ヒルベルト空間に於ける完全正規直交系とリースの表現定理

平成 21 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

必ずしも可分とは限らないヒルベルト空間の完全正規直交系に就いての基本的な性質を纏め、リースの表現定理を完全正規直交系の枠組から論じてみよう。その為に先ず、順序付けられていない添字集合上の級数の総和可能性に関する基礎的事項に就いて述べよう。

１．総和可能な級数

X を（複素）ノルム空間、I を集合とし、$u = (u_i)_{i\in I}$ を添字集合 I によって添字付けられた X の元の族、即ち u は I から X への写像 (即ち $u : I \to X$) で $i \in I$ に於ける値が u_i(即ち $u(i) = u_i$) となるものとする。このとき級数 $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ が**総和可能**であるとは $S \in X$ が存在し次の条件が満たされることと定義する：
任意の $\epsilon > 0$ に対し I の有限部分集合 J が存在し $J \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対して

$$\|S - \sum_{i\in K} u_i\| < \epsilon$$

となる。
　級数 $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ が総和可能であるとき S をその**総和**と謂い $S = \displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ と表す。

定理１　（１）（**総和の一意性**）総和可能な級数に対する総和は一意的に定まる。即ち $S, S' \in X$ が存在し

- $\forall\epsilon > 0\ \exists J$ 有限 $\subset I : J \subset K$ 有限 $\subset I \Rightarrow \|S - \displaystyle\sum_{i\in K} u_i\| < \epsilon$
- $\forall\epsilon > 0\ \exists J'$有限 $\subset I : J \subset K'$有限 $\subset I \Rightarrow \|S' - \displaystyle\sum_{i\in K'} u_i\| < \epsilon$

が満たされているとすると $S = S'$ が成立つ。

（２）（**総和の線型性**）共通の添字集合 I を持つ二つの総和可能な級数 $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ と $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i$ 及び $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ に対し、級数 $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i)$ は総和可能であり、その総和は $\lambda\displaystyle\sum_{i\in I} u_i + \mu\sum_{i\in I} v_i$ に等しい：

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda\sum_{i\in I} u_i + \mu\sum_{i\in I} v_i$$

（3）（**添字集合に関する総和の加法性**）添字集合 I の分割 $I = I' \cup I'', I' \cap I'' = \emptyset$ が存在し、対応する級数 $\sum_{i \in I'} u_i$ 及び $\sum_{i \in I''} u_i$ が何れも総和可能ならば $\sum_{i \in I} u_i$ も総和可能でありその総和は両者の和に等しい：

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I'} u_i + \sum_{\imath \in I''} u_i$$

（証明）　　（1）与えられた $\epsilon > 0$ に対応する I の有限部分集合 J 及び J' を取り $J'' = J \cup J'$ と置く。このとき $J'' \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し $J \subset K$ 及び $J' \subset K$ が成立つから $\|S - \sum_{i \in K} u_i\| < \epsilon$ 及び $\|S' - \sum_{i \in K'} u_i\| < \epsilon$ が成立つ。故に $\|S - S'\| < 2\epsilon$ となり $\epsilon > 0$ は任意だから $S = S'$ が従う。

（2）夫々の総和を S 及び T とする：$\sum_{i \in I} u_i = S,\ \sum_{i \in I} v_i = T$

与えられた $\epsilon > 0$ に対応する I の有限部分集合を夫々J 及び J' とする。このとき

$J \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し $\|S - \sum_{i \in K} u_i\| < \epsilon$

$J' \subset K' \subset I$ なる任意の有限集合 K' に対し $\|T - \sum_{i \in K'} v_i\| < \epsilon$

が成立つ。$J'' = J \cup J'$ とすると $J'' \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し

$$\begin{aligned} &\|\lambda S + \mu T - \sum_{i \in K} (\lambda u_i + \mu v_i)\| \\ &\leq |\lambda|\ \|S - \sum_{i \in K} u_i\| + |\mu|\ \|T - \sum_{i \in K} v_i\| < (|\lambda| + |\mu|)\epsilon \end{aligned}$$

が成立つ。これより（2）が従う。

（3）与えられた $\epsilon > 0$ に対し、対応する I の有限部分集合 J' 及び J'' を取り、$J' \subset K' \subset I'$ 及び $J'' \subset K'' \subset I''$ なる任意の有限集合 K' 及び K'' に対し $\|\sum_{i \in I'} u_i - \sum_{i \in K'} u_i\| < \epsilon$ 及び $\|\sum_{i \in I''} u_i - \sum_{i \in K''} u_i\| < \epsilon$ が成立つようにする事が出来る。そこで $J = J' \cup J''$ とすると $J' \cap J'' = \emptyset$ なので $J \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し $J' \cap K$ は $J' \subset J' \cap K \subset I'$ なる有限集合、$J'' \cap K$ は $J'' \subset J'' \cap K \subset I''$ なる有限集合で $K = (J' \cap K) \cup (J'' \cap K)$ かつ $(J' \cap K) \cap (J'' \cap K) = \emptyset$ となる。従って

$$\begin{aligned} &\|\left(\sum_{i \in I'} u_i + \sum_{i \in I''} u_i \right) - \sum_{i \in K} u_i\| \\ &= \|\left(\sum_{i \in I'} u_i + \sum_{i \in I''} u_i \right) - \left(\sum_{i \in J' \cap K} u_i + \sum_{i \in J'' \cap K} u_i \right)\| \\ &\leq \|\sum_{i \in I'} u_i - \sum_{i \in J' \cap K} u_i\| + \|\sum_{i \in I''} u_i - \sum_{i \in J'' \cap K} u_i\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

