ユークリッド空間に於けるラプラシアンの基本解

平成 25 年 2 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於けるラプラシアンの基本解の求め方に就いて纏めて置こう。ここにラプラシアンは

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2,\quad \partial_j=\partial/\partial x_j,\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

で定義されるものとする。

1. 動径対称性に基づく方法

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から原点を除いた集合 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ を $x=r\omega, r=|x|=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$, $\omega=x/|x|$ により $(0,\infty)\times S^{n-1}$ と同一視して考える。このとき r 変数を動径変数 radial variable と謂い、動径方向の微分作用素 ∂_r は $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上の滑らかな函数 u に対する作用

$$\partial_r u=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}\partial_j u$$

により定義される。動径方向の微分作用素 ∂_r と球面方向の微分作用素 $L_{jk}=x_k\partial_j-x_j\partial_k$ により $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於けるラプラシアンは

$$\Delta=\partial_r^2+\frac{n-1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}},\ \Delta_{S^{n-1}}=\sum_{1\le j<k\le n}L_{jk}^2$$

と表される。滑らかな函数 $u:(0,\infty)\ni r\mapsto u(r)\in\mathbb{R}$ は、対応する函数
$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\ni x\mapsto u(|x|)\in\mathbb{R}$ が方程式 $\Delta u=0$ の $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於ける解ならば微分方程式

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}=0,\quad r\in(0,\infty) \tag{1.1}$$

を満たす。これより

$$\frac{d}{dr}\left(\exp\left(\int_1^r\frac{n-1}{s}ds\right)\frac{du}{dr}\right)=0$$

更には

$$\exp\left(\int_1^r\frac{n-1}{s}ds\right)u'(r)=u'(1)$$

を得る。従って

$$u'(r)=u'(1)r^{1-n}$$

より

$$u(r)=u(1)+u'(1)\int_1^r s^{1-n}ds=\begin{cases} u(1)+\frac{u'(1)}{2-n}(r^{2-n}-1),\ n\neq 2 \\ u(1)+u'(1)\log r,\ n=2 \end{cases}$$

を得る。そこで

$$u(r)=\begin{cases} \frac{u'(1)}{2-n}r^{2-n}, & n\neq 2 \\ u'(1)\log r,\ n=2 \end{cases}$$

と置くと u は (1.1) 及び

$$u(1)=\begin{cases} \frac{u'(1)}{2-n}, & n\neq 2 \\ 0, & n=2 \end{cases}$$

を満たしている事が分かる。

以上より、上で定義された u を用いれば、函数 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\ni x\mapsto u(|x|)\in\mathbb{R}$ はラプラス方程式 $\Delta u=0$ を $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ で満たしている事が分かるが $u(|x|)$ は原点で定義されない。原点での特異性を緩増加超函数の枠組で捉える為、パラメタ $\varepsilon>0$ を導入し原点で正則化した

$$u_\varepsilon(x)=\begin{cases} c_n(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-n)/2},\ n\neq 2 \\ c_2\log(|x|^2+\varepsilon^2)^{1/2},\ n=2 \end{cases}$$

で与えられる函数 $u_\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ の $\varepsilon\to 0$ に於ける極限を考えよう。

$n\geq 3$ の場合

$$\begin{aligned}
&\partial_j u_\varepsilon(x)=(2-n)c_n x_j(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2},\\
&\partial_j^2 u_\varepsilon(x)=(2-n)c_n(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2}-n(2-n)c_n x_j^2(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2-1}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\Delta u_\varepsilon(x)=&\ n(2-n)c_n(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2}-n(2-n)c_n|x|^2(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2-1}\\
=&\ n(2-n)c_n\varepsilon^2(|x|^2+\varepsilon^2)^{-n/2-1}\\
=&\ n(2-n)c_n\varepsilon^{-n}(|\varepsilon^{-1}x|^2)+1)^{-n/2-1}
\end{aligned}$$

となるので

$$\rho(x)=n(n-2)c_n(|x|^2+1)^{-n/2-1}$$

と置けば

$$-\Delta u_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\rho(\varepsilon^{-1}x)$$

を得る。そこで $\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)dx=1$ となる様に定数 c_n を定めれば、原点を台とするディラック測度 δ に対し $\mathscr{S}'$ に於いて

$$-\Delta u_\varepsilon\to\delta\ (\varepsilon\to 0)$$

となる。故に $\mathbb{R}^n$ 上の局所可積分函数として

$$u(x)=c_n|x|^{2-n}$$

で与えられる $u \in \mathscr{S}'$ を考えれば $\mathscr{S}'$ に於いて $u_\varepsilon \to u$ $(\varepsilon \to 0)$ 且つ

$$-\Delta u = \delta$$

が従う。定数 c_n を求める為に極座標を用いて次の定積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|x|^2+1)^{-n/2-1} dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty (r^2+1)^{-n/2-1} r^{n-1} dr$$

を求めよう。ここに $\sigma(S^{n-1})$ は単位球 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ の表面積 $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ であるとする。さて $s = r^2/(r^2+1)$ とすれば $ds = \left(\frac{2r}{r^2+1} - \frac{2r^3}{(r^2+1)^2}\right) dr = \frac{2r}{(r^2+1)^2} dr$ となるので

$$\int_0^\infty (r^2+1)^{-n/2-1} r^{n-1} dr = \int_0^\infty (r^2/(r^2+1))^{n/2-1} \cdot \frac{r}{(r^2+1)^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 s^{n/2-1} ds = \frac{1}{n}$$

より

$$c_n = \frac{1}{(n-2)\sigma(S^{n-1})} = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}$$

を得る。即ち $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分函数

$$u(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} |x|^{2-n}$$

で与えられる $u \in \mathscr{S}'$ は $-\Delta$ の基本解

$$-\Delta u = \delta$$

となる。

$n = 2$ の場合

$$\begin{aligned} \partial_j u_\varepsilon(x) &= c_2 x_j (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-1}, \\ \partial_j^2 u_\varepsilon(x) &= c_2 (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-1} - 2c_2 x_j^2 (|x|^2 + \varepsilon^2)^{-2} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon(x) &= 2c_2(|x|^2+\varepsilon)^{-1} - 2c_2|x|^2(|x|^2+\varepsilon^2)^{-2} \\ &= 2c_2\varepsilon^2(|x|^2+\varepsilon^2)^{-2} \\ &= 2c_2\varepsilon^{-2}(|\varepsilon^{-1}x|^2+1)^{-2} \end{aligned}$$

