グルサの論法に依るストークスの定理の証明

平成 23 年 7 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

グルサ (Edouard Goursat, 1858-1936) に依るコーシーの積分定理の証明に用いられた論法に基づいて、ストークスの定理に代表される一連の積分定理の証明を与えよう。先ず、一次元（微分積分学の基本定理)、二次元（グリーンの定理)、三次元（ガウスの定理）を議論し、一般次元でのストークスの定理を鎖体上で議論しよう。

1．微分積分学の基本定理

有界閉区間 $I = [a, b]$ 上で定義された函数 $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上微分可能であるとは、任意の $x \in I$ 及び $x + h \in I$ なる任意の $h \in \mathbb{R}$ に対し $f'(x) \in \mathbb{R}$ 及び $R_f(x; h) \in \mathbb{R}$ が在って

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h = R_f(x;h)h$$
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x+h\in I}} R_f(z;h) = R_f(x;0) = 0$$

を満たす事を謂う。函数 $f' : I \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ が連続であるとき f は I 上 C^1 級であると謂う。

さて区間 $I = [a, b]$ を、その中心 $c = (a + b)/2$ を基に二つの区間 $I^{(1)} = [a, c]$ 及び $I^{(2)} = [c, b]$ に分けて考える。このとき I 上 C^1 級の函数 f に対し等式

$$\begin{aligned}
&f(b) - f(a) - \int_a^b f'(x)dx \\
&= f(b) - f(c) - \int_c^b f'(x)dx \\
&+ f(c) - f(a) - \int_a^c f'(x)dx
\end{aligned}$$

が成立つので

$$|f(b) - f(c) - \int_c^b f'(x)dx|,\ |f(c) - f(a) - \int_a^c f'(x)dx|$$

の小さくないほうを与える区間を一つ取り $I_1 = [a_1, b_1]$ と表す事にすると

$$\begin{aligned}
&|f(b) - f(a) - \int_a^b f'(x)dx| \ \leq 2|f(b_1) - f(a_1) - \int_{a_1}^{b_1} f'(x)dy| \\
&I_1 \subset I,\ |I_1| = 2^{-1}|I|
\end{aligned}$$

が成立つ。ここに $|J|$ は区間 J の長さとする。この議論を繰り返す事により任意の m に対し $I_m = [a_m, b_m]$ なる区間を取り

$$
\begin{aligned}
&|f(b) - f(a) - \int_a^b f'(x)dx| \ \le 2^m |f(b_m) - f(a_m) - \int_{a_m}^{b_m} f'(x)dx| \\
&I_m \subset I_{m-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I, \ |I_m| = 2^{-m}|I|
\end{aligned}
$$

とする事が出来る。このとき

$$
\{x_0\} = \bigcap_{m \ge 1} I_m
$$

なる $x_0 \in I$ が唯一つ存在する。さて

$$
\begin{aligned}
&\ f(b_m) - f(a_m) - \int_{a_m}^{b_m} f'(x)dx \\
&= f(b_m) - f(x_0) - f'(x_0)(b_m - x_0) \\
&- (f(a_m) - f(x_0) - f'(x_0)(a_m - x_0)) - \int_{a_m}^{b_m} (f'(x) - f'(x_0))dx
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&\ |f(b_m) - f(a_m) - \int_{a_m}^{b_m} f'(x)dx| \\
&\le |f(b_m) - f(x_0) - f'(x_0)(b_m - x_0)| \\
&+ |f(a_m) - f(x_0) - f'(x_0)(a_m - x_0)| + \int_{a_m}^{b_m} |f'(x) - f'(x_0)|dx \\
&\le |R_f(x_0; b_m - x_0)(b_m - x_0)| \\
&+ |R_f(x_0; a_m - x_0)(a_m - x_0) + \int_{a_m}^{b_m} |f'(x) - f'(x_0)|dx \\
&\le \sup_{\substack{|h| \le b_m - a_m \\ x_0 + h \in I}} |R_f(x_0; h)| \cdot ((b_m - x_0) + (x_0 - a_m)) + \ \sup_{x \in I_m} |f'(x) - f'(x_0)| \cdot (b_m - a_m) \\
&\le \sup_{\substack{|h| \le 2^{-m}|I| \\ x_0 + h \in I}} (|R_f(x_0; h)| + \ |f'(x_0 + h) - f'(x_0)|) \cdot (b_m - a_m)
\end{aligned}
$$

を得るので

$$
\begin{aligned}
&|f(b) - f(a) - \int_a^b f'(x)ds| \\
&\le \sup_{\substack{|h| \le 2^{-m}|I| \\ x_0 + h \in I}} (|R_f(x_0; h)| + |f'(x_0 + h) - f'(x_0)|) \cdot |I|
\end{aligned}
$$

が従う。右辺で $m \to \infty$ として微分積分学の基本定理を得る。

2. グリーンの定理

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の一直線上に無く互いに異なる三点 $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ を頂点とする閉三角形

$$\begin{aligned}T &= \Delta(a,b,c)\\ &= \{sa+tb+uc\in\mathbb{R}^2;\ s,t,u\in[0,1],\ s+t+u=1\}\\ &= \{a+s(b-a)+t(c-a);\ s,t\in[0,1],\ s+t\le 1\}\end{aligned}$$