となる。これより（3）が従う。

註　総和可能な級数 $\sum_{i\in I} u_i$ に対し $u=(u_i)_{i\in I}$ は「0 に収束する。」即ち任意の $\epsilon>0$ に対し I の有限部分集合 J が存在し $\sup_{i\in I\setminus J}\|u_i\|<\epsilon$ となる。実際、任意の $\epsilon>0$ に対し I の有限部分集合 J で、$J\subset K\subset I$ なる任意の K に対し $\|S-\sum_{i\in K} u_i\|<\epsilon/3$ なるものを取っておく。このとき任意の $k\in I\setminus J$ に対し

$$\|S-\sum_{i\in J} u_i\|<\epsilon/3$$

$$\|S-\sum_{i\in J\cup\{k\}} u_i\|<\epsilon/3$$

となるので

$$\begin{aligned}\|u_k\| &= \|\sum_{i\in J\cup\{k\}} u_i-\sum_{i\in J} u_i\| \\ &\le \|\sum_{i\in J\cup\{k\}} u_i-S\|+\|S-\sum_{i\in I} u_i\|<\frac{2}{3}\epsilon\end{aligned}$$

故に

$$\sup_{k\in I\setminus J}\|u_k\|\le\frac{2}{3}\epsilon<\epsilon$$

定理２（コーシーの判定条件）　X がバナッハ空間であるとき級数 $\sum_{i\in I} u_i$ に対し次は同値：

（1）$\sum_{i\in I} u_i$ は総和可能である。

（2）任意の $\epsilon>0$ に対し I の有限部分集合 J が存在し $K\subset I\setminus J$ なる任意の有限集合 K に対し $\|\sum_{i\in K} u_i\|<\epsilon$

(証明) **（1）⇒（2）**：任意の $\epsilon>0$ に対し I の有限部分集合 J が存在し $J\subset K'\subset I$ なる任意の有限集合 K' に対し $\|\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in K'} u_i\|<\epsilon$ となる。特に $\|\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in J} u_i\|<\epsilon$ となる。さて $K\subset I\setminus J$ なる任意の有限集合 K に対し $K'=J\cup K$ と置くと K' は $J\subset K'\subset I$ なる有限集合となるので $\|\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in K'} u_i\|<\epsilon$ が従う。一方 $J\cap K=\emptyset$ なので $\sum_{i\in K'} u_i=\sum_{i\in J} u_i+\sum_{i\in K} u_i$ となる。故に

$$\begin{aligned}\|\sum_{i\in K} u_i\| &= \|\left(\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in J} u_i\right)-\left(\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in K'} u_i\right)\| \\ &\le \|\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in J} u_i\| \;+\; \|\sum_{i\in I} u_i-\sum_{i\in K'} u_i\|<\epsilon+\epsilon=2\epsilon\end{aligned}$$

となり（2）が従う。

（2）$\Rightarrow$ **（1）**：$\epsilon = 1/n$ に対応する J を J'_n と表し $n = 1$ に対して $J_1 = J'_1$ とし $n \geqslant 2$ に対しては $J_n = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n-1} J'_k$ と置く。このとき $\{J_n\}_{n \geqslant 1}$ は I の有限部分集合の単調増加列である。$s_n = \sum_{i \in J_n} u_i$ と置くと $m > n$ に対し $s_m - s_n = \sum_{i \in J_m \setminus J_n} u_i$ となり $J_m \setminus J_n$ は $J_m \setminus J_n \subset I \setminus J_n$ なる有限集合であるから $\|s_m - s_n\| < 1/n$ となる。従って $\{s_n\}_{n \geqslant 1}$ はコーシー列となり或る極限 $s \in X$ を持つ。最後の不等式で $m \to \infty$ とすれば $\|s - s_n\| \leq 1/n$ となる。さて任意の $\epsilon > 0$ に対し $0 < 1/n < \epsilon$ なる n を取り有限部分集合 $J_n \subset I$ を考える。このとき $J_n \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し $K \setminus J_n$ は $K \setminus J_n \subset I \setminus J_n$ なる有限集合であるから（2）によって $\|\sum_{i \in K \setminus J_n} u_i\| < \epsilon$ 即ち $\|\sum_{i \in K} u_i - s_n\| < \epsilon$ が従う。故に $\|s - \sum_{i \in K} u_i\| \leq \|s - s_n\| + \|s_n - \sum_{i \in K} u_i\| \leq 1/n + \epsilon < 2\epsilon$ となり（1）が従う。

定理３（正項級数の総和可能性）　I を集合とし $u = (u_i)_{i \in I}$ を添字集合 I によって添字付けられた $\mathbb{R}_{\geq 0}$ の元の族とする。このとき級数 $\sum_{i \in I} u_i$ に対し次は同値である。

（1）$\sum_{i \in I} u_i$ は総和可能である。

（2）$M > 0$ が存在して I の任意の有限部分集合 K に対し $\sum_{i \in K} u_i \leq M$

このとき更に次の等式が成立つ：

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ \sharp J < \infty}} \sum_{i \in J} u_i$$