となるので

$$\rho(x) = -2c_2(|x|^2+1)^{-2}$$

と置けば

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\rho(\varepsilon^{-1}x)$$

を得る。そこで $\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) dx = 1$ となる様に定数 c_2 を定めれば $\mathscr{S}'$ に於いて

$$-\Delta u_\varepsilon \to \delta \ (\varepsilon \to 0)$$

となる。故に $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分函数として

$$u(x) = c_2 \log |x|$$

で与えられる $u \in \mathscr{S}'$ を考えれば $\mathscr{S}'$ に於いて $u_\varepsilon \to u$ $(\varepsilon \to 0)$ 且つ

$$-\Delta u = \delta$$

が従う。定数 c_2 を求める為に極座標を用いて次の定積分を計算しよう：

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|x|^2+1)^{-1} dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2+1)^2} dr d\theta = \left[-\pi \frac{1}{r^2+1} \right]_0^\infty = \pi$$

これより $c_2 = -\frac{1}{2\pi}$ を得る。即ち $\mathbb{R}^2$ 上の局所可積分函数

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x| = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}$$

で与えられる $u \in \mathscr{S}'$ は $-\Delta$ の基本解

$$-\Delta u = \delta$$

となる。

$n = 1$ の場合

$$u'_\varepsilon(x) = c_1 x (x^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$$

より

$$\begin{aligned} u''_\varepsilon(x) = &\ c_1 (x^2+\varepsilon^2)^{-1/2} - c_1 x^2 (x^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \\ = &\ c_1 \varepsilon^2 (x^2+\varepsilon^2)^{-3/2} = c_1 \varepsilon^{-1} ((\varepsilon^{-1} x)^2 + 1)^{-3/2} \end{aligned}$$

となるので

$$\rho(x) = -c_1 (x^2+1)^{-3/2}$$

と置けば

$$-u''(x) = \varepsilon^{-1} \rho(\varepsilon^{-1} x)$$

を得る。そこで $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$ となる様に定数 c_1 を定めれば $\mathscr{S}'$ に於いて

$$-u''_\varepsilon \to \delta \ (\varepsilon \to 0)$$

となる。故に $\mathbb{R}$ 上の局所可積分函数として

$$u(x) = c_1 |x|$$

で与えられる $u \in \mathscr{S}'$ を考えれば $\mathscr{S}'$ に於いて $u_\varepsilon \to u$ $(\varepsilon \to 0)$ 且つ

$$-u'' = \delta$$

が従う。定数 c_1 を求める為に、次の定積分を計算しよう：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+1)^{-3/2}dx = 2\int_0^{\infty}(x^2+1)^{-3/2}dx$$

$y = x^2/(x^2+1)$ とすれば $dy = (2x/(x^2+1)^2)dx$ となるので右辺は

$$\int_0^1 y^{-1/2}dy = 2$$

に等しい。これより $c_1 = -\frac{1}{2}$ を得る。即ち $\mathbb{R}$ 上の局所可積分函数

$$u(x) = -\frac{1}{2}|x|$$

で与えられる $u \in \mathscr{S}'$ は $-\Delta$ の基本解

$$-\Delta u = \delta$$

となる。

2. 函数のソボレフ積分表示に基づく方法

ユークリッド空間上の滑らかな急減少函数 $\phi \in \mathscr{S}$ を取る。先ず $n \geq 2$ の場合を考える。単位球面上の任意の点 $\omega \in S^{n-1}$ に対し等式

$$\phi(0) = -\int_0^{\infty}\frac{d}{dr}(\phi(r\omega))dr = -\sum_{j=1}^{n}\omega_j\int_0^{\infty}(\partial_j\phi)(r\omega)dr$$

が成立つ。単位球面上で定義された滑らかな函数 $k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ は $\int_{S^{n-1}} k(\omega)d\sigma(\omega) = 1$ を満たすものとする。ここに σ は S^{n-1} 上のボレル測度とする。このとき上の式の両辺に $k(\omega)$ を掛け S^{n-1} 上積分すると

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= -\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}}k(\omega)\omega_j\int_0^{\infty}(\partial_j\phi)(r\omega)dr\ d\sigma(\omega)\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty}\int_{S^{n-1}}(r\omega_j)r^{-n}k(\omega)(\partial_j\phi)(r\omega)d\sigma(\omega)r^{n-1}dr\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j}{|x|^n}\ k\left(\frac{x}{|x|}\right)\partial_j\phi(x)dx
\end{aligned}$$

が成立つ。そこで各 j に対し $K_j : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ を $K_j(x) = (x_j/|x|^n)K(x/|x|)$ で定めると上の等式は任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対して成立つものであるから

$$\sum_{j=1}^{n}\partial_j K_j = \delta$$

が従う。こに $K_j \in \mathscr{S}'$ と見做し ∂_j は超函数の意味の微分とする。

さて K_j は $(1-n)$ 次斉次である。$K_j = \partial_j L_j$ を満たす L_j が存在するとすれば L_j は $(2-n)$ 次斉次でなければならない。一方 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に於いて等式 $\partial_j |x|^{2-n} = (2-n)|x|^{-n}x_j$ が成立つ。両辺に現れる局所可積分函数 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x|^{2-n} \in \mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x|^{-n}x_j \in \mathbb{R}$ は緩増加超函数と見做す事が出来る。更に任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_j |x|^{2-n}, \phi \rangle = -\langle |x|^{2-n}, \partial_j \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \partial_j \phi(x) dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{2-n} \partial_j \phi(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} (-\partial_j (|x|^{2-n}\phi) + (2-n)|x|^{-n} x_j \phi(x)) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\varepsilon \int_{S^{n-1}} \omega_j \phi(\varepsilon\omega) d\sigma(\omega) + (2-n) \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{-n} x_j \phi(x) dx) \\
&= (2-n) \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n} x_j \phi(x) dx
\end{aligned}$$

となるから $\mathscr{S}'$ に於ける等式として

$$\partial_j |x|^{2-n} = (2-n)|x|^{-n} x_j$$

が成立つ。そこで k として定数函数 $k(\omega) = 1/\sigma(S^{n-1}) = \Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}$ を取れば $n \geq 3$ として

$$-\Delta \left(\frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} |x|^{2-n} \right) = \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} |x|^{-n} x_j \right) = \sum_{j=1}^n \partial_j K_j = \delta$$