上で定義された函数 $f:T\to\mathbb{R}$ が T 上微分可能であるとは、任意の $x\in T$ 及び $x+h\in T$ なる任意の $h\in\mathbb{R}^2$ に対し $f'(x)\in\mathbb{R}^2$ 及び $R_f(x;h)\in\mathbb{R}^2$ が在って

$$\begin{aligned}&f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h = R_f(x;h)\cdot h\\ &\lim_{\substack{h\to 0\\ x+h\in T}} R_f(x;h)=R_f(x;0)=0\end{aligned}$$

を満たす事を謂う。ここに $\cdot$ は $\mathbb{R}^2$ に於ける内積である。$f'(x)\in\mathbb{R}^2$ を $f'(x)=(\partial_1 f(x),\partial_2 f(x))$ と座標表示する事により函数

$$\partial_i f: T\ni x\mapsto \partial_i f(x)\in\mathbb{R}$$

が定まる。T 上微分可能な函数 $p.q$ に対し一形式 $\omega = pdx_1+qdx_2$ を考える。その外微分としての二形式は $d\omega=(\partial_1 q-\partial_2 p)dx_1\wedge dx_2$ で与えられる。ここに現れる函数 $T\ni x\mapsto \partial_1 q(x)-\partial_2 p(x)\in\mathbb{R}$ を f と表し以降 f は T 上連続であると仮定する。

さて三角形 $T=\Delta(a,b,c)$ を各辺の中点

$$a'=\frac{1}{2}(b+c),\quad b'=\frac{1}{2}(c+a),\quad c'=\frac{1}{2}(a+b)$$

を基に四つの三角形

$$\begin{aligned}T^{(1)} &= \Delta(a,c',b')\\ &= \{a+s(b-a)+t(c-a);\ s,t\in[0,1/2],\ s+t\in[0,1/2]\}\\ T^{(2)} &= \Delta(b,a',c')\\ &= \{a+s(b-a)+t(c-a);\ s\in[1/2,1],\ t\in[0,1/2],\ s+t\in[1/2,1]\}\\ T^{(3)} &= \Delta(c,b',a')\\ &= \{a+s(b-a)+t(c-a);\ s\in[0,1/2],\ t\in[1/2,1],\ s+t\in[1/2,1]\}\\ T^{(4)} &= \Delta(a',b',c')\\ &= \{a+s(b-a)+t(c-a);\ s,t\in[0,1/2],\ s+t\in[1/2,1]\}\end{aligned}$$

に分ける。このとき $T=\displaystyle\bigcup_{j=1}^{4}T^{(j)}$ であり $i\ne j$ ならば $\mathrm{Int}\ T^{(i)}\cap\ \mathrm{Int}\ T^{(j)}=\emptyset$ となる。

故に等式

$$\int_T d\omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{T^{(j)}} d\omega$$

が成立つ。また a, b を結ぶ有向線分を

$$[a,b] = \{a + t(b-a) \in \mathbb{R}^2; t \in [0,1]\}$$

等と表し三角形の境界に反時計回りの向きを与えれば

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} \omega =& \int_{\partial\Delta(a,b,c)} \omega = \int_{[a,b]} \omega + \int_{[b,c]} + \int_{[c,a]} \omega \\
=& \left(\int_{[a,c']} + \int_{[c',b]}\right)\omega + \left(\int_{[b,a']} + \int_{[a',c]}\right)\omega + \left(\int_{[c,b']} + \int_{[b',a]}\right)\omega \\
=& \left(\int_{[a,c']} + \int_{[b',a]}\right)\omega + \left(\int_{[b,a']} + \int_{[c',b]}\right)\omega + \left(\int_{[c,b']} + \int_{[a',c]}\right)\omega \\
=& \left(\int_{[a,c']} + \int_{[c',b']} + \int_{[b',a]}\right)\omega + \int_{[b',c']} \omega \\
+& \left(\int_{[b,a']} + \int_{[a',c']} + \int_{[c',b]}\right)\omega + \int_{[c',a']} \omega \\
+& \left(\int_{[c,b']} + \int_{[b',a']} + \int_{[a',c]}\right)\omega + \int_{[a',b']} \omega \\
=& \int_{\partial\Delta(a,c',b')} \omega + \int_{\partial\Delta(b,a',c')} \omega + \int_{\partial\Delta(c,b',a')} \omega + \int_{\partial\Delta(a',b',c')} \omega
\end{aligned}$$

となるので

$$\int_{\partial T} \omega - \int_T d\omega = \sum_{j=1}^{4} \left(\int_{\partial T^{(j)}} \omega - \int_{T^{(j)}} d\omega\right)$$

