Hölder の不等式

平成 19 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

まず次の簡単な命題を考えよう。

命題１．　次は同値である。

(1) $0 < \theta < 1$ なる任意の θ に対し次の不等式が成り立つ:
$\forall x \in (0, \infty), \quad x^\theta \le \theta x + (1 - \theta)$

(2) $0 < \theta < 1$ なる任意の θ に対し次の不等式が成り立つ:
$\forall a, b \in (0, \infty), \quad a^\theta b^{1-\theta} \le \theta a + (1 - \theta) b$

(3) $1/p + 1/q = 1$ なる任意の $p, q \in (1, \infty)$ に対し次の不等式が成り立つ：
$\forall a, b \in (0, \infty), \quad ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$

(証明)　**(1) ⇒ (2)：**　$x = a/b$ に対し (1) を適用すると $a^\theta b^{-\theta} \le \theta a b^{-1} + (1 - \theta)$ となるから両辺に b を掛け (2) を得る。

(2) ⇒ (1)：　$a = x,\ b = 1$ と置けば良い。

(2) ⇒ (3)：　$1/p + 1/q = 1$ なる $p \in (1, \infty)$ に対し $\theta = 1/p$ と置けば、$0 < \theta < 1$ と $1 - \theta = 1/q$ が従うので (2) の a, b に $a^{1/\theta},\ b^{1/(1-\theta)}$ を代入して (3) を得る。

(3) ⇒ (2)：　$0 < \theta < 1$ なる θ に対し $1/p = \theta$ と置けば、$1 < p < \infty$ と $1/q \equiv 1 - 1/p = 1 - \theta \in (0, 1)$ が従うので (3) の a, b に $a^\theta,\ b^{1-\theta}$ を代入して (2) を得る。

(1) の不等式は $y = x^\theta,\ x > 0$ のグラフが ($x = 1$ での接線である) 直線 $y = \theta x + (1 - \theta)$ を越えない事を示している。(1) の証明には函数 $f(x) = \theta x + (1 - \theta) - x^\theta$ の増減を調べるのが一般的であろうが、次の様な考え方もある:

$$x \ge 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x^\theta - 1 = \theta \int_x^1 t^{\theta - 1} dt \le \theta \int_x^1 dt = \theta(x - 1)$$

$$0 < x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^\theta = \theta \int_x^1 t^{\theta - 1} dt \ge \theta \int_x^1 dt = \theta(1 - x) \ge 0$$

また、exp が凸函数である事を用いる方法もある：

$$\begin{aligned}x^\theta &= \exp(\log x^\theta) = \exp(\theta \log x)\\ &= \exp(\theta \log x + (1-\theta)\log 1)\\ &\le \theta \exp(\log x) + (1-\theta)\exp(\log 1) = \theta x + (1-\theta)\end{aligned}$$

不等式 (1) に於いて等号が成立するのは $x = 1$ の場合のみである事から、同値な不等式 (2) に於いて等号が成立するのは $a = b$ の場合のみであり、(3) に於いて等号が成立するのは $a^{1/\theta} = b^{1/(1-\theta)} \Leftrightarrow a = b^{\theta/(1-\theta)} \Leftrightarrow a = b^{q/p}$ の場合のみである事が分かる。

以上の考察と、$t > 0$ に対し $x^\theta = t^{-\theta}(tx)^\theta,\ a^\theta b^{1-\theta} = (t^{1-\theta}a)^\theta (t^{-\theta}b)^{1-\theta},\ ab = (t^{\frac{1}{pq}}a)(t^{-\frac{1}{pq}}b)$ となる事により次の命題が従う。

命題２． 次の等式が成り立つ。

(1) $0 < \theta < 1$ なる任意の θ と任意の $x > 0$ に対し

$$x^\theta = \min\{\theta t^{1-\theta} x + (1-\theta)t^{-\theta}; t > 0\}$$

(2) $0 < \theta < 1$ なる任意の θ と任意の $a, b > 0$ に対し

$$a^\theta b^{1-\theta} = \min\{\theta t^{1-\theta} a + (1-\theta)t^{-\theta} b; t > 0\}$$

(3) $1/p + 1/q = 1$ なる任意の $p, q \in (1, \infty)$ と任意の $a, b > 0$ に対し

$$ab = \min\left\{\frac{1}{p}t^{1/q}a^p + \frac{1}{q}t^{-1/p}b^q; t > 0\right\}$$