（証明）**（1）**$\Rightarrow$ **（2）**：総和可能な級数 $\sum_{i \in K} u_i$ の総和を $S \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ としよう。$\epsilon = 1$ に対応する I の有限部分集合 J を取ると $J \subset K' \subset I$ なる任意の有限集合 K' に対し $\sum_{i \in K'} u_i \leq S + 1$ となる。このとき I の任意の有限部分集合 K に対し $K' = J \cup K$ とすれば K' は $J \subset K' \subset I$ なる有限集合なので

$$\sum_{i \in K} u_i \leq \sum_{i \in K'} u_i \leq S + 1$$

となり $S + 1$ は K に依存しないから（2）が従う。

（2）$\Rightarrow$ **（1）**：（2）が成立つとすると非負の実数 T が

$$T = \sup_{\substack{J \subset I \\ \sharp J < \infty}} \sum_{i \in J} u_i$$

で定まる。定義より、任意の $\epsilon > 0$ に対し $J \subset I$ なる有限集合 J が存在し $T - \epsilon < \sum_{i \in J} u_i \le T$ が成立つ。このとき $J \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し $T - \epsilon < \sum_{i \in J} u_i \le \sum_{i \in K} u_i \le T$ となるから特に $|T - \sum_{i \in K} u_i| < \epsilon$ が成立つ。これより $\sum_{i \in I} u_i$ は総和可能で $T = \sum_{i \in I} u_i$ が成立つ。

2．ヒルベルト空間に於ける正規直交系

H を複素ヒルベルト空間、$(\cdot, \cdot)$ をその内積とし、その第一成分に就いて線型、第二成分に就いて反線型とする。I を集合とし、添字集合 I によって添字付けられた H の元の族 $e = (e_i)_{i \in I}$ は

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

なるとき e を H の正規直交系と謂う。

定理４　H を複素ヒルベルト空間とし $e = (e_i)_{i \in I}$ を H に於ける正規直交系とすると、任意の $u \in H$ に対し $\{i \in I; (u, e_i) \neq 0\}$ は高々可算個の濃度を持ち、正項級数 $\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2$ は総和可能であり次の不等式が成立つ。

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 \le \|u\|^2$$

（証明）　J を I の任意の有限部分集合とすると

$$\begin{aligned}
\|u - \sum_{i \in J} (u, e_i) e_i\|^2 &= \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}(u, \sum_{i \in J} (u, e_i) e_i) + \| \sum_{i \in J} (u, e_i) e_i \|^2 \\
&= \|u\|^2 - 2 \sum_{i \in J} \mathrm{Re}(\overline{(u, e_i)} (u, e_i)) + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} ((u, e_i) e_i, (u, e_j) e_j) \\
&= \|u\|^2 - 2 \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 + \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} (u, e_i) \overline{(u, e_j)} (e_i, e_j) \\
&= \|u\|^2 - 2 \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 + \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 \\
&= \|u\|^2 - \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2
\end{aligned}$$

となるから

$$\sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 \le \|u\|^2$$

が従う。故に定理３により $\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2$ は総和可能であり $\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 = \sup_{\substack{J \subset I \\ \sharp J < \infty}} \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 \le \|u\|^2$ が従う。$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I_n(u) = \{i \in I; |(u, e_i)| \ge 1/n\}$ と置くと

$$\sum_{u \in I} |(u, e_i)|^2 \ge \sum_{i \in I_n(u)} |(u, e_i)|^2 \ge (\sharp I_n(u))/n$$

となるので $\sharp I_n(u) \le n\|u\|^2$ が従う。このとき

$$\{i \in I;\ (u, e_i) \ne 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} I_n(u)$$

となり高々可算の濃度を持つ。

定理４の系　$e = (e_i)_{i \in I}$ をヒルベルト空間 H の正規直交系とすると任意の $u \in H$ に対し $\{i \in I; (u, e_i) \ne 0\}$ は高々可算であり級数 $\displaystyle\sum_{i \in I}(u, e_i)e_i$ は H に於いて総和可能である。

（証明）定理４により

$$\sup_{\substack{J \subset I \\ \sharp J < \infty}} \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 = \sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 < \infty$$

であるから任意の $\epsilon > 0$ に対し I の有限部分集合 J があって

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 - \epsilon < \sum_{i \in J} |(u, e_i)|^2 \le \sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2$$

となる。このとき $K \subset I \setminus J$ なる任意の有限集合 K に対し

$$\begin{aligned} \|\sum_{i \in K}(u, e_i)e_i\|^2 &= \sum_{i \in K} |(u, e_i)|^2 \\ &\le \sum_{i \in I \setminus J} |(u, e_i)|^2 = \sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 - \sum_{i \in J} |(u, e_i|^2 < \epsilon \end{aligned}$$

となりコーシーの判定条件により $\displaystyle\sum_{i \in I}(u, e_i)e_i$ は総和可能となる。

定理５　H を複素ヒルベルト空間とする。H に於ける正規直交系 $e = (e_i)_{i \in I}$ に対し次は同値である。

（１）$\overline{\mathrm{span}\ e} = H$ 即ち $(e_i)_{i \in I}$ の有限一次結合全体の成す部分空間は H で稠密である。