が従う。そこで

$$\max_{1\le j\le 4} |\int_{\partial T^{(j)}} \omega - \int_{T^{(j)}} d\omega|$$

を与える三角形を一つ取り $T_1 = \Delta(a_1, b_1, c_1)$ と表す事にすると

$$|\int_{\partial T} \omega - \int_T d\omega| \le 4|\int_{\partial T_1} \omega - \int_{T_1} d\omega|$$

$$T_1 \subset T,\ |\partial T_1| = 2^{-1}|\partial T|,\ |T_1| = 4^{-1}|T|$$

が成立つ。ここに三角形 Δ の周の長さ及び面積を夫々$|\partial\Delta|$ 及び $|\Delta|$ とする。

この議論を繰り返す事により任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $T_m = \Delta(a_m, b_m, c_m)$ なる閉三角形が存在し

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial T} \omega - \int_T d\omega| \leq 4^m |\int_{\partial T_m} \omega - \int_{T_m} d\omega| \\
&T_m \subset T_{m-1} \subset \cdots \subset T_1 \subset T,\ \mathrm{diam}\ T_m = 2^{-m}\ \mathrm{diam}\ T \\
&|\partial T_m| = 2^{-m}|\partial T|,\ |T_m| = 4^{-m}|T|
\end{aligned}
$$

とする事が出来る。このとき

$$\{\xi\} = \bigcap_{m \geq 1} T_m$$

なる $\xi \in T$ が唯一つ存在する。さて

$$\int_{\partial T_m} dx_i = 0, \quad \int_{\partial T_m} (x_i - \xi_i) dx_i = 0$$

$$\int_{\partial T_m} (x_1 - \xi_1) dx_2 = -\int_{\partial T_m} (x_2 - \xi_2) dx_1 = |T_m|$$

である事に注意すると、等式

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial T_m} \omega - \int_{T_m} d\omega \\
&= \int_{\partial T_m} (p(x) - p(\xi) - p'(\xi) \cdot (x - \xi)) dx_1 + p'(\xi) \cdot \int_{\partial T_m} (x - \xi) dx_1 \\
&\quad + \int_{\partial T_m} (q(x) - q(\xi) - q'(\xi) \cdot (x - \xi)) dx_2 + q'(\xi) \cdot \int_{\partial T_m} (x - \xi) dx_2 - \int_{T_m} f(x) dx \\
&= \int_{\partial T_m} R_p(\xi; x - \xi) \cdot (x - \xi) dx_1 - \partial_2 p(\xi) |T_m| \\
&\quad + \int_{\partial T_m} R_q(\xi; x - \xi) \cdot (x - \xi) dx_2 + \partial_1 q(\xi) |T_m| - \int_{T_m} f(x) dx \\
&= \int_{\partial T_m} R_p(\xi; x - \xi) \cdot (x - \xi) dx_1 + \int_{\partial T_m} R_q(\xi; x - \xi) \cdot (x - \xi) dx_2 \\
&\quad + \int_{T_m} (f(\xi) - f(x)) dx
\end{aligned}
$$

が成立つ。これより

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial T_m}\omega-\int_{T_m}d\omega| \\
\le&\sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}}|R_p(\xi;h)|\cdot\mathrm{diam}\ T_m\cdot|\partial T_m| \\
&+\sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}}|R_q(\xi;h)|\cdot\mathrm{diam}\ T_m\cdot|\partial T_m| \\
&+\sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}}|f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot|T_m| \\
=&\sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}}|R_p(\xi;h)|\cdot 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\cdot 2^{-m}|T| \\
&+\sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}}|R_q(\xi;h)|\cdot 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\cdot 2^{-m}|T| \\
&+\sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}}|f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot 4^{-m}|T|
\end{aligned}
$$

を得る。従って不等式

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial T}\omega-\int_{T}d\omega| \\
\le&\sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}}(|R_p(\xi;h)|+|R_q(\xi;h)|)\cdot\mathrm{diam}\ T\cdot|\partial T| \\
&+\sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}}|f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot|T|
\end{aligned}
$$

が成立ち右辺は $m\to\infty$ で 0 に収束するので次のグリーン定理を得る。

定理１　（閉三角形上のグリーンの定理）　閉三角形 T 上で微分可能な函数 p,q を係数とする一形式 $\omega=pdx_1+qdx_2$ に対しその外微分 $d\omega=(\partial_1 q-\partial_2 p)dx_1\wedge dx_2$ の係数としての函数 $f=\partial_1 q-\partial_2 p$ が T 上連続であれば次の等式が成立つ：

$$\int_{\partial T}\omega=\int_T d\omega$$

註１　p,q は C^1 級である事を仮定していないので上の定理は複素解析に於けるコーシー・リーマンの関係式からコーシーの積分定理を導く事が可能な形と成っている。

註２　$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を微分可能でその導函数 φ' は不連続な函数とし $p(x_1,x_2)=x_2\varphi(x_1)$,

$q(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \varphi(t)dt$ と置くと p は C^1 級ではないが $\partial_1 q - \partial_2 p = 0$ は連続であるので定理１が適用可能である。

