, 0) + \varphi(0, u)) = T(tA_g\varphi(1, 0) + A_g\varphi(0, u)) = T(t\varphi(a, u_0) + \varphi(0, Au)) = T(t(u_0 + av_0) + Au) = atT(v_0)$ であるから $a = 1$ を得る。これより等式

$$(\varphi^{-1} \circ A_g \circ \varphi)(t, u) = (t, tu_0 + Au)$$

が成立つ。このような $u_0 \in \text{Ker } T$ および線型写像 $A : \text{Ker } T \rightarrow \text{Ker } T$ がもう一組あったとして u'_0, A' と表すと任意の $t \in \mathbb{R}$ 及び $u \in \text{Ker } T$ に対し $tu_0 + Au = tu'_0 + A'u$ が成立つことになる。 $t \neq 0, u = 0$ とすれば $u_0 = u'_0$ が従い $t = 0$ とすれば $A = A'$ が従う。

定理 2 ガリレイ時空 X に於けるガリレイ変換の全体を $G(X)$ とすると写像の合成に就いて $G(X)$ は群を成す。

(証明) $g, h \in G(X)$ に対し $g \circ h \in G(X)$ となる事を示そう。任意の $p, q \in X$ に対し

$$\begin{aligned} (g \circ h)(p) - (g \circ h)(q) &= g(h(p)) - g(h(q)) \\ &= A_g(h(p) - h(q)) \\ &= A_g A_h(p - q) \end{aligned}$$

であり $A_g A_h \in GL(V)$ であるから $A_{g \circ h} = A_g A_h$ として (G 1) が成立つ。
また

$$\begin{aligned} T((g \circ h)(p) - (g \circ h)(q)) &= T(g(h(p)) - g(h(q))) \\ &= T(h(p) - h(q)) \\ &= T(p - q) \end{aligned}$$

より (G 2) が従う。更に $(g \circ h)(X_p) = g(h(X_p)) = g(X_{h(p)}) = X_{g(h(p))} = X_{(g \circ h)(p)}$ であり任意の $q, r \in X_p$ に対し

$$\begin{aligned} d_{(g \circ h)(p)}((g \circ h)(q), (g \circ h)(r)) &= \|(g \circ h)(q) - (g \circ h)(r)\| \\ &= \|h(q) - h(r)\| \\ &= \|q - r\| = d_p(q, r) \end{aligned}$$

より (G 3) を得る。

$g \in G(X)$ に対し $g^{-1} \in G(X)$ となる事を示そう。任意の $p, q \in X$ に対し

$$p - q = A_g^{-1}(g(p) - g(q))$$

となるから任意の $p', q' \in X$ に対し

$$g^{-1}(p') - g^{-1}(q') = A_g^{-1}(p' - q')$$

となり $A_{g^{-1}} = A_g^{-1}$ として (G 1) が成立つ。また

$$T(g(p) - g(q)) = T(p - q)$$

より

$$T(p' - q') = T(g^{-1}(p') - g^{-1}(q'))$$

となり (G 2) が従う。更に $g(X_p) = X_{g(p)}$ より $X_p = g^{-1}(X_{g(p)})$ となり $g^{-1}(X_{p'}) = X_{g^{-1}(p')}$ であり任意の $g', r' \in X_{p'}$ に対し等式

$$\begin{aligned} d_{p'}(q', r') &= \|q' - r'\| \\ &= \|g^{-1}(q') - g^{-1}(r')\| \\ &= d_{g^{-1}(p')}(g^{-1}(q'), g^{-1}(r')) \end{aligned}$$

が成立つので (G 3) を得る。

定義 ガリレイ時空 X に於けるガリレイ変換全体の成す変換群 $G(X)$ をガリレイ群と謂う。

3 . ガリレイ時空の直積表示

ガリレイ時空 X の中に一点 p を取り固定する。点 p に関する X の点の位置ベクトルの全体 $V_p = \{(p, q - p); q \in X\}$ は、 X の基準ベクトル空間 V と線型同型写像 $\pi_p : (p, v) \mapsto v$ で同一視される。 π_p によってベクトル空間 V の原点と点 $p \in X$ とが同一視され、ガリレイ時空 X の点 $q = p + v$ は V_p の点 v によって記述される。時間のスケール及び向きを与える $v_0 \in V \setminus \text{Ker } T$ を一つ取り固定する。線型同型写像 $\varphi_{v_0} : \mathbb{R} \times \text{Ker } T \ni (t, u) \mapsto u + tv_0 \in V$ によって基準ベクトル空間 V は直積空間 $\mathbb{R} \times \text{Ker } T$ と同一視される。 π_p と φ_{v_0} によってガリレイ時空 X の点は直積空間 $\mathbb{R} \times \text{Ker } T$ の点によって記述される。

逆に一つのノルム空間 E が与えられたとき積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times E$ をアフィン空間と見做してガリレイ時空 $\mathbb{R} \times E$ を定義することが出来る。このとき時間間隔 T は $T : \mathbb{R} \times E \ni (t, x) \mapsto t \in \mathbb{R}$ で与えられ $\text{Ker } T = E \times \{0\}$ なる関係が従う。時間のスケール及び向きを与える $v_0 \in (\mathbb{R} \times E) \setminus \text{Ker } T$ は $(1, 0) \in \mathbb{R} \times E$ である。

そこで、この節では前節迄のガリレイ時空 X の議論を時間変数の成す \mathbb{R} と空間変数の成すノルム空間 E との直積空間 $\mathbb{R} \times E$ に対して捉え直してみる事にしよう。