(証明)　最小値は夫々 $t = x^{-1}, a^{-1}b, a^{-p}b^q$ で実現される。

さて、測度空間 (X, μ) 上の p 乗可積分函数の成す空間 $L^p((X,\mu);\mathbb{C})$ とその共軛指数 q を持つ空間 $L^q((X,\mu);\mathbb{C})$ を考えよう。$f \in L^p((X,\mu);\mathbb{C}),\ g \in L^q((X,\mu);\mathbb{C}), \varepsilon > 0$ に対し、命題１の (3) の a 及び b を $|f|/(\|f\|_p + \varepsilon)$ 及び $|g|/(\|g\|_q + \varepsilon)$ の各点に夫々適用した不等式

$$\frac{|fg|}{(\|f\|_p + \varepsilon)(\|g\|_q + \varepsilon)} \le \frac{1}{p}\frac{|f|^p}{(\|f\|_p + \varepsilon)^p} + \frac{1}{q}\frac{|g|^q}{(\|g\|_q + \varepsilon)^q}$$

を X 上 μ で積分して

$$\frac{\int_X |fg| d\mu}{(\|f\|_p + \varepsilon)(\|g\|_q + \varepsilon)} \le \frac{1}{p}\frac{\|f\|_p^p}{(\|f\|_p + \varepsilon)^p} + \frac{1}{q}\frac{\|g\|_q^q}{(\|g\|_q + \varepsilon)^q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

これより

$$\|fg\|_1 \le (\|f\|_p + \varepsilon)(\|g\|_q + \varepsilon)$$

を得る。$\varepsilon > 0$ は任意であったから Hölder の不等式

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$$

が従う。

命題３．　次は同値である。

(1) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$$

(2) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\left|\int_X fgd\mu\right|\le\|f\|_p\|g\|_q$$

(3) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\mathrm{Re}\int_X fgd\mu\le\|f\|_p\|g\|_q$$

(4) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\mathrm{Im}\int_X fgd\mu\le\|f\|_p\|g\|_q$$

(5) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\|fg\|_1\le\frac{1}{p}\|f\|_p^p+\frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

(6) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\left|\int_X fgd\mu\right|\le\frac{1}{p}\|f\|_p^p+\frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

(7) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\mathrm{Re}\int_X fgd\mu\le\frac{1}{p}\|f\|_p^p\frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

(8) $1/p+1/q=1$ なる任意の $p,q\in(1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\mathrm{Im}\int_X fgd\mu\le\frac{1}{p}\|f\|_p^p+\frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

(9) $1/p+1/q=1/r$ なる任意の $p,q\in(1,\infty),\ r\in[1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\|fg\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q$$

(10) $1/p+1/q=1/r$ なる任意の $p,q\in(1,\infty),\ r\in[1,\infty)$ 及び任意の $f\in L^p,\ g\in L^q$ に対し

$$\|fg\|_r\le\frac{r}{p}\|f\|_p^{p/r}+\frac{r}{q}\|g\|_q^{q/r}$$

(証明)　$(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3),\ (2) \Rightarrow (4),\ (1) \Rightarrow (5) \Leftrightarrow (6) \Rightarrow (7),\ (6) \Rightarrow (8),\ (9) \Rightarrow (1),\ (9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (5)$ は容易である。
$(3) \Rightarrow (4)$ は f を if に、$(4) \Rightarrow (3)$ は f を $-if$ に置換えれば良い。
$(7) \Rightarrow (8)$ も同様。$(3) \Rightarrow (2)$ 及び $(7) \Rightarrow (6)$ は $\displaystyle\int_X fgd\mu = \left|\int_X fgd\mu\right| e^{i\theta}$ なる $\theta \in \mathbb{R}$ を取り $\displaystyle\left|\int_X fgd\mu\right| = \mathrm{Re}\ \int_X (e^{-i\theta} f)gd\mu$ と考えれば良い。

以上で $(9) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4),\ (1) \Rightarrow (5) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (7) \Leftrightarrow (8),\ (9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (5)$ が示されたので $(1) \Rightarrow (9),\ (5) \Rightarrow (1)$ を示す事が残っている。$(1) \Rightarrow (9)$ は (1) の f, g の代わりに $|f|^r,\ |g|^r$ を考えれば良い。$(5) \Rightarrow (1)$ は f, g の代わりに $t^{\frac{1}{pq}} f,\ t^{-\frac{1}{pq}} g (t > 0)$ を考え $t > 0$ で最小化 (命題 2(3)) すれば良い。

参考文献： 小松彦三郎、Fourier 解析、岩波書店、1978