が従う。$n \geq 3$ の場合これは前節の結果と一致するものである。一方 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に於いて等式 $\partial_j(\log|x|) = |x|^{-2}x_j$ が成立つ。両辺に現れる函数では $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \log|x| \in \mathbb{R}$ は局所可積分で $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x|^{-2}x_j \in \mathbb{R}$ は $n \geq 2$ ならば局所可積分で緩増加超函数と見做す事が出来る。更に $n \geq 2$ の場合任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_j(\log|x|), \phi \rangle = -\langle \log|x|, \partial_j \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \log|x| \partial_j \phi(x) dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \log|x| \partial_j \phi(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} (-\partial_j (\log|x|\phi) + |x|^{-2} x_j \phi(x)) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\varepsilon^{n-1} \log\varepsilon \int_{S^{n-1}} \omega_j \phi(\varepsilon\omega) d\sigma(\omega) + \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{-2} x_j \phi(x) dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2} x_j \phi(x) dx
\end{aligned}$$

となるから $\mathscr{S}'$ に於ける等式として

$$\partial_j(\log|x|) = |x|^{-2} x_j$$

が成立つ。そこで $n = 2$ の場合 k として定数函数 $k(\omega) = 1/2\pi$ を取れば

$$-\Delta(\frac{1}{2\pi} \log|x|) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(\frac{1}{2\pi} |x|^{-2} x_j \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j K_j = \delta$$

が従う。$n=2$ の場合これは前節の結果と一致するものである。最後に $n \geq 1$ に対し等式 $\partial_j|x| = |x|^{-1}x_j$ を考える。この等式は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の各点で成立つ。更に任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\begin{aligned}\langle \partial_j|x|, \phi\rangle &= -\langle |x|, \partial_j\phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} |x|\partial_j\phi(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon} |x|\partial_j\phi(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon} (-\partial_j(|x|\phi) + |x|^{-1}x_j\phi(x))dx \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\varepsilon^n \int_{S^{n-1}} \omega_j\phi(\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) + \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{-1}x_j\phi(x)dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-1}x_j\phi(x)dx\end{aligned}$$

（但し $n=1$ の場合は最後の等式の左辺の第一項を $S^0 = \{\pm 1\}$,

$$\varepsilon\int_{S^0} \omega\phi(r\omega)d\sigma(\omega) = \varepsilon\phi(\varepsilon) - \varepsilon\phi(-\varepsilon) = [|x|\phi(x)]_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

と解釈する）を得るので $\mathscr{S}'$ に於いて

$$\partial_j|x| = |x|^{-1}x_j$$

が成立つ。$n=1$ の場合

$$\phi(0) = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = \int_{-\infty}^0 \phi'(x)dx$$

より

$$\phi(0) = -\frac{1}{2}(\int_0^\infty \phi'(x)dx - \int_{-\infty}^0 \phi'(x)dx) = -\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{|x|}\phi'(x)dx$$

が従うので $\mathscr{S}'$ に於いて

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\right)' = \delta$$

が成立つ。故に既に得られた $|x|' = |x|^{-1}x$ と合せて

$$-\Delta\left(-\frac{1}{2}|x|\right) = \delta$$

が従う。$n=1$ の場合これは前節の結果と一致するものである。

3. 斉次性に基づく方法

前節に於いて重要な役割を果たした斉次性の概念を一般的に論じ、ラプラシアンの基本解への応用を考えよう。

定義　$\mathbb{R}^n$ の空でない開集合 Ω は

$$x \in \Omega \Leftrightarrow \forall\lambda > 0,\quad \lambda x \in \Omega$$

なる条件を満たすとき**開錐** open cone と謂う。

定義　開錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の試験函数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 及び $\lambda > 0$ に対し $D_\lambda \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ を $(D_\lambda \phi)(x) = \phi(\lambda x), x \in \Omega,$ で定義する。$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ に対し $D_\lambda f$ を

$$\langle D_\lambda f, \phi \rangle = \lambda^{-n} \langle f, D_{1/\lambda} \phi \rangle, \ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

で定義する。

註　$D_\lambda f$ の定義は次の意味で自然である。即ち任意の $\psi, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$\int_\Omega \psi(\lambda x)\phi(x)dx = \lambda^{-n} \int_\Omega \psi(x)\phi(\lambda^{-1}x)dx$$

定義　開錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の超函数 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ は $\theta \in \mathbb{R}$ に対し θ **次斉次**であるとは任意の $\lambda > 0$ に対し $D_\lambda f = \lambda^\theta f$ が成立つ事と定義する。

定義　$\Omega = \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする。$A \in GL(n)$ に対し $A^* : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ が $(A^*\phi)(x) = \phi(Ax), x \in \Omega$ で定まる。$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ に対し $A^* f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ を

$$\langle A^* f, \phi \rangle = |\det A|^{-1} \langle f, (A^{-1})^* \phi \rangle, \ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

で定義する。

註　$A^* f$ の定義は次の意味で自然である。即ち任意の $\psi, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$\int_\Omega \psi(Ax)\phi(x)dx = |\det\ A|^{-1} \int_\Omega \psi(x)\phi(A^{-1}x)dx$$

定義　$\Omega = \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする。$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ が**動径的** radial であるとは任意の $T \in O(n)$ に対し $T^* f = f$ である事と定義する。

命題 1　(1) 開錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の θ 次斉次超函数 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ に対し $\partial^\alpha f$ は $(\theta - |\alpha|)$ 次斉次超函数となる。

(2) デルタ測度 $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は $-n$ 次斉次である。

(3) $n \geq 3$ に対し $\Delta(|x|^{2-n}) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は $-n$ 次斉次である。

(4) $n = 2$ に対し $\Delta(\log|x|) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ は -2 次斉次である。

(5) $n = 1$ に対し $\Delta|x| \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ は -1 次斉次である。

（証明）

(1) 任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

$$\begin{aligned}\langle D_\lambda \partial^\alpha f, \phi\rangle &= \lambda^{-n}\langle \partial^\alpha f, D_{1/\lambda}\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lambda^{-n}\langle f, \partial^\alpha D_{1/\lambda}\phi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\lambda^{-n-|\alpha|}\langle f, D_{1/\lambda}\partial^\alpha\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\lambda^{-|\alpha|}\langle D_\lambda f, \partial^\alpha\phi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\lambda^{-|\alpha|}\lambda^{\theta}\langle f, \partial^\alpha\phi\rangle = \lambda^{\theta-|\alpha|}\langle \partial^\alpha f, \phi\rangle\end{aligned}$$

