Gauss 分布密度函数の積分

平成 20 年 3 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

Gaussian $\exp(-x^2)$ の $\mathbb{R}$ 上の積分値

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$$

の導出法について考える。先ずは同値な積分形に書換えて置こう。

命題１．　次は同値である。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$

(4) 任意の $a > 0$ に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(5) 任意の $a > 0$ に対し $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(6) 任意の $a > 0$ に対し $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-at} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(7) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 任意の $a > 0$ に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) x^{2n} dx = \frac{(2n)!}{n!(4a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(8) 或る $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が在って、任意の $a > 0$ に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) x^{2n} dx = \frac{(2n)!}{n!(4a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

(9) 任意の $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$

(10) 任意の $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ に対し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + ibx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$

(11) 任意の $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a^2t^2 - \frac{b^2}{t^2}\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2ab}$$

(12) 任意の $a>0,\ b\in\mathbb{R}$ に対し

$$\int_0^\infty \exp\left(-a^2t-\frac{b^2}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2ab}$$

証明

(1) ⇔ (2) : 被積分函数が偶函数である事より従う。

(2) ⇔ (3) : 変数変換 $t=x^2$ より従う。

(1) ⇔ (4) : (1) は (4) の特別な場合であり、(4) は (1) で変数変換 $x\mapsto x/\sqrt{a}$ を施したものである。

(4) ⇔ (5) : 被積分函数が偶函数である事より従う。

(3) ⇔ (6) : (3) は (6) の特別な場合であり、(6) は (3) で変数変換 $t\mapsto t/a$ を施したものである。

(4) ⇔ (7) : (4) は (7) の特別な場合であり、(7) は (4) の両辺の a に関する n 階導函数の $(-1)^n$ 倍として得られる。

(7) ⇔ (8) : (8) は (7) の特別な場合であり、(7) と同値な (4) は (8) の両辺を a に関して $(0,\infty)$ 上 n 回積分する事によって得られる。

(7) ⇔ (9) : 項別積分と (7) により、(9) の左辺を次の様に計算するのが一つの方法である。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)\cos bx dx &= \int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(bx)^{2n}}{(2n)!}dx\\ &= \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^nb^{2n}}{(2n)!}\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)x^{2n}dx\\ &= \sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^nb^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n)!}{n!(4a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\left(-\frac{b^2}{4a}\right)^n=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)\end{aligned}$$

別の方法として $t\geq 0$ に対して

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)\cos tx dx$$

と置き、(7)(の特別な場合である (4)) による $\varphi(0)=\sqrt{\pi/a}$ 及び

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)x\sin tx dx\\ &= \left[\frac{\exp(-ax^2)}{2a}\sin tx\right]_{x=-\infty}^\infty+\frac{t}{2a}\int_{-\infty}^\infty \exp(-ax^2)\cos tx dx\\ &= \frac{t}{2a}\varphi(t)\end{aligned}$$

なる微分方程式を積分した

$$\varphi(t) = \varphi(0)\exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)$$

から (8) を導く事も出来る。

(9) ⇔ (10) : 可積分函数が奇函数である事から従う性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\sin bx dx = 0$$

を用いれば良い。

(4) ⇔ (11) : (4) は (11) の特別な場合である。(4) から (11) を導く事を考える。一般性を失う事なく $b \geq 0$ として良い。(11) の左辺は

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{\infty} \exp\left(-a^2\left(t-\frac{b}{at}\right)^2 - 2ab\right)dt \\
&= 2e^{-2ab}\left(\int_{\sqrt{b/a}}^{\infty} + \int_0^{\sqrt{b/a}}\right)\exp\left(-a^2\left(t-\frac{b}{at}\right)^2\right)dt
\end{aligned}$$

と書き換えられ、最後の積分は変数変換 $s = b/at$ により

$$\int_0^{\sqrt{b/a}} \exp\left(-a^2\left(t-\frac{b}{t}\right)^2\right)dt = \int_{\sqrt{b/a}}^{\infty} \exp\left(-a^2\left(\frac{b}{as}-s\right)^2\right)\frac{b}{as^2}ds$$