（２）任意の $u \in H$ に対し級数 $\displaystyle\sum_{i \in I}(u, e_i)e_i$ は H に於いて総和可能であり、総和は u に等しい：

$$u = \sum_{i \in I}(u, e_i)e_i$$

（３）任意の $u, v \in H$ に対し級数 $\displaystyle\sum_{i \in I}(u, e_i)\overline{(v, e_i)}$ は $\mathbb{C}$ に於いて総和可能であり、総和は (u, v) に等しい：

$$(u, v) = \sum_{i \in I}(u, e_i)\overline{(v, e_i)}$$

（４）任意の $u \in H$ に対し正項級数 $\displaystyle\sum_{i \in I}|(u, e_i)|^2$ は総和可能であり、総和は $\|u\|^2$ に等しい：

$$\|u\|^2 = \sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2$$

（5）任意の $i\in I$ に対して $(u,e_i)=0$ なる $u\in H$ は $u=0$ に限る。

定義　定理５の同値な性質を満たす正規直交系は**完全**であると謂う。

（証明）**（1）**$\Rightarrow$ **（2）**：定理４の系により $\displaystyle\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i$ は総和可能である。任意の $\epsilon>0$ に対し I の有限部分集合 $J\subset I$ が存在して $J\subset K\subset I$ なる任意の有限集合 K に対し

$$\|\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i\|<\epsilon$$

となる。（1）の仮定により任意の $v\in H$ に対し I の有限部分集合 J' 及び $(a_j)_{j\in J'}\subset\mathbb{C}$ が存在し

$$\|v-\sum_{j\in J'}a_je_j\|<\epsilon$$

となる。このとき $K=J\cup J'$ とすると

$$\begin{aligned}
&(u-\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i,v)\\
=&(u-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i,v)+(\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i-\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i,v)\\
=&(u-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i,\sum_{j\in J'}a_je_j)\\
&+(u-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i,v-\sum_{j\in J'}a_je_j)\\
&+(\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i-\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i,v)
\end{aligned}$$

となる。最後の等式の右辺の最初の項は

$$\sum_{j\in J'}\overline{a_j}(u-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i,e_j)=\sum_{j\in J'}\overline{a_j}((u,e_j)-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i,e_j))=0$$

となり、次の項は

$$\begin{aligned}
|(u-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i,v-\sum_{j\in J'}a_je_j)|&\le\|u-\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i\|\|v-\sum_{j\in J'}a_je_j\|\\
&\le(\|u\|^2-\sum_{i\in K}|(u,e_i)|^2)^{1/2}\epsilon\le\|u\|\epsilon
\end{aligned}$$

と評価され、最後の項は

$$|(\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i-\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i,v)|\le\|\sum_{i\in K}(u,e_i)e_i-\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i\|\ \|v\|\le\|v\|\epsilon$$

と評価される。従って不等式

$$|(u-\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i,v)|\le(\|u\|+\|v\|)\epsilon$$

が成立ち $\epsilon > 0$ は任意故

$$(u - \sum_{i\in I}(u,e_i)e_i, v) = 0$$

を得る。v は任意故 $v = u - \sum_{i\in I}(u,e_i)e_i$ とすれば $u - \sum_{i\in I}(u,e_i)e_i = 0$ が従う。

（2）$\Leftrightarrow$ **（4）**：I の任意の有限部分集合 J に対し

$$\|u - \sum_{i\in J}(u,e_i)e_i\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i\in J}|(u,e_i)|^2$$

となることから（2）と（4）は同値である。

（3）$\Leftrightarrow$ **（4）**：（3）で $u = v$ とすれば（4）となる。一方、（4）を $u \pm v, u \pm iv$ に適用し

$$\begin{aligned}
4(u,v) &= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 \\
&= \sum_{i\in I}|(u+v,e_i)|^2 - \sum_{i\in I}|(u-v,e_i)|^2 + i\sum_{i\in I}|(u+iv,e)|^2 - i\sum_{i\in I}|(u-iv,e_i)|^2 \\
&= 4\mathrm{Re}\sum_{i\in I}(u,e_i)\overline{(v,e_i)} + 4i\mathrm{Im}\sum_{i\in I}(u,e_i)\overline{(v,e_i)} = 4\sum_{i\in I}(u,e_i)\overline{(v,e_i)}
\end{aligned}$$

とすれば（3）が従う。

（4）$\Rightarrow$ **（5）**：（4）の等式の右辺が全て 0 ならば左辺も 0 となる。

（5）$\Rightarrow$ **（2）**：任意の $i \in I$ に対し

$$(u - \sum_{k\in I}(u,e_k)e_k, e_i) = (u,e_i) - (u,e_i) = 0$$

であるから（5）を仮定すると（2）が従う。

（2）$\Rightarrow$ **（1）**：総和可能な級数 $\sum_{i\in I}(u,e_i)e_i$ の総和が u である事の定義より（1）が従う。

定理６　$\{0\}$ でない任意のヒルベルト空間は完全正規直交系を持つ。

（証明）H を $\{0\}$ でないヒルベルト空間、E を H の正規直交系全体の成す集合とする。$e = (e_i)_{i\in I}, f = (f_j)_{j\in J} \in E$ に対し $e \leqslant f$ を

$$e \leqslant f \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall i \in I\ \exists j \in J : e_i = f_j$$

と定義すると $\leqslant$ は E に於ける順序となる。$H \neq \{0\}$ 故 $\|u\| = 1$ なる $u \in H$ が存在する。一点 u のみからなる系は E の正規直交系となるから E は空でない。次に E は帰納的順序集合である事を示そう。F を E の全順序部分集合とする。F に属する正規直交系を全