となるから $D_\lambda \partial^\alpha f = \lambda^{\theta-|\alpha|}\partial^\alpha f$ を得る。

(2) 任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$\langle D_\lambda \delta, \phi\rangle = \lambda^{-n}\langle \delta, D_{1/\lambda}\phi\rangle = \lambda^{-n}(D_{1/\lambda}\phi)(0) = \lambda^{-n}\phi(0) = \lambda^{-n}\langle \delta, \phi\rangle$$

となるから $D_\lambda \delta = \lambda^{-n}\delta$ を得る。

(3) $|x|^{2-n} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は $(2-n)$ 次斉次なので (1) より従う。

(4) $\partial_j(\log|x|) = |x|^{-2}x_j \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ は -1 次斉次なので (1) より従う。

(5) $|x| \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ は 1 次斉次なので (1) より従う。

命題２　開錐 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の超函数 $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 及び $\theta \in \mathbb{R}$ に対し次は同値である。

(1) f は θ 次斉次である。

(2) f は等式 $\theta f = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j\partial_j f$ を満たす。

（証明）　$\lambda > 0,\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し $\rho(\lambda) = \langle f, D_\lambda\phi\rangle$ と置く。等式

$$\frac{d}{d\lambda}(D_\lambda\phi)(x) = x\cdot(\nabla\phi)(\lambda x) = \lambda^{-1}\sum_{j=1}^n x_j\partial_j(D_\lambda\phi)(x)$$

に注意する。

(1)⇒(2):　仮定より $\langle f, D_\lambda\phi\rangle = \lambda^{-n}\langle D_{1/\lambda}f, \phi\rangle = \lambda^{-n-\theta}\langle f, \phi\rangle$ を得るので両辺を λ で微分して $\lambda = 1$ と置く事により $\rho'(1) = -(n+\theta)\langle f, \phi\rangle$ を得る。一方

$$\begin{aligned}\rho'(1) &= \langle f, \sum_{j=1}^n x_j\partial_j\phi\rangle = \langle f, \sum_{j=1}^n \partial_j(x_j\phi)\rangle - n\langle f, \phi\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^n\langle \partial_j f, x_j\phi\rangle - n\langle f, \phi\rangle = -\sum_{j=1}^n\langle x_j\partial_j f, \phi\rangle - n\langle f, \phi\rangle\end{aligned}$$

となるので両者を比較して (2) を得る。

(2)⇒(1): ρ を λ で微分して (2) を用いると

$$\begin{aligned}\rho'(\lambda) =&\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{n}\langle f, x_j\partial_j D_\lambda\phi\rangle = -\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{n}\langle x_j\partial_j f,\phi\rangle - n\lambda^{-1}\langle f,\phi\rangle\\ =& -\lambda^{-1}(\theta+n)\rho(\lambda)\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda^{\theta+n}\rho(\lambda)) = \lambda^{n+\theta}(\rho'(\lambda)+\lambda^{-1}(\theta+n)\rho(\lambda)) = 0$$

が従う。これより任意の $\lambda>0$ に対し $\lambda^{\theta+n}\rho(\lambda)=\rho(1)$ 更には $\lambda^{-(\theta+n)}\rho(1/\lambda)=\rho(1)$ が成立つ。従って $\langle D_\lambda f,\phi\rangle = \lambda^{-n}\rho(1/\lambda) = \lambda^{\theta}\langle f,\phi\rangle$ が成立つ。

命題３　$f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ 及び $\theta\in\mathbb{R}$ に対し次は同値である。

(1)　f は θ 次斉次である。

(2)　f は等式 $\theta f = xf'$ を満たす。

(3)　$a,b\in\mathbb{C}$ が存在し任意の $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し等式 $f(x)=ax^{\theta}H(x)+b(-x)^{\theta}H(-x)$ が成立つ。ここに H はヘビサイド函数とする。

証明には次の補題を用いる：

補題　開区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の超函数 $f\in\mathscr{D}'(I)$ に対し次は同値である。

(1)　$f'=0$

(2)　$c\in\mathbb{C}$ が存在して任意の $\phi\in C_0^\infty(I)$ に対し $\langle f,\phi\rangle = c\int_I\phi$

（証明）　(2)⇒(1)：　$\langle f',\phi\rangle = -\langle f,\phi'\rangle = -c\int_I\phi' = 0$

(1)⇒(2)：　$\int_{-\infty}^{\infty}\rho = 1$ なる $\rho\in C_0^\infty(I)$ を取る。与えられた $\phi\in C_0^\infty(I)$ に対し $c_0=\int_{-\infty}^{\infty}\phi$ と置く。I 上の函数 ψ を $\psi(x)=\int_{-\infty}^{x}(\phi(y)-c_0\rho(y))dy$ で定める。被積分函数 $\phi-c_0\rho$ の台 $K\equiv\operatorname{supp}(\phi-c_0\rho)$ は I のコンパクト集合であるから $a=\inf K=\min K$ 及び $b=\sup K=\max K$ は I の元として定まる。故に $K\subset[a,b]\subset I$ なる包含関係が成立つ。一方 $x\in(-\infty,a)\cap I$ なら $y\le x$ なる任意の $y\in I$ に対し $\phi(y)-c_0\rho(y)=0$ となり $\psi(x)=0$ が従い $x\in(b,\infty)\cap I$ なら $\psi(x)=\int_I\phi - c_0\int_I\rho = \int_I\phi - c_0 = 0$ となる。従って

supp $\psi \subset [a,b]$ となり ψ は滑らかなので $\psi \in C_0^\infty(I)$ 及び $\psi' = \phi - c_0\rho$ が成立つ。さて、仮定 (1) より等式

$$\langle f, \phi\rangle = \langle f, \psi' + c_0\rho\rangle = -\langle f', \psi\rangle + c_0\langle f, \rho\rangle = c_0\langle f, \rho\rangle = \langle f, \rho\rangle \int_I \phi$$