となるから、上の二式を合わせた後、変数変換 $x = t - b/at$ を施すと

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{\infty} \exp\left(-a^2\left(t-\frac{b}{at}\right)^2 - 2ab\right)dt \\
&= 2e^{-2ab}\int_{\sqrt{b/a}}^{\infty} \exp\left(-a^2\left(t-\frac{b}{at}\right)^2\right)\left(1+\frac{b}{at^2}\right)dt \\
&= 2e^{-2ab}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2x^2)dx \\
&= e^{-2ab}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2x^2)dx
\end{aligned}$$

が従う。最後の積分値を (4) で与える事により (11) が従う。

(11) ⇔ (12) : 変数変換 $t \mapsto t^2$ (及びその逆) により従う。

さて命題 1 の定積分 (1) または (2) の求める方法としては重積分によるものが一般的であろう。形式的には

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)dy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2-y^2)dxdy \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \exp(-r^2)rdrd\theta \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{2}\exp(-r^2)\right]_0^{\infty} = \pi
\end{aligned}$$

と計算されるが、重積分の累次化 (或は変数分離形の函数の重積分法)、非有界領域上の広義積分の領域近似についての性質を用いている。特に

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n, \\
&K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| \le n,\ |y| \le n\} = [-n,n] \times [-n,n], \\
&L_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le n^2\}
\end{aligned}$$

である事を用いている。

極限移行の過程を省かずに書くと

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx\right)^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^{n} \exp(-x^2)dx\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\int_{K_n} \exp(-x^2-y^2)dxdy \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2-y^2)dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\int_{L_n} \exp(-x^2-y^2)dxdy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\int_0^{2\pi} \exp(-r^2)rdrd\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}[-\pi\exp(-r^2)]_0^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\pi(1-\exp(-n^2)) = \pi
\end{aligned}$$

となる。

次の様な方法もある：

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx\right)^2 &= 2\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)dy\right)\exp(-x^2)dx \\
&= 2\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2t^2)xdt\right)\exp(-x^2)dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\exp(-x^2(1+t^2))xdx\right)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{1+t^2}\exp(-x^2(1+t^2))\right]_0^{\infty}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \pi
\end{aligned}$$

ここで任意の $x > 0$ に対し (変数変換 $y = xt$ により)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2t^2)xdt$$

である事を用いており、極限移行などの計算は省かれている。近似の状況まで知るには次の様にすれば良い。

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-n}^{n}\exp(-x^2)dx\right)^2 &= \int_0^{n}\frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^{x}\exp(-t^2)dt\right)^2dx \\
&= 2\int_0^{n}\left(\left(\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}\exp(-t^2)dt\right)\int_{-x}^{x}\exp(-t^2)dt\right)dx \\
&= 4\int_0^{n}\left(\exp(-x^2)\int_{-x}^{x}\exp(-t^2)dt\right)dx \\
&= 4\int_0^{n}\left(\exp(-x^2)x\int_{-1}^{1}\exp(-x^2s^2)ds\right)dx \\
&= 4\int_0^{n}\left(x\int_{-1}^{1}\exp(-x^2(1+s^2))ds\right)dx \\
&= -2\int_0^{n}\frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-x^2(1+s^2))}{1+s^2}ds\right)dx \\
&= -2\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-n^2(1+s^2))}{1+s^2}ds + 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+s^2}ds \\
&= -2\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-n^2(1+s^2))}{1+s^2}ds + \pi
\end{aligned}$$

ここでは重積分に関する性質は用いていない。

一変数の微分積分法の範囲で Gaussian の定積分を求める方法として Wallis の公式に基づくものがある。この点について纏めておこう。

命題２． 次は同値である。

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$

(2) (Wallis の公式) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$

(証明) 命題は次の等式から従う：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx &= 2\int_{0}^{\infty} \exp(-x^2)dx \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 (1-y^2)^n dy \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n+1} d\theta \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(2n)!!}{(2n+1)!!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!}\cdot\frac{2n}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{\sqrt{n}(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n, & x \in [0, \sqrt{n}\,] \\ 0, & x \in (\sqrt{n}, \infty) \end{cases}
$$

で定まる函数列に対してルベーグの収束定理を用いた。(実際、$f_n(x) \le \exp(-x^2)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp(-x^2)$(各点収束) となる。)

参考文献： 藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學第一巻、内田老鶴圃

上見練太郎、勝股脩、加藤重雄、久保田幸次、神保秀一、山口佳三
積分、共立出版株式会社

黒田成俊、関数解析、共立出版株式会社

J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis*,
Cambridge Studies in Advanced Mathematics.