先ず、二つの事象 (t, x) と (s, y) とが同時であるとは $t = s$ である事に外ならない。よって同時事象の空間は時刻 $t \in \mathbb{R}$ によって特徴付ける事が出来

$$E_t = \{t\} \times E = \{(t, x); x \in E\}$$

で与えられる。同時事象空間 E_t の任意の二点 $q = (t, x), r = (t, y)$ の距離は

$$d_t(q, r) = \|x - y\|$$

で与えられる。

また、写像 $g : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times E$ がガリレイ変換であるとは次の三つの条件が成立つ事と言
い換えられる：

(G 1)' $(s_g, y_g) \in \mathbb{R} \times E$ と $A_g \in GL(\mathbb{R} \times E)$ が存在し、任意の $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ に対し
 $g(t, x) = (s_g, y_g) + A_g(t, x)$

(G 2)' 任意の $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times E$ に対し

$$T(g(t, x) - g(s, y)) = T((t, x) - (s, y)) = T(t - s, x - y) = t - s$$

(G 3)' 任意の $t \in \mathbb{R}$ 及び任意の $(t, x), (t, y) \in E_t$ に対し $t' \in \mathbb{R}$ が存在し $g(t, x), g(t, y) \in E_{t'}$
であり $g(t, x) = (t', x'), g(t, y) = (t', y')$ と表したとき $\|x' - y'\| = \|x - y\|$

ガリレイ変換の例を挙げよう：

例 1 (時空並進) $(s, y) \in \mathbb{R} \times E$ に対し $g_{s,y} : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times E$ が $g_{s,y}(t, x) = (t + s, x + y)$,
 $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ により定まり、一つのガリレイ変換となる。

例 2 (等速度運動) $v \in E$ に対し $g_v : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times E$ が $g_v(t, x) = (t, x + tv)$,
 $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ により定まり、一つのガリレイ変換となる。

例 3 (全単射等長変換) 全単射等長変換 $A : E \rightarrow E$ に対し $g_A : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times E$ が
 $g_A(t, x) = (t, Ax), (t, x) \in \mathbb{R} \times E$ により定まり、一つのガリレイ変換となる。

ガリレイ変換の構造定理 (定理 1) は、直積時空 $\mathbb{R} \times E$ に於ける任意のガリレイ変換 g は
 $v \in E, (s, y) \in \mathbb{R} \times E, A \in \text{Iso}(E)$ によって

$$g = g_v \circ g_{s,y} \circ g_A$$

と一意的に表示される事を示している。ここに $\text{Iso}(E)$ は E 上の全単射等長変換の成す変換
群とする。

最後に、直積ガリレイ時空 $\mathbb{R} \times E$ に於けるニュートンの運動方程式に対するガリレイ変換の
作用により等速度運動を特徴付けよう。空間 E に於ける質点の運動は、時間を変数とする写
像 $x : \mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in E$ で与えられるものとする。このときガリレイ変換 $g : \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R} \times E$
による x の変換 $x_g : \mathbb{R} \rightarrow E$ を

$$x_g(t) = y + tv + A(x(t - s)), t \in \mathbb{R}$$

で定義する。ここに $v \in E, (s, y) \in \mathbb{R} \times E, A \in \text{Iso}(E)$ は $g = g_v \circ g_{s,y} \circ g_A$ の分解に現れるも
のとする。

定理 3 E をノルム空間、 $F : \mathbb{R} \times E \times E \rightarrow E$ を連続写像とする。 E に値を取る C^2 級写像
 $x : \mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in E$ は方程式

$$x''(t) = F(t, x(t), x'(t))$$

の解であるとする。このとき次は同値である。

(1) 任意のガリレイ変換 g に対し x_g は方程式

$$x_g''(t) = F(t, x_g(t), x_g'(t))$$

の解である。

(2) $F = 0$

(証明) (1) \Rightarrow (2) : x_g を t で微分し $x_g'(t) = Ax'(t-s) + v$, $x_g''(t) = Ax''(t-s) = AF(t-s, x(t-s), x'(t-s))$ を得る。故に等式

$F(t, Ax(t-s) + y + tv, Ax'(t-s) + v) = AF(t-s, x(t-s), x'(t-s))$ が任意の $t, s \in \mathbb{R}$, $y, v \in E, A \in \text{Iso}(E)$ に対して成立つ。そこで $s = t, A = I$ とすると等式

$$F(t, x(0) + y + tv, x'(0) + v) = F(0, x(0), x'(0))$$

が任意の $t \in \mathbb{R}, y, v \in E$ に対して成立つ。任意の $\tau \in \mathbb{R}, \xi, \eta \in E$ に対し $v = \eta - x'(0)$, $t = \tau, y = \xi - \tau(\eta - x'(0)) - x(0)$ と置いて最後の等式に代入することにより等式

$$F(\tau, \xi, \eta) = F(0, x(0), x'(0))$$

を得る。これより F は定ベクトル $F_0 \equiv F(0, x(0), x'(0))$ である事が従う。 F に関する初めの等式により $F_0 = AF_0$ が任意の $A \in \text{Iso}(E)$ に対して成立つので $A = -I$ とすれば $F_0 = 0$ が従う。

(2) \Rightarrow (1) : $F = 0$ ならば x の満たす方程式は $x''(t) = 0$ であり任意のガリレイ変換 g に対して $x_g''(t) = Ax''(t-s) = 0$ が従う。

参考文献 : 新井朝雄、物理の中の対称性、日本評論社

小澤徹、アフィン空間、<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/a.pdf>

V. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, 1978.