が成立つので (2) は $c = \langle f, \rho\rangle$ として成立つ。

(命題３の証明)　命題 2 より (1) と (2) の同値性が従うので (2) と (3) の同値性を示せば充分である。

(2)⇒(3)：　$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ に対し等式

$$\begin{aligned}\langle (x^{-\theta} f)', \phi\rangle &= -\langle x^{-\theta} f, \phi'\rangle = -\langle f, x^{-\theta}\phi'\rangle = -\langle f, (x^{-\theta}\phi)' + \theta x^{-\theta-1}\phi\rangle \\ &= \langle f', x^{-\theta}\phi\rangle - \theta\langle f, x^{-\theta-1}\phi\rangle = \langle xf' - \theta f, x^{-\theta-1}\phi\rangle = 0\end{aligned}$$

が成立つ。補題を $I = (0,\infty)$ 及び $I = (-\infty, 0)$ に夫々適用すると $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\langle x^{-\theta} f, \phi\rangle = \alpha \int_0^\infty \phi, \quad \forall\phi \in C_0^\infty((0,\infty)),$$

$$\langle x^{-\theta} f, \phi\rangle = \beta \int_{-\infty}^0 \phi, \quad \forall\phi \in C_0^\infty((-\infty,0))$$

が成立つ。任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ に対し $H\phi \in C_0^\infty((0,\infty)), H^\vee\phi \in C_0^\infty((-\infty,0))$ と見做す事が出来る。ここに $H^\vee(x) = H(-x)$ とする。従って

$$\begin{aligned}\langle f, \phi\rangle &= \langle f, H\phi + H^\vee\phi\rangle = \langle f, H\phi\rangle + \langle f, H^\vee\phi\rangle \\ &= \langle x^{-\theta} f, x^\theta H\phi\rangle + \langle x^{-\theta} f, x^\theta H^\vee\rangle \\ &= \alpha \int_0^\infty x^\theta H(x)\phi(x)dx + \beta \int_{-\infty}^0 x^\theta H(-x)\phi(x)dx \\ &= \langle \alpha x^\theta H + (-1)^\theta \beta (-x)^\theta H^\vee, \phi\rangle\end{aligned}$$

が成立ち $a = \alpha, b = (-1)^\theta\beta$ として (3) が成立つ。

(3)⇒(2)：　任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ に対し $H\phi' = (H\phi)',\ H^\vee\phi' = (H^\vee\phi)'$ が成立つから

$$\begin{aligned}\langle xf', \phi\rangle &= -\langle f, (x\phi)'\rangle = -\langle f, \phi + x\phi'\rangle \\ &= -\langle f, \phi\rangle - \langle ax^{\theta+1}H, \phi'\rangle - \langle b(-1)^\theta x^{\theta+1}H^\vee, \phi'\rangle \\ &= -\langle f, \phi\rangle - a\langle x^{\theta+1}, (H\phi)'\rangle - b(-1)^\theta\langle x^{\theta+1}, (H^\vee\phi)'\rangle \\ &= -\langle f, \phi\rangle + (\theta+1)a\langle x^\theta, H\phi\rangle + (\theta+1)b(-1)^\theta\langle x^\theta, H^\vee\phi\rangle \\ &= -\langle f, \phi\rangle + (\theta+1)\langle f, \phi\rangle \\ &= \langle \theta f, \phi\rangle\end{aligned}$$

が従う。

命題４　$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上の動径的超函数 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 及び $\theta\in\mathbb{R}$ に対し次は同値である。

(1)　f は θ 次斉次である。

(2)　$c\in\mathbb{C}$ が存在して任意の $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ に対し $\langle f,\phi\rangle=c\int_{\mathbb{R}^n}|x|^\theta\phi(x)dx$

（証明）　(1)⇒(2)：　$n=1$ の場合、命題3より f は $f(x)=ax^\theta H(x)+b(-x)^\theta H(-x)$ と表されるが、条件 $f(x)=f(-x)$ より $a=b$ となる。このとき $f(x)=a(x^\theta H(x)+(-x)^\theta H(-x))=a|x|^\theta$ となり (2) が成立つ。よって以下では $n\geq 2$ の場合を考える。
　θ 次斉次動径的超函数 $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ を与える。$u\in C_0^\infty((0,\infty))$ に対し
$(Ru)(x)=u(|x|),\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ と置くと $Ru\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ が定まる。
$R:C_0^\infty((0,\infty))\ni u\mapsto Ru\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ は連続線型写像となるので $g\equiv f\circ R$ は $\mathscr{D}'((0,\infty))$ の元となる。また $(D_\lambda Ru)(x)=(Ru)(\lambda x)=u(|\lambda x|)=u(\lambda|x|)=(D_\lambda u)(|x|)$
$=(RD_\lambda u)(x)$ となるから f の斉次性より

$$\langle g,D_\lambda u\rangle=\langle f\circ R,D_\lambda u\rangle=\langle f,D_\lambda Ru\rangle=\lambda^{-n-\theta}\langle f,Ru\rangle=\lambda^{-n-\theta}\langle g,u\rangle$$

が従う。即ち g は $(0,\infty)$ 上の超函数として $(n+\theta-1)$ 次斉次である。命題3より $c_0\in\mathbb{C}$ が存在し任意の $t>0$ に対し $g(t)=c_0t^{n+\theta-1}$ と表される事が分かる。さて $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ が動径的であるとすると $u\in C_0^\infty((0,\infty))$ により $\phi(x)=u(|x|)$ と表される。このとき等式

$$\langle f,\phi\rangle=\langle g,u\rangle=c_0\int_0^\infty t^{n+\theta-1}u(t)dt=\frac{c_0}{\sigma(S^{n-1})}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^\theta\phi(x)dx$$

が成立つ。そこで $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ に対し

$$\langle h,\psi\rangle=\langle f,\psi\rangle-\frac{c_0}{\sigma(S^{n-1})}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^\theta\phi(x)dx$$

と置く。h は $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上の θ 次斉次動径的超函数となり動径的試験函数上消滅している。さて $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ に対し $T\in O(n)$ を取り $T^*\psi=\psi\circ T\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ を考える。コンパクト群 $O(n)$ 上の規格化されたハール測度を dT と表す事にして

$$\phi(x)=\int_{O(n)}\psi(Tx)dT,\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

とすれば $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ であり h は動径的であるから

$$\begin{aligned}\langle h,\phi\rangle&=\langle h,\int_{O(n)}T^*\psi dT\rangle=\int_{O(n)}\langle h,T^*\psi\rangle dT=\int_{O(n)}\langle h,\psi\rangle dT\\&=\langle h,\psi\rangle\int_{O(n)}dT=\langle h,\psi\rangle\end{aligned}$$