て考え、その合併集合として得られる族を $f=(f_k)_{k\in K}$ と表そう。任意の $i,j\in K$ に対し $f^{(i)}=(f_k)_{k\in K_i}, f^{(j)}=(f_k)_{k\in K_j}\in F$ が存在し $i\in K_i, j\in K_j$ となる。F は全順序であるから $f^{(i)}\leqslant f^{(j)}$ または $f^{(j)}\leqslant f^{(i)}$ となる。前者の場合 $K_i\subset K_j$ であり $i,j\in K_j$ となるから f_i も f_j も正規直交系 $f^{(j)}$ に属し $(f_i,f_j)=\delta_{ij}$ となる。後者の場合 $K_j\subset K_i$ であり $i,j\in K_i$ となるから f_i も f_j も正規直交系 $f^{(i)}$ に属し $(f_i,f_j)=\delta_{ij}$ となる。従って $f=(f_k)_{k\in K}$ は正規直交系を成し $f\in F$ となる。f の定義より任意の $e\in F$ に対し $e\leqslant f$ となるから f は F の上界となる。

以上より E は空でない帰納的順序集合となる。ツォルンの補題より E には極大元が存在する。その一つを $e=(e_i)_{i\in I}$ とする。もし e が完全でないとすると $u\in H\setminus\{0\}$ が存在して任意の $i\in I$ に対し $(u,e_i)=0$ となる。そこで e に $u/\|u\|$ を付け加えたものを e' とすると $e\neq e'$ かつ $e\leqslant e'$ が従い e の極大性に反する。従って e は完全である。

定義　空でない集合 I に対し

$l^2(I)=\{u:I\to\mathbb{C};$ 正項級数 $\displaystyle\sum_{i\in I}|u(i)|^2$ は総和可能である $\}$

とする。$u,v\in l^2(I)$ に対し $(u,v)=\displaystyle\sum_{i\in I}u(i)\overline{v(i)}$ と定めると $l^2(I)$ は内積空間となる。

定理７　空でない集合 I に対し $l^2(I)$ は次の性質を持つ：

（１）$l^2(I)$ はヒルベルト空間である。

（２）各 $i\in I$ に対し $e_i:I\to\mathbb{C}$ を $e_i(j)=0\ (j\neq i), e_i(i)=1$ と定めると $(e_i)_{i\in I}$ は $l^2(I)$ の完全正規直交系を成す。I が有限の場合は $(e_i)_{i\in I}$ は $l^2(I)$ の基底となり $\dim l^2(I)=\mathrm{card}(I)=\sharp I$ が成立つ。

（３）もう一つの空でない集合 J に対し次は同値である。
- (i)　$l^2(I)$ と $l^2(J)$ はユニタリ同型である。
- (ii)　$\mathrm{card}(I)=\mathrm{card}(J)$

(証明)（１）完備性を示そう。$\{u_n\}\subset l^2(I)$ をコーシー列とする。各 $i\in I$ に対し $|u_m(i)-u_n(i)|\leq\|u_m-u_n\|\to 0(m,n\to\infty)$ となるから $\{u_n(i)\}$ は $\mathbb{C}$ のコーシー列であり極限を持つ。それを $u(i)\in\mathbb{C}$ と表す：$\lim_{n\to\infty}u_n(i)=u(i)$
J を I の任意の有限部分集合とすると三角不等式より

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in J}|u(i)|^2\right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{i\in J}|u(i)-u_n(i)|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i\in J}|u_n(i)|^2\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\sum_{i\in J}|u(i)-u_n(i)|^2\right)^{1/2}+\sup_{n\geq 1}\|u_n\|\end{aligned}$$

コーシー列は有限列なので最後の不等式の右辺の第二項は有限であり第一項は J の有限性より $n \to \infty$ で 0 に収束する。これより

$$\left(\sum_{i\in J}|u(i)|^2\right)^{1/2} \le \sup_{n\ge 1}\|u_n\|$$

右辺は J に依存しないので正項級数 $\sum_{i\in I}|u(i)|^2$ は総和可能となり

$$\sum_{i\in I}|u(i)|^2 = \sup_{\substack{J\subset I\\ \sharp J<\infty}}\sum_{i\in I}|u(i)|^2 \le \left(\sup_{n\ge 1}\|u_n\|\right)^2$$

が従う。故に $u \in l^2(I)$ となる。

さて任意の $\epsilon > 0$ に対し N が存在し $m, n \ge N$ なる任意の m, n に対し $\|u_m - u_n\| < \epsilon$ となる。I の任意の有限部分集合 J に対し

$$\sum_{i\in J}|u_m(i) - u_n(i)|^2 \le \|u_m - u_n\|^2 < \epsilon^2$$

であるから $m \to \infty$ として

$$\sum_{i\in J}|u(i) - u_n(i)|^2 \le \epsilon^2$$

を得る。これより

$$\sum_{i\in I}|u(i) - u_n(i)|^2 = \sup_{\substack{J\subset I\\ \sharp J<\infty}}\sum_{i\in J}|u(i) - u_n(i)|^2 \le \epsilon^2$$

を得る。以上より任意の $\epsilon > 0$ に対し N が存在し $n \ge N$ なる任意の n に対し

$$\|u - u_n\| \le \epsilon$$

となる事が分った。これは $\{u_m\}$ が $u \in l^2(I)$ に収束する事に外ならない。

（2）任意の $i, j \in I$ に対し

$$(e_i, e_j) = \sum_{k\in I} e_i(k)\overline{e_j(k)} = \sum_{k\in I}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$$

となるので $(e_i)_{i\in I}$ は正規直交系である。任意の $u \in l^2(I)$ に対し

$$(u, e_i) = \sum_{k\in I} u(k)\overline{e_i(k)} = \sum_{k\in I} u(k)\delta_{ik} = u(i)$$