定理２　（二鎖体上のグリーンの定理）　U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし ω を U 上で微分可能な函数 p, q を係数とする一形式とする：

$$\omega = pdx_1 + qdx_2$$

ω の外微分 $d\omega = (\partial_1 q - \partial_2 p)dx_1 \wedge dx_2$ の係数としての函数 $f = \partial_1 q - \partial_2 p$ は U 上連続であるとする。このとき U 内の任意の二鎖体 σ に対し次の等式が成立つ：

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$$

（証明）　二鎖体は二単体の線型結合で表されるので夫々の二単体で示せば充分である。証明は閉三角形特に標準二単体の場合に帰着される。

3. ガウスの定理

空間 $\mathbb{R}^3$ 内の一次独立な系を成す三点 $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ 及び原点 0 を頂点とする閉三角錐

$$\begin{aligned} T &= \Delta(0, a, b, c) \\ &= \{sa + tb + uc \in \mathbb{R}^3; s, t, u \in [0, 1],\ s + t + u \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

上で定義された函数 $f : T \to \mathbb{R}$ が T 上微分可能であるとは、任意の $x \in T$ 及び $x + h \in T$ なる任意の $h \in \mathbb{R}^3$ に対し $f'(x) \in \mathbb{R}^3$ 及び $R_f(x; h) \in \mathbb{R}^3$ が在って

$$f(x + h) - f(x) - f'(x) \cdot h = R_f(x; h) \cdot h$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in T}} R_f(x; h) = R_f(x; 0) = 0$$

を満たす事を謂う。ここに $\cdot$ は $\mathbb{R}^3$ に於ける内積である。$f'(x) \in \mathbb{R}^3$ を $f'(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \partial_3 f(x))$ と座標表示する事により函数

$$\partial_i f : T \ni x \mapsto \partial_i f(x) \in \mathbb{R}$$

が定まる。T 上微分可能な函数 p, q, r に対し二形式

$$\omega = pdx_2 \wedge dx_3 + qdx_3 \wedge dx_1 + rdx_1 \wedge dx_2$$

を考える。その外微分としての三形式は

$$d\omega = (\partial_1 p + \partial_2 q + \partial_3 r)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

で与えられる。ここに現れる函数

$$T \ni x \mapsto \partial_1 p(x) + \partial_2 q(x) + \partial_3 r(x) \in \mathbb{R}$$

を f と表し以降 f は T 上連続であると仮定する。

さて三角錐 $T = \Delta(0, a, b, c)$ を各辺の中点

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{2}(b+c), \quad & b' &= \frac{1}{2}(c+a), \quad & c' &= \frac{1}{2}(a+b), \\ a'' &= \frac{1}{2}a, & b'' &= \frac{1}{2}b, & c'' &= \frac{1}{2}c \end{aligned}$$

を基に八つの三角錐

$$\begin{aligned}
T^{(1)} &= \Delta(0, a'', b'', c'') \\
&= \{sa + tb + uc;\ s, t, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [0, 1/2]\} \\
T^{(2)} &= \Delta(a'', a, c', b) \\
&= \{sa + tb + uc;\ s \in [1/2, 1],\ t, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1]\} \\
T^{(3)} &= \Delta(b'', b, a', c') \\
&= \{sa + tb + uc;\ t \in [1/2, 1],\ s, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1]\} \\
T^{(4)} &= \Delta(c'', c, b', a') \\
&= \{sa + tb + uc;\ u \in [1/2, 1],\ s, t \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1]\} \\
T^{(5)} &= \Delta(a'', a', b'', c') \\
&= \{sa + tb + uc;\ s, t, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1],\ s + t, s + u \in [0, 1/2]\} \\
T^{(6)} &= \Delta(a'', a', c'', b') \\
&= \{sa + tb + uc;\ s, t, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1],\ s + t \in [0, 1/2],\ s + u \in [1/2, 1]\} \\
T^{(7)} &= \Delta(a'', a', c', b'') \\
&= \{sa + tb + uc;\ s, t, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1],\ s + t \in [1/2, 1],\ s + u \in [0, 1/2]\} \\
T^{(8)} &= \Delta(a'', a', b', c') \\
&= \{sa + tb + uc;\ s, t, u \in [0, 1/2],\ s + t + u \in [1/2, 1],\ s + t \in [1/2, 1],\ s + u \in [1/2, 1]\}
\end{aligned}$$

に分ける。このとき $T = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{8} T^{(j)}$ であり $i \neq j$ ならば $\mathrm{Int}\ T^{(i)} \cap \mathrm{Int}\ T^{(j)} = \emptyset$ となる。

故に等式

$$\int_T d\omega = \sum_{j=1}^{8} \int_{T^{(j)}} d\omega$$

が成立つ。さて、三単体としての T の境界 ∂T は定義により

$$\begin{aligned} \partial T &= \partial \Delta(0, a, b, c) \\ &= \Delta(a, b, c) - \Delta(0, b, c) + \Delta(0, a, c) - \Delta(0, a, b) \end{aligned}$$