が成立つ。さて ϕ は動径的であるから $\langle h,\psi\rangle=0$ となり h は $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ 上で零である事が従う。よって (2) が成立つ。

(2)⇒(1)：　$\langle f,D_\lambda\phi\rangle$ に対応する積分の変数変換則より従う。

命題５　$f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ は動径的ならば次は同値である。

(1)　f は $-n$ 次斉次である。

(2)　f は δ の定数倍である。即ち $c \in \mathbb{C}$ が存在して $f = c\delta$

（証明） (2)⇒(1) は命題 1 に拠る。(1)⇒(2) を示そう。命題 4 に拠り $c_0 \in \mathbb{C}$ が存在し任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対し

$$\langle f, \phi \rangle = c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n} \phi(x) dx$$

が成立つ。$\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $0 \le \zeta \le 1$, $\mathrm{supp}\zeta \subset [1/2, 4]$ を満たし [1,2] 上 $\zeta = 1$ となる函数とし $\phi_j(x) = \zeta(|x|/j)$ と置くと $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ であり、評価

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n} \phi_j(x) dx &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty \zeta(\frac{r}{j}) \frac{dr}{r} = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty \zeta(r) \frac{dr}{r} \\ &\ge \sigma(S^{n-1}) \log 2\end{aligned}$$

が成立つ。一方 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に於いて $\phi_j \to 0$ となるので $\langle f, \phi_j \rangle \to 0$ が従う。故に $c_0 = 0$ となる。これより $\mathrm{supp} f \subset \{0\}$ が従う。一点に台を持つ超函数は δ の微分の一次結合で表されるが $-n$ 次であるものは δ の定数倍に限られる。故に (2) が導かれる。

命題 1 と 5 より、斉次性に基づく考察のみから $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ に於いて

$$\begin{aligned}\Delta(|x|^{2-n}) = &\ c_n \delta, \quad n \ge 3 \\ \Delta(\log|x|) = &\ c_2 \delta, \quad n = 2 \\ \Delta|x| = &\ c_1 \delta, \quad n = 1\end{aligned}$$

を満たす $c_n \in \mathbb{R}$ の存在が導かれる。そこで $c_n \in \mathbb{R}$ を決定する事を考えよう。

$n \ge 3$ **の場合**

$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し $\nabla(|x|^{2-n}) \cdot \nabla\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であるから、等式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(|x|^{2-n}) \cdot \phi(x) dx = &\ -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(|x|^{2-n}) \cdot \nabla\phi(x) dx \\ = &\ -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \nabla(|x|^{2-n}) \cdot \nabla\phi(x) dx\end{aligned}$$

が成立つ。$\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ に於いて成立つ等式

$$\begin{aligned}\nabla(|x|^{2-n}) \cdot \nabla\phi &= \nabla \cdot (\nabla(|x|^{2-n})\phi) - (\Delta|x|^{2-n})\phi \\ &= (2-n)\nabla \cdot (|x|^{-n} x \phi)\end{aligned}$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\nabla(|x|^{2-n})\cdot\nabla\phi(x)dx = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2-n)\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}\partial_j(|x|^{-n}x_j\phi)dx \\
=&\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2-n)\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^{n-1}\int_{S^{n-1}}\omega_j(|\varepsilon\omega|^{-n}\varepsilon\omega_j\phi(\varepsilon\omega))d\sigma(\omega) \\
=&\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2-n)\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}}\omega_j^2\phi(\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) = -(n-2)\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{S^{n-1}}\phi(\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) \\
=&\ -(n-2)\int_{S^{n-1}}\phi(0)d\sigma(\omega) = -(n-2)\sigma(S^{n-1})\phi(0) = -(n-2)\sigma(S^{n-1})\langle\delta,\phi\rangle
\end{aligned}
$$

即ち

$$-\Delta(|x|^{2-n}) = (n-2)\sigma(S^{n-1})\delta$$

を得る。この等式は前節迄に得られたものに一致する。

$n = 2$ の場合

$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対し $\nabla(\log|x|)\cdot\nabla\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であるから等式

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}\Delta(\log|x|)\cdot\phi(x)dx =&\ -\int_{\mathbb{R}^2}\nabla(\log|x|)\cdot\nabla\phi(x)dx \\
=&\ -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\nabla(\log|x|)\cdot\nabla\phi(x)dx
\end{aligned}
$$

が成立つ。$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於いて成立つ等式

$$
\begin{aligned}
\nabla(\log|x|)\cdot\nabla\phi &= \nabla\cdot((\nabla\log|x|)\phi) - (\Delta\log|x|)\phi \\
&= \nabla\cdot(|x|^{-2}x\phi)
\end{aligned}
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
&-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\nabla(\log|x|)\cdot\nabla\phi(x)dx = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{j=1}^{2}\int_{|x|>\varepsilon}\partial_j(|x|^{-2}x_j\phi)dx \\
=&\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon\int_{S^1}\omega_j|\varepsilon\omega|^{-2}\varepsilon\omega_j\phi(\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) \\
=&\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{j=1}^{2}\int_{S^1}\omega_j^2\phi(\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{S^1}\phi(\varepsilon\omega)d\sigma(\omega) = \int_{S^1}\phi(0)d\sigma(\omega) \\
=&\ 2\pi\phi(0) = 2\pi\langle\delta,\phi\rangle
\end{aligned}
$$

即ち

$$-\Delta(\log\frac{1}{|x|}) = 2\pi\delta$$

を得る。この等式は前節迄に得られたものに一致する。

$n=1$ の場合

$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し $|x|' \cdot \phi' \in L^1(\mathbb{R})$ であるから等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta|x| \cdot \phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|' \cdot \phi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon} |x|' \cdot \phi'(x)dx$$
$$= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\int_{\varepsilon}^{\infty} \phi'(x)dx - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi'(x)dx)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(-\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) = 2\phi(0) = 2\langle\delta, \phi\rangle$$

が成立つ。即ち

$$-\Delta|x| = 2\delta$$

を得る。この等式は前節迄に得られたものに一致する。

４．フーリエ変換に基づく方法

この節ではラプラシアンの基本解をフーリエ変換に基づいて求めよう。設定を少し一般的にして $\theta > 0$ に対して函数 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto |x|^{-\theta} \in \mathbb{R}$ を考える。この函数は $0 < \theta < n$ ならば局所可積分である。$n/2 < \theta < n$ ならば $1 = \chi_{B(0;1)} + \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0;1)}$($\chi_{B(0;1)}$ は単位球体 $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \le 1\}$ の定義函数）を掛ける事に依って $L^1 + L^2$ に属す事が分かるので、そのフーリエ変換は $L^\infty + L^2$ に属す。