となるので

$$\forall i \in I,\ (u, e_i) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I, u(i) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

より $(e_i)_{i\in I}$ は完全である。

I が有限ならば任意の $u : I \to \mathbb{C}$ は $u = \sum_{i\in I} u(i)e_i$ と表されるので (e_i) は生成系であり $\sum_{i\in I} a_ie_i = 0 (a_i \in \mathbb{C})$ なら各 $j \in I$ に於いて $0 = \sum_{i\in I} a_ie_i(j) = a_j$ となるので (e_i) は独立系である。

（３） **(i) $\Rightarrow$ (ii)** ：$T : l^2(I) \to l^2(J)$ をユニタリ写像とする。I が有限なら（２）より $\mathrm{card}(I) = \dim l^2(I) = \dim l^2(J)$ となる。$e = (e_j)_{j\in J}$ を（２）と同様に定めると（２）より任意の $v \in l^2(J)$ は総和可能な級数

$$v = \sum_{j\in J} (v, e_j)e_j$$

で表される。ここで J は有限でないとすると $\dim l^2(J)$ の有限性に反するので J は有限となる。故に（２）より $\dim l^2(J) = \mathrm{card}(J)$ が従う。そこで以下は I が有限でない場合を考える。$e = (e_i)_{i\in I}$ 及び $f = (f_j)_{j\in I}$ を（２）と同様に定めると夫々$l^2(I)$ 及び $l^2(J)$ の完全正規直交系となる。各 $i \in I$ に対し $J_i = \{j \in J; (T(e_i), f_j) \neq 0\}$ と置く。但し内積 $(\cdot, \cdot)$ は $l^2(J)$ に於けるものとする。定理４により各 $i \in I$ に対し J_i は高々可算である。定義より $\bigcup_{i\in I} J_i \subset J$ である。そこで $J \subset \bigcup_{i\in I} J_i$ を示そう。$j \in J$ を任意に取る。T は全射故 $u \in l^2(I)$ が存在し $T(u) = f_j$ が成立つ。$\|f_j\| = 1$ で T は単射故 $u \neq 0$ が従う。$e = (e_i)_{i\in I}$ は完全正規直交系なので級数 $\sum_{i\in I} (u, e_i)e_i$ は $l^2(I)$ で総和可能で $u = \sum_{i\in I} (u, e_i)e_i$ が成立つ。ここに $\{i \in I; (u, e_i) \neq 0\}$ は高々可算である。いま、任意の $i \in I$ に対し $(u, e_i) = 0$ であると仮定すると $u = 0$ となってしまうので $(u, e_i) \neq 0$ なる $i \in I$ が存在する。以下そのような $i \in I$ を一つ固定して考える。T はユニタリなので $(T(e_i), f_j) = (T(e_i), T(u)) = (e_i, u) \neq 0$ が従う。故に $j \in J_i$ となる。

以上で $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ が示された。$\mathrm{card}(J_i) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$ であるから $\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(I)$ が従う。$T : l^2(I) \to l^2(J)$ の逆写像 $T^{-1} : l^2(J) \to l^2(I)$ もユニタリなので同様に考えると $\mathrm{card}(I) \leq \mathrm{card}(J)$ が従う。これより (ii) を得る。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：仮定より全単射 $\sigma : I \to J$ が存在する。そこで $u \in l^2(I)$ に対し

$$Tu = \sum_{i\in I} (u, e_i)f_{\sigma(i)} = \sum_{j\in J} (u, e_{\sigma^{-1}(j)})f_j$$

と置くと上の級数は $l^2(J)$ に於いて総和可能となる。実際 I の任意の有限部分集合 K に対し

$$\|\sum_{i\in K} (u, e_i)f_{\sigma(i)}\|^2 = \sum_{i\in K}\sum_{k\in K} (u, e_i)\overline{(u, e_k)}(f_{\sigma(i)}, f_{\sigma(k)}) = \sum_{i\in K} |(u, e_i)|^2$$

となりコーシーの判定条件が適用されるからである。$l^2(J)$ 及び $l^2(I)$ の内積の定義により

$$\begin{aligned}(Tu, Tv) &= \sum_{j\in J} (u, e_{\sigma^{-1}(j)})\overline{(v, e_{\sigma^{-1}(j)})} \\ &= \sum_{i\in I} (u, e_i)\overline{(v, e_i)} = (u, v)\end{aligned}$$

を得るので T は内積を保つ。任意の $l^2(J)$ の元

$$v = \sum_{j \in J} (v, f_j) f_j$$

に対し

$$u = \sum_{i \in I} (v, f_{\sigma(i)}) e_i$$

と置くと級数は $l^2(I)$ で総和可能となり

$$Tu = \sum_{i \in I} (v, f_{\sigma(i)}) f_{\sigma(i)} = \sum_{j \in J} (v, f_j) f_j = v$$

となるから T は全射である。T の等距離性から単射性が従う。よって T は $l^2(I)$ から $l^2(J)$ へのユニタリ写像となる。

定理８　$\{0\}$ でない任意のヒルベルト空間 H に対し集合 I が存在し H は $l^2(I)$ とユニタリ同型となる。もう一つの集合 J に対し H は $l^2(J)$ とユニタリ同型ならば $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}\ (J)$ となる。