と表され夫々の三角形は前節の議論により

$$
\begin{aligned}
\Delta(a,b,c) &= \Delta(a,c',b') + \Delta(c',b,a') + \Delta(a',c,b') + \Delta(a',b',c') \\
\Delta(0,b,c) &= \Delta(0,b'',c'') + \Delta(b'',b,a') + \Delta(a',c,c'') + \Delta(a',c'',b'') \\
\Delta(0,a,c) &= \Delta(0,a'',c'') + \Delta(a'',a,b') + \Delta(b',c,c'') + \Delta(b',c'',a'') \\
\Delta(0,a,b) &= \Delta(0,a'',b'') + \Delta(a'',a,c') + \Delta(c',b,b'') + \Delta(c',b'',a'')
\end{aligned}
$$

と表される。一方

$$
\begin{aligned}
\partial T^{(1)} &= \partial\Delta(0,a'',b'',c'') \\
&= \Delta(a'',b'',c'') - \Delta(0,b'',c'') + \Delta(0,a'',c'') - \Delta(0,a'',b'') \\
\partial T^{(2)} &= \partial\Delta(a'',a,c',b') \\
&= \Delta(a,c',b') - \Delta(a'',c',b') + \Delta(a'',a,b') - \Delta(a'',a,c') \\
\partial T^{(3)} &= \partial\Delta(b'',b,a',c') \\
&= \Delta(b,a',c') - \Delta(b'',a',c') + \Delta(b'',b,c') - \Delta(b'',b,a') \\
&= \Delta(c',b,a') - \Delta(b'',a',c') - \Delta(c',b,b'') - \Delta(b'',b,a') \\
\partial T^{(4)} &= \partial\Delta(c'',c,b',a') \\
&= \Delta(c,b,a') - \Delta(c'',b',a') + \Delta(c'',c,a') - \Delta(c'',c,b') \\
&= \Delta(a',c,b') - \Delta(c'',b',a') - \Delta(a',c,c'') + \Delta(b',c,c'')
\end{aligned}
$$

となるので ∂T は

$$
\begin{aligned}
\partial T = &\ (\ \underbrace{\Delta(a,c',b')}_{(2)} + \underbrace{\Delta(c',b,a')}_{(3)} + \underbrace{\Delta(a',c,b')}_{(4)} + \Delta(a',b',c')) \\
&- (\ \underbrace{\Delta(0,b'',c'')}_{(1)} + \underbrace{\Delta(b'',b,a')}_{(3)} + \underbrace{\Delta(a',c,c'')}_{(4)} + \Delta(a',c'',b'')) \\
&+ (\ \underbrace{\Delta(0,a'',c'')}_{(1)} + \underbrace{\Delta(a'',a,b')}_{(2)} + \underbrace{\Delta(b',c,c'')}_{(4)} + \Delta(b',c'',a'')) \\
&- (\ \underbrace{\Delta(0,a'',b'')}_{(1)} + \underbrace{\Delta(a'',a,c')}_{(2)} + \underbrace{\Delta(c',b,b'')}_{(3)} + \Delta(c',b'',a'')) \\
&= (-\Delta(0,b'',c'') + \Delta(0,a'',c'') - \Delta(0,a'',b'')) \\
&+ (\Delta(a,c',b') + \Delta(a'',a,b') - \Delta(a'',a,c')) \\
&+ (\Delta(c',b,a') - \Delta(c',b,b'') - \Delta(b'',b,a')) \\
&+ (\Delta(a',c,b') - \Delta(a',c,c'') + \Delta(b',c,c'')) \\
&+ \Delta(a',b',c') - \Delta(a',c'',b'') + \Delta(b',c'',a'') - \Delta(c',b'',a'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial T^{(1)} - \Delta(a'', b'', c'') \\
&+ \partial T^{(2)} + \Delta(a'', c', b') \\
&+ \partial T^{(3)} + \Delta(b'', a', c') \\
&+ \partial T^{(4)} + \Delta(c'', b', a') \\
&+ \Delta(a', b', c') - \Delta(a', c'', b'') + \Delta(b', c'', a'') - \Delta(c', b'', a'')
\end{aligned}
$$

と表される。一方

$$
\begin{aligned}
\partial T^{(5)} &= \partial\Delta(a'', a', b'', c'') \\
&= \Delta(a', b'', c'') - \Delta(a'', b'', c'') + \underline{\Delta(a'', a', c'')} - \Delta(a'', a', b'') \\
\partial T^{(6)} &= \partial\Delta(a'', a', c'', b') \\
&= \Delta(a', c'', b'') - \Delta(a'', c'', b') + \underline{\underline{\Delta(a'', a', b')}} - \underline{\Delta(a'', a', c'')} \\
\partial T^{(7)} &= \partial\Delta(a'', a', c', b'') \\
&= \Delta(a', c', b'') - \Delta(a'', c', b'') + \Delta(a'', a', b'') - \Delta(a'', a', c') \\
\partial T^{(8)} &= \partial\Delta(a'', a', b', c') \\
&= \Delta(a', b', c') - \Delta(a'', b', c') + \Delta(a'', a', c') - \underline{\underline{\Delta(a'', a', b')}}
\end{aligned}
$$

と表されるので、等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=5}^{8} \partial T^{(j)} &= \Delta(a', b'', c'') - \Delta(a'', b'', c'') \\
&+ \Delta(a', c'', b') - \Delta(a'', c'', b') \\
&+ \Delta(a', c', b'') - \Delta(a'', c', b'') \\
&+ \Delta(a', b', c') - \Delta(a'', b', c') \\
&= -\Delta(a', c'', b) - \Delta(a'', b'', c'') \\
&+ \Delta(c'', b', a') + \Delta(b', c'', a'') \\
&+ \Delta(b'', a', c') - \Delta(c', b'', a'') \\
&+ \Delta(a', b', c') + \Delta(a'', c', b')
\end{aligned}
$$

より

$$
\partial T = \sum_{j=1}^{8} \partial T^{(j)}
$$

が従う。故に等式

$$
\int_{\partial T} \omega = \sum_{j=1}^{8} \int_{\partial T^{(j)}} \omega
$$

が成立つ。これより

$$\int_{\partial T} \omega - \int_T d\omega = \sum_{j=1}^{8} \left(\int_{\partial T^{(j)}} \omega - \int_{T^{(j)}} d\omega \right)$$

を得る。そこで

$$\max_{1 \le j \le 8} | \int_{\partial T^{(j)}} \omega - \int_{T^{(j)}} d\omega|$$

を与える三角錐を一つ取り $T_1 = \Delta(a_1, b_1, c_1, d_1)$ と表す事にすると

$$\begin{aligned} & | \int_{\partial T} \omega - \int_T d\omega| \le \ 8| \int_{\partial T_1} \omega - \int_{T_1} d\omega| \\ & T_1 \subset T, \ |\partial T_1| = 4^{-1}|\partial T|, \ \text{diam } T_1 = 2^{-1}\text{diam } T, \ |T_1| = 8^{-1}|T| \end{aligned}$$

が成立つ。ここに三角錐 Δ の表面積及び体積を $|\partial\Delta|$ 及び $|\Delta|$ とする。この議論を繰り返す事により任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $T_m = \Delta(a_m, b_m, c_m, d_m)$ なる三角錐が存在し

$$\begin{aligned} & | \int_{\partial T} \omega - \int_T d\omega| \le \ 8^m | \int_{\partial T_m} \omega - \int_{T_m} d\omega| \\ & T_m \subset T_{m-1} \subset \cdots \subset T_1 \subset T, \ \text{diam } T_m = 2^{-m}\text{diam } T \\ & |\partial T_m| = 4^{-m}|\partial T|, \ |T_m| = 8^{-m}|T| \end{aligned}$$

とする事が出来る。このとき

$$\{\xi\} = \bigcap_{m \ge 1} T_m$$

なる $\xi \in T$ が唯一つ存在する。さて

$$\int_{\partial T_m} dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial T_m} dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial T_m} dx_3 \wedge dx_1 = 0,$$

$$\int_{\partial T_m} (x_i - \xi_i) dx_i \wedge dx_j = 0,$$

$$\int_{\partial T_m} (x_1 - \xi_1) dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial T_m} (x_2 - \xi_2) dx_3 \wedge dx_1 = \int_{\partial T_m} (x_3 - \xi_3) dx_1 \wedge dx_2 = |T_m|$$

である事に注意すると、等式

$$\int_{\partial T_m} \omega - \int_{T_m} d\omega$$

$$= \int_{\partial T_m} (p(x) - p(\xi) - p'(\xi)\cdot(x-\xi))dx_2 \wedge dx_3 + p'(\xi)\cdot \int_{\partial T_m} (x-\xi)dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \int_{\partial T_m} (q(x) - q(\xi) - q'(\xi)\cdot(x-\xi))dx_3 \wedge dx_1 + q'(\xi)\cdot \int_{\partial T_m} (x-\xi)dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \int_{\partial T_m} (r(x) - r(\xi) - r'(\xi)\cdot(x-\xi))dx_1 \wedge dx_2 + r'(\xi)\cdot \int_{\partial T_m} (x-\xi)dx_1 \wedge dx_2$$

$$- \int_{T_m} f(x)dx$$

$$= \int_{\partial T_m} R_p(\xi; x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_2 \wedge dx_3 + \partial_1 p(\xi)|T_m|$$

$$+ \int_{\partial T_m} R_q(\xi; x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_3 \wedge dx_1 + \partial_2 q(\xi)|T_m|$$

$$+ \int_{\partial T_m} R_r(\xi; x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_1 \wedge dx_2 + \partial_3 r(\xi)|T_m| - \int_{T_m} f(x)dx$$

$$= \int_{\partial T_m} R_p(\xi; x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \int_{\partial T_m} R_q(\xi; x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \int_{\partial T_m} R_r(\xi; x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_1 \wedge dx_2$$

$$+ \int_{T_m} (f(\xi) - f(x))dx$$

が成立つ。これより

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial T_m}\omega-\int_{T_m}d\omega| \\
\le & \sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}} |R_p(\xi;h)|\cdot \mathrm{diam}\ T_m\cdot|\partial T_m| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}} |R_q(\xi;h)|\cdot \mathrm{diam}\ T_m\cdot|\partial T_m| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}} |R_r(\xi;h)|\cdot \mathrm{diam}\ T_m\cdot|\partial T_m| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le \mathrm{diam}\ T_m\\ \xi+h\in T}} |f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot|T_m| \\
= & \sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}} |R_p(\xi;h)|\cdot 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\cdot 4^{-m}|\partial T| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}} |R_q(\xi;h)|\cdot 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\cdot 4^{-m}|\partial T| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}} |R_r(\xi;h)|\cdot 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\cdot 4^{-m}|\partial T| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}} |f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot 8^{-m}|T|
\end{aligned}
$$

を得る。従って不等式

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial T}\omega-\int_{T}d\omega| \\
\le & \sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}} (|R_p(\xi;h)|+|R_q(\xi;h)|+|R_r(\xi;h)|)\cdot \mathrm{diam}\ T\cdot|\partial T| \\
+ & \sup_{\substack{|h|\le 2^{-m}\mathrm{diam}\ T\\ \xi+h\in T}} |f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot|T|
\end{aligned}
$$

が成立ち右辺は $m\to\infty$ で 0 に収束するので次のガウスの定理を得る。

定理３　（閉三角錐上のガウスの定理）　閉三角錐 T 上で微分可能な函数 p,q,r を係数とする二形式 $\omega=pdx_2\wedge dx_3+qdx_3\wedge dx_1+rdx_1\wedge dx_2$ に対しその外微分 $d\omega=(\partial_1p+\partial_2q+\partial_3r)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ の係数としての函数 $f=\partial_1p+\partial_2q+\partial_3r$ が T 上連続であれば次の等式が成立つ：

$$\int_{\partial T}\omega=\int_T d\omega$$

註３　p, q, r は C^1 級である事を仮定していない。$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能でその導函数 φ' は不連続な函数とし $p(x_1, x_2, x_3) = x_1\varphi(x_3), q(x_1, x_2, x_3) = -x_2\varphi(x_3), r(x_1, x_2, x_3) = 0$ と置くと p, q は C^1 級ではないが $\partial_1 p + \partial_2 q + \partial_3 r = 0$ は連続であるので定理 3 が適用可能である。

定理４　（三鎖体上のガウスの定理）　U を $\mathbb{R}^3$ の開集合とし ω を U 上で微分可能な函数 p, q, r を係数とする二形式とする：

$$\omega = pdx_2 \wedge dx_3 + qdx_3 \wedge dx_1 + rdx_1 \wedge dx_2$$

ω の外微分 $d\omega = (\partial_1 p + \partial_2 q + \partial_3 r)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ の係数としての函数 $f = \partial_1 p + \partial_2 q + \partial_3 r$ は U 上連続であるとする。このとき U 内の任意の三鎖体 σ に対し次の等式が成立つ：

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$$

（証明）　定理 2 と同様に議論すれば良い。

4. ストークスの定理

前節迄の議論を一般次元で行うには、標準単体に基づく鎖体よりも標準立方体に基づく鎖体上で考える方が簡単である。そこで標準 n 立方体 $R = [0, 1]^n$ 上での n 形式

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \overset{j}{\cdots\check{}\cdots} \wedge dx_n$$

を考えよう。ここに各 f_j は R 上微分可能であるとし

$$f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_j$$

で定義される f は R 上連続であると仮定する。さて R の各辺を二等分し 2^n 個の立方体 $R^{(i)} (1 \leq i \leq 2^n)$ に分割する：

$$R = \bigcup_{i=1}^{2^n} R^{(i)},$$
$$\mathrm{Int}\ R^{(i)} \cap \mathrm{Int}\ R^{(j)} = \emptyset\ (i \neq j)$$

これより等式

$$\int_R d\omega = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{R^{(i)}} d\omega$$
$$\int_{\partial R} \omega = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\partial R^{(i)}} \omega$$

が成立ち

$$\int_{\partial R}\omega-\int_R d\omega=\sum_{i=1}^{2^n}(\int_{\partial R^{(i)}}\omega-\int_{R^{(i)}}d\omega)$$

を得る。そこで

$$\max_{1\le i\le 2^n}|\int_{\partial R^{(i)}}\omega-\int_{R^{(i)}}d\omega|$$

を与える $R^{(i)}$ を一つ選んで R_1 と表す事にすると

$$\begin{aligned}&|\int_{\partial R}\omega-\int_R d\omega|\le 2^n|\int_{\partial R_1}\omega-\int_{R_1}d\omega|\\&R_1\subset R,\ \mathrm{diam}\ R_1=2^{-1}\mathrm{diam}\ R,|\partial R_1|=2^{-(n-1)}|\partial R|,\\&|R_1|=2^{-n}|R|\end{aligned}$$

が成立つ。ここに立方体 Q の表面積及び体積を $|\partial Q|$ 及び $|Q|$ とする。この議論を繰り返す事により任意の $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し立方体 R_m が存在し

$$\begin{aligned}&|\int_{\partial R}\omega-\int_R d\omega|\le\ 2^{nm}|\int_{\partial R_m}\omega-\int_{R_m}d\omega|\\&R_m\subset R_{m-1}\subset\cdots\subset R_1\subset R,\\&\mathrm{diam}\ R_m=2^{-m}\mathrm{diam}\ R,\\&|\partial R_m|=2^{-(n-1)m}|\partial R|,\ |R_m|=2^{-nm}|R|\end{aligned}$$

とする事が出来る。このとき

$$\{\xi\}=\bigcap_{m\ge 1}R_m$$

なる $\xi\in R$ が唯一つ存在する。さて

$$\int_{\partial R_m}dx_1\wedge\overset{j}{\check{\cdots}}\wedge dx_n=0,$$

$$\int_{\partial R_m}(x_i-\xi_i)dx_1\wedge\overset{j}{\check{\cdots}}\wedge dx_n=(-1)^{i-1}|R_m|\delta_{ij}$$

である事に注意すると等式

$$\begin{aligned}&\int_{\partial R_m}\omega-\int_{R_m}d\omega\\=&\sum_{j=1}^n\int_{\partial R_m}(-1)^{j-1}(f_j'(x)-f_j(\xi)-f_j'(\xi)\cdot(x-\xi))dx_1\wedge\overset{j}{\check{\cdots}}\wedge dx_n\\+&\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}f_j'(\xi)\cdot\int_{\partial R_m}(x-\xi)dx_1\wedge\overset{j}{\check{\cdots}}\wedge dx_n-\int_{R_m}d\omega\\=&\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\int_{\partial R_m}R_{f_j}(\xi;x-\xi)\cdot(x-\xi)dx_1\wedge\overset{j}{\check{\cdots}}\wedge dx_n\\&+\int_{R_m}(f(\xi)-f(x))dx\end{aligned}$$

が成立つ。これより

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial R_m}\omega-\int_{R_m}d\omega| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\sup_{\substack{|h|\leq \mathrm{diam}\ R_m\\ \xi+h\in R}}|R_{f_j}(\xi;h)|\cdot \mathrm{diam}\ R_m\cdot|\partial R_m| \\
&+\sup_{\substack{|h|\leq \mathrm{diam}\ R_m\\ \xi+h\in R}}|f(\xi)-f(x)|\cdot|R_m| \\
&=\sum_{j=1}^{n}\sup_{\substack{|h|\leq 2^{-m}\mathrm{diam}\ R\\ \xi+h\in R}}|R_{f_j}(\xi;h)|\cdot 2^{-m}\mathrm{diam}\ R\cdot 2^{-(n-1)m}|\partial R| \\
&+\sup_{\substack{|h|\leq 2^{-m}\mathrm{diam}\ R\\ \xi+h\in R}}|f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot 2^{-nm}|R|
\end{aligned}
$$

を得る。従って不等式

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\partial R}\omega-\int_{R}d\omega| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\sup_{\substack{|h|\leq 2^{-m}\mathrm{diam}\ R\\ \xi+h\in R}}|R_{f_j}(\xi;h)|\cdot \mathrm{diam}\ R\cdot|\partial R| \\
&+\sum_{j=1}^{n}\sup_{\substack{|h|\leq 2^{-m}\mathrm{diam}\ R\\ \xi+h\in R}}|f(\xi)-f(\xi+h)|\cdot|R|
\end{aligned}
$$

が成立ち右辺は $m\to\infty$ で 0 に収束するので次のストークスの定理を得る。

定理5（閉 n 立方体上のストークスの定理） 閉 n 立方体 R 上で微分可能な函数 $f_1,\cdots,f_n$ を係数として含む $(n-1)$ 形式

$$
\omega=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}f_j dx_1\wedge\cdots\overset{j}{\check{}}\cdots\wedge dx_n
$$

に対しその外微分

$$
d\omega=\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j f_j\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n
$$

の係数としての函数 $f=\sum_{j=1}^{n}\partial_j f_j$ が R 上連続であれば次の等式が成立つ：

$$
\int_{\partial R}\omega=\int_R d\omega
$$

定理６（n 鎖体上のストークスの定理） U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし ω を U 上で微分可能な函数 $f_1, \cdots, f_n$ を係数として含む $(n-1)$ 形式とする：

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \cdots \overset{j}{\check{}} \cdots \wedge dx_n$$

ω の外微分

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j f_j \right) dx_1 \wedge \cdots \cdot \wedge dx_n$$

の係数としての函数 $f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \partial_j f_j$ は U 上連続であるとする。このとき U 内の任意の（標準立方体に基づく）n 鎖体 σ に対し次の等式が成立つ：

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$$

（証明）　定理２と同様に議論すれば良い。

参考文献：

スピヴァック，多変数解析学，東京図書

藤原大輔，三角形における Green の定理について，2010 年 2 月 27 日
学習院大学数学科談話会
http://www.math.gakushuin.ac.jp/Annai/index_fujiwara.html

S. Bochner, Green-Goursat theorem, Math. Z., **63**(1955), 230-242.

P.J. Cohen, On Green's theorem, Proc. AMS, **10**(1959), 109-112.