命題６　$f \in \mathscr{S}' \cap L^1_{\mathrm{loc}}$ に対し $\hat{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ であると仮定すると次は同値である。

(1)　f は動径的である。即ち任意の $T \in O(n)$ に対し $f = f \circ T$ である。

(2)　$\hat{f}$ は動径的である。即ち任意の $T \in O(n)$ に対し $\hat{f} = \hat{f} \circ T$ である。

（証明）　$\mathscr{S}'$ に於けるフーリエ反転公式により (1)⇒(2) のみ示せば充分である。
$f \in L^1$ の場合は

$$\hat{f}(T\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-iT\xi \cdot x)f(x)dx = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot {}^tTx)f(x)dx$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot y)f(Ty)|\det T|dy = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot y)f(y)dy$$
$$= \hat{f}(\xi)$$

より (1)⇒(2) が従う。$f \in \mathscr{S}' \cap L^1_{\mathrm{loc}}$ の場合は $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $0 \le \zeta \le 1,\ [0,1]$ 上 $\zeta = 1$ なるものとし $f_j = \zeta_j f, \zeta_j(x) = \zeta(|x|^2/j^2)$ と置くと $f_j \in L^1$ となる。このとき任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に

対し $\mathscr{S}$ に於いて $\zeta_j\phi \to \phi$ となるから $\langle f_j, \phi\rangle = \langle f, \zeta_j\phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$ 及び $\langle \hat{f}_j, \phi\rangle = \langle f_j, \hat{\phi}\rangle \to \langle f, \hat{\phi}\rangle = \langle \hat{f}, \phi\rangle$ が従う。故に

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}\circ T, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(T\xi)\phi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\phi({}^tT\xi)d\xi = \langle \hat{f}, \phi\circ{}^tT\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty}\langle \hat{f}_j, \phi\circ{}^tT\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle \hat{f}_j\circ T, \phi\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty}\langle \hat{f}_j, \phi\rangle = \langle \hat{f}, \phi\rangle\end{aligned}$$

となり $\mathscr{S}'\cap L^1_{\text{loc}}$ の元として $\hat{f}\circ T = \hat{f}$ が成立つ。

命題７　$f \in \mathscr{S}'\cap L^1_{\text{loc}}$ に対し $\hat{f}\in L^1_{\text{loc}}$ であるとすると任意の $\lambda > 0$ に対し等式

$$\mathscr{F}D_\lambda f = \lambda^{-n}D_{1/\lambda}\mathscr{F}f$$

が成立つ。

（証明）　$f\in L^1$ の場合は

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}D_\lambda f)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-ix\cdot\xi)f(\lambda x)dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-iy\cdot\lambda^{-1}\xi)f(y)\lambda^{-n}dy = \lambda^{-n}(D_{1/\lambda}\mathscr{F}f)(\xi)\end{aligned}$$

より命題が従う。$\hat{f}\in L^1_{\text{loc}}$ なる $f\in\mathscr{S}'\cap L^1_{\text{loc}}$ の場合は命題 6 の証明の $f_j\in L^1$ を用いると任意の $\phi\in\mathscr{S}$ に対し

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}D_\lambda f, \phi\rangle &= \langle D_\lambda f, \hat{\phi}\rangle = \lambda^{-n}\langle f, D_{1/\lambda}\hat{\phi}\rangle = \lim_{j\to\infty}\lambda^{-n}\langle f_j, D_{1/\lambda}\hat{\phi}\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty}\langle \mathscr{F}D_\lambda f_j, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\lambda^{-n}\langle D_{1/\lambda}\mathscr{F}f_j, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle \hat{f}_j, D_\lambda\phi\rangle \\ &= \langle \hat{f}, D_\lambda\phi\rangle = \lambda^{-n}\langle D_{1/\lambda}\hat{f}, \phi\rangle\end{aligned}$$

となり命題が従う。

命題８　$0<\theta<n$ なる θ に対し $|x|^{-\theta}\in\mathscr{S}'\cap L^1_{\text{loc}}$ のフーリエ変換は

$$(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(\xi) = \frac{2^{n/2-\theta}\Gamma((n-\theta)/2)}{\Gamma(\theta/2)}|\xi|^{\theta-n}$$

で与えられる。

（証明）　(1)　$n/2<\theta<n$ の場合

$\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta} \in L^\infty + L^2 \subset \mathscr{S}' \cap L^1_{\mathrm{loc}}$ であるから命題 6，7 より任意の $\lambda > 0$ 及び $T \in O(n)$ に対し $\mathscr{S}' \cap L^1_{\mathrm{loc}}$ に於ける等式

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(\lambda T\xi) &= (\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(\lambda\xi) = \lambda^{-n}(\mathscr{F}D_{1/\lambda}|\cdot|^{-\theta})(\xi) \\ &= \lambda^{\theta-n}(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(\xi)\end{aligned}$$

が成立つ。$\lambda = 1/|\xi|$ として

$$(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(\xi) = |\xi|^{\theta-n}(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(T(\xi/|\xi|)),\quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を得る。ここで

$$(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(T(\xi/|\xi|))$$

は $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に依らない定数 $c_{n,\theta}$ となる。そこで

$$(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(\xi) = c_{n,\theta}|\xi|^{\theta-n}$$

として $c_{n,\theta}$ を求めよう。$\phi(x) = \exp(-|x|^2/2)$ とすると $\mathscr{F}\phi = \phi \in \mathscr{S}$ であるから等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\theta}\exp(-\frac{|x|^2}{2})dx = \langle|\cdot|^{-\theta}, \mathscr{F}\phi\rangle = \langle\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta}, \phi\rangle = c_{n,\theta}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\theta-n}\exp(-\frac{|x|^2}{2})dx$$

が成立つ。極座標に移り両辺を $\sigma(S^{n-1})$ で割ると

$$\int_0^\infty r^{n-\theta-1}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr = c_{n,\theta}\int_0^\infty r^{\theta-1}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