定義　ヒルベルト空間 H に対して定まる不変量 $\mathrm{card}(I)$ を H の次元と謂う。

（証明）　定理６により H は或る集合 I を添字集合とする完全正規直交系 $(f_i)_{i \in I}$ を持つ。定理５により任意の $u \in H$ は総和可能な級数として

$$u = \sum_{i \in I} (u, f_i) f_i$$

と表示される。各 $i \in I$ に対し $e_i : I \to \mathbb{C}$ を $e_i(j) = \delta_{ij} (j \in I)$ で定める。$u \in H$ に対し級数

$$\sum_{i \in I} (u, f_i) e_i$$

を考える。I の任意の有限部分集合 K に対し

$$\| \sum_{i \in K} (u, f_i) e_i \|^2 = \sum_{i \in K} |(u, f_i)|^2$$

であるからコーシーの判定条件により級数 $\displaystyle\sum_{i \in I} (u, f_i) e_i$ は $l^2(I)$ で総和可能となる。その総和を $\hat{u}$ と表そう。$l^2(I)$ の内積の定義及び定理５により $u, v \in H$ に対し

$$(\hat{u}, \hat{v}) = \sum_{i \in I} (u, f_i) \overline{(v, f_i)} = (u, v)$$

となる。ここに最初の内積は $l^2(I)$ のものであり最後の内積は H のものである。
任意の $l^2(I)$ の元

$$w = \sum_{i \in I} (w, e_i) e_i$$

に対し $\sum_{i\in I}|(w,e_i)|^2$ は総和可能であるから

$$u=\sum_{i\in I}(w,e_i)f_i$$

は H に於いて総和可能となり

$$\hat{u}=\sum_{i\in I}(w,e_i)e_i=w$$

となるので $u\mapsto\hat{u}$ は H から $l^2(I)$ へのユニタリ写像となる。定理８の後半は定理７の（３）より従う。

３．ヒルベルト空間に於けるリースの表現定理

H を複素ヒルベルト空間、$(\cdot,\cdot)$ をその内積とし、その第一成分に就いて線型、第二成分に就いて反線型とする。H' を H 上の有界線型汎関数全体の成すバナッハ空間とする：

$$\begin{aligned} H'&=B(H;\mathbb{C})\\ &=\{f:H\to\mathbb{C}\,;f\text{ は有界線型作用素}\}\end{aligned}$$

任意の $f\in H'$ に対し $\mathrm{Ker}f=\{u\in H;f(u)=0\}$ は H の閉部分空間であり $f\neq 0$ ならば $\mathrm{Ker}f\subsetneqq H,\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ker}f)^{\perp}=\dim_{\mathbb{C}}(H/\mathrm{Ker}f)=1$ となる。

定理９　（１）任意の $f\in H'\setminus\{0\}$ に対し $\|u_0\|=1$ なる $u_0\in(\mathrm{Ker}f)^{\perp}$ が存在する。この様な u_0 は $\mathbb{C}$ 上の符号を除いて一意的に定まる。即ち $\|u_0\|=\|u_0'\|=1$ かつ $u_0,u_0'\in(\mathrm{Ker}f)^{\perp}$ ならば $\theta\in\mathbb{R}$ が存在して $u_0=e^{i\theta}u_0'$ となる。

（２）任意の $f\in H'$ 及び H の任意の完全正規直交系 $e=(e_i)_{i\in I}$ に対し $\{i\in I;f(e_i)\neq 0\}$ は高々可算集合であり級数 $\sum_{i\in I}\overline{f(e_i)}e_i$ は H に於いて総和可能である。

（３）任意の $f\in H'\setminus\{0\}$ について（１）で与えられる任意の u_0 及び H の任意の完全正規直交系 $e=(e_i)_{i\in I}$ に対して次の等式が成立つ：

$$\overline{f(u_0)}u_0=\sum_{i\in I}\overline{f(e_i)}e_i$$

（４）任意の $f\in H'\setminus\{0\}$ に対し唯一つの $u\in H\setminus\{0\}$ が存在し f は u の内積により表現される。即ち任意の $v\in H$ について等式

$$f(v)=(v,u)$$

が成立つ。更に $\|f\| = \|u\|$ であり $\|u_0\| = 1$ なる任意の $u_0 \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$ 及び H の任意の完全正規直交系 $(e_i)_{i\in I}$ に対し次の等式が成立つ。

$$u = \overline{f(u_0)} u_0 = \sum_{i\in I} \overline{f(e_i)} e_i,$$
$$\|u\|^2 = \|f\|^2 = |f(u_0)| = \sum_{i\in I} |f(e_i)|^2$$

(証明)(1):$\dim_{\mathbb{C}} (\mathrm{Ker} f)^\perp = 1$ であることから従う。
(2),(3):(1)で与えられる u_0 を一つ取る。このとき $\{\lambda u_0; \lambda \in \mathbb{C}\} = (\mathrm{Ker} f)^\perp$ より $\{\lambda u_0; \lambda \in \mathbb{C}\}^\perp = (\mathrm{Ker} f)^{\perp\perp} = \mathrm{Ker} f$ となる。さて任意の $i \in I$ に対し

$$((e_i, u_0)u_0 - e_i, u_0) = (e_i, u_0)\|u_0\|^2 - (e_i, u_0) = 0$$

となるので $(e_i, u_0)u_0 - e_i \in \mathrm{Ker} f$ が従う。これより

$$0 = f((e_i, u_0)u_0 - e_i) = (e_i, u_0)f(u_0) - f(e_i)$$

を得る。$(e_i)_{i\in I}$ は完全正規直交系なので

$$\{i \in I; (u_0, e_i) \neq 0\} = \{i \in I; f(e_i) \neq 0\}$$

は高々可算集合であり、級数 $\sum_{i\in I} (u_0, e_i)e_i$ は H で総和可能でその総和は u_0 に等しい。$\overline{f(e_i)} = \overline{f(u_0)}(u_0, e_i)$ より $\sum_{i\in I} \overline{f(e_i)} e_i$ は H で総和可能で等式

$$\overline{f(u_0)} u_0 = \overline{f(u_0)} \sum_{i\in I} (u_0, e_i)e_i = \sum_{i\in I} \overline{f(u_0)}(u_0, e_i)e_i = \sum_{i\in I} \overline{f(e_i)} e_i$$

が成立つ。

(4) (3)で与えられる $\overline{f(u_0)} u_0 = \sum_{i\in I} \overline{f(e_i)} e_i$ を u と置く。任意の $v \in H$ に対し $\{i \in I; (v, e_i) \neq 0\}$ は高々可算集合で級数 $\sum_{i\in I} (v, e_i)e_i$ に総和可能でその総和は v に等しい。任意の $\epsilon > 0$ に対し I の有限部分集合 J が存在し $J \subset K \subset I$ なる任意の有限集合 K に対し

$$\|u - \sum_{i\in K} \overline{f(e_i)} e_i\| < \epsilon,$$
$$\|v - \sum_{i\in K} (v, e_i)e_i\| < \epsilon$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}
&f(v) - (v, u) \\
&= f(v - \sum_{i\in K} (v, e_i)e_i) + \sum_{i\in K} (v, e_i) f(e_i) \\
&\quad - (v, \sum_{i\in K} \overline{f(e_i)} e_i) + (v, \sum_{i\in K} \overline{f(e_i)} e_i - u) \\
&= f(v - \sum_{i\in K} (v, e_i)e_i) + (v, \sum_{i\in K} \overline{f(e_i)} e_i - u)
\end{aligned}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
|f(v)-(v,u)| &\leq \|f\|\|v-\sum_{i\in K}(v,e_i)e_i\| + \|v\|\|\sum_{i\in K}\overline{f(e_i)}e_i - u\| \\
&\leq (\|f\|+\|v\|)\epsilon
\end{aligned}
$$

が従う。$\epsilon > 0$ は任意なので $f(v) = (v, u)$ が従う。この様な u の一意性は内積のエルミット対称性と非退化性から従う。よって等式

$$
u = \overline{f(u_0)}u_0 = \sum_{i\in I}\overline{f(e_i)}e_i
$$

が成立ち、これより

$$
\|u\|^2 = |f(u_0)|^2 = \sum_{i\in I}|f(e_i)|^2
$$

が従う。また $|f(v)| \leq \|v\|\|u\|$ 及び $f(u) = \|u\|^2$ より $\|f\| = \|u\|$ を得る。

註　$\|u_0\| = \|u_0'\| = 1$ なる二つの $u_0, u_0' \in (\mathrm{Ker} f)^\perp$ に対して

$$
\overline{f(u_0)}u_0 = \overline{f(u_0')}u_0'
$$

となる事は次の様に直接確かめられる。（1）により $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $u_0 = e^{i\theta}u_0'$ となるから

$$
\overline{f(u_0)}u_0 = \overline{f(e^{i\theta}u_0')}e^{i\theta}u_0' = \overline{e^{i\theta}f(u_0')}e^{i\theta}u_0' = \overline{f(u_0')}u_0'
$$

註　H の二つの完全正規直交系 $(e_i)_{i\in I}, (e_j')_{j\in I}$ に対し

$$
\sum_{i\in I}\overline{f(e_i)}e_i = \sum_{j\in I}\overline{f(e_j')}e_j'
$$

となる事は次の様に直接確かめられる。（ここに、二つの完全正規直交系の添字集合間に存在する全単射により、添字集合は共通に取り直して表している。）$(e_i)_{i\in I}$ の完全性により、任意の $j \in I$ に対し $\{i \in I; (e_j', e_i) \neq 0\}$ は高々可算集合であり、級数 $\displaystyle\sum_{i\in I}(e_j', e_i)e_i$ は総和可能であり、その総和は e_j' に等しい：

$$
e_j' = \sum_{i\in I}(e_j', e_i)e_i
$$

同様に、任意の $i \in I$ に対し $\{j \in I; (e_i, e_j') \neq 0\}$ は高々可算集合であり、級数 $\displaystyle\sum_{j\in I}(e_i, e_j')e_j'$ は総和可能であり、その総和は e_i に等しい：

$$
e_i = \sum_{j\in I}(e_i, e_j')e_j'
$$

このとき f の有界性と上の総和可能性により

$$
f(e_i) = \sum_{j\in I}(e_i, e_j')f(e_j')
$$

となるので

$$\sum_{i\in I}\overline{f(e_i)}e_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in I}\overline{(e_i, e'_j)}\ \overline{f(e'_j)}\right)e_i$$
$$= \sum_{j\in I}\overline{f(e'_j)}\left(\sum_{i\in I}(e'_j, e_i)e_i\right) = \sum_{j\in I}\overline{f(e'_j)}e'_j$$

が従う。

参考文献： L. シュワルツ、物理数学の方法、岩波書店
伊藤清三、小松彦三郎、解析学の基礎、岩波書店
山崎圭次郎、解析学概論 I、共立出版
Gerald B. Folland, Real Analysis, John Wiley & Sons, Inc.