を得る。変数変換 $s \mapsto r = (2s)^{1/2}$ により、この等式は

$$2^{(n-\theta)/2-1}\Gamma\left(\frac{n-\theta}{2}\right) = \int_0^\infty (2s)^{(n-\theta)/2-1}e^{-s}ds = c_{n,\theta}\int_0^\infty (2s)^{\theta/2-1}e^{-s}ds = c_{n,\theta}2^{\theta/2-1}\Gamma(\theta/2)$$

と表されるので

$$c_{n,\theta} = \frac{2^{n/2-\theta}\Gamma((n-\theta)/2)}{\Gamma(\theta/2)}$$

を得る。

(2) $\theta = n/2$ の場合

任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対し等式

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{F}|\cdot|^{-n/2}, \phi\rangle = \langle|\cdot|^{-n/2}, \hat{\phi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-n/2}\hat{\phi}(\xi)d\xi &= \lim_{\theta\downarrow n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{-\theta}\hat{\phi}(\xi)d\xi \\ &= \lim_{\theta\downarrow n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathscr{F}|\cdot|^{-\theta})(x)\phi(x)dx \\ &= \lim_{\theta\downarrow n/2}c_{n,\theta}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\theta-n}\phi(x)dx \\ &= c_{n,n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n/2}\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}|x|^{-n/2}\phi(x)dx\end{aligned}$$

が成立つので命題は$\theta = n/2$でも成立つ。

(3)　$0 < \theta < n/2$ の場合

$n/2 < n - \theta < n$ であるから (1) により

$$(\mathscr{F}|\cdot|^{\theta-n})(\xi) = \frac{2^{n/2-(n-\theta)}\Gamma(n-(n-\theta)/2)}{\Gamma((n-\theta)/2)}|\xi|^{-\theta}$$

が従う。これより

$$|\xi|^{-\theta} = \frac{2^{n/2-\theta}\Gamma((n-\theta)/2)}{\Gamma(\theta/2)}(\mathscr{F}|\cdot|^{\theta-n})(\xi)$$

を得るので両辺を再びフーリエ変換すれば命題が従う。

系１　$n \geq 3$ に対し

$$(2\pi)^{-n/2}\mathscr{F}^{-1}(|\cdot|^{-2})(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}|x|^{2-n}$$

（証明）　$\theta = 2$ とすれば良い。

註　系 1 の等式は

$$\begin{aligned}((-\Delta)^{-1}\phi)(x) &= (\mathscr{F}^{-1}|\cdot|^{-2}\hat{\phi})(x) = (2\pi)^{-n/2}((\mathscr{F}^{-1}|\cdot|^{-2}) * \phi)(x) \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{2-n}\phi(y)dy\end{aligned}$$

を意味するからフーリエ変換を用いてラプラシアンの基本解が得られた事になる。

系２　$n = 2$ に対し

$$|\xi|^2\mathscr{F}(\log\frac{1}{|\cdot|})(\xi) = 1$$

（証明）　$0 < \theta < 2$ に対し

$$(\mathscr{F}|\cdot|^{\theta-2})(\xi) = \frac{2^{\theta-1}\Gamma(\theta/2)}{\Gamma(1-\theta/2)}|\xi|^{-\theta} = \frac{(2-\theta)\Gamma(\theta/2)}{2^{2-\theta}\Gamma(2-\theta/2)}|\xi|^{-\theta}$$

となるから

$$|\xi|^2(\mathscr{F}(\frac{1}{2-\theta}(|\cdot|^{\theta-2}-1)))(\xi) = \frac{1}{2-\theta}|\xi|^2((\mathscr{F}|\cdot|^{\theta-2})(\xi) - 2\pi\delta)$$
$$= \frac{1}{2-\theta}|\xi|^2(\mathscr{F}|\cdot|^{\theta-2})(\xi) = \frac{\Gamma(\theta/2)}{2^{2-\theta}\Gamma(2-\theta/2)}|\xi|^{2-\theta}$$

となる。任意の $\phi \in \mathscr{S}$ に対し $\psi = \mathscr{F}(|\cdot|^2\phi)$ と置くと $\psi \in \mathscr{S}$ であり

$$
\begin{aligned}
&\langle|\xi|^2(\mathscr{F}(\frac{1}{2-\theta}(|\cdot|^{\theta-2}-1))),\phi\rangle = \langle\frac{1}{2-\theta}(|\cdot|^{\theta-2}-1),\mathscr{F}(|\cdot|^2\phi)\rangle \\
=& \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2-\theta}(|\xi|^{\theta-2}-1)\psi(\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

を得る。ここで

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2-\theta}(|\xi|^{\theta-2}-1) = \frac{1}{2-\theta}(\exp((\theta-2)\log|\xi|)-1) \\
=& \frac{1}{2-\theta}\int_0^1\frac{d}{dt}(\exp(t(\theta-2)\log|\xi|))dt \\
=& -\log|\xi|\cdot\int_0^1\exp(t(\theta-2)\log|\xi|)dt \to -\log|\xi| \ (\theta\uparrow 2), \\
&|\frac{1}{2-\theta}(|\xi|^{\theta-2}-1)| \le |\log|\xi||
\end{aligned}
$$

に基づいてルベーグの収束定理を用いれば

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\uparrow 2}\langle|\xi|^2(\mathscr{F}(\frac{1}{2-\theta}(|\cdot|^{\theta-2}-1))),\phi\rangle &= \langle\log\frac{1}{|\cdot|},\psi\rangle \\
&= \langle|\xi|^2\mathscr{F}(\log\frac{1}{|\cdot|}),\phi\rangle
\end{aligned}
$$

を得る。一方

$$
\lim_{\theta\uparrow 2}\langle\frac{\Gamma(\theta/2)}{2^{2-\theta}\Gamma(2-\theta/2)}|\xi|^{2-\theta},\phi\rangle = \langle 1,\phi\rangle
$$

であるから系 2 が従う。

註　系 2 の等式は

$$
\begin{aligned}
-\Delta(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x|}) &= \mathscr{F}^{-1}|\xi|^2\mathscr{F}(\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|\cdot|}) \\
&= \mathscr{F}^{-1}\frac{1}{2\pi} = \delta
\end{aligned}
$$

を意味するからフーリエ変換を用いてラプラシアンの基本解が得られた事になる。

4. スペクトルパラメタ消滅極限に基づく方法

ラプラシアンの基本解をレゾルベント $(\lambda-\Delta)^{-1}$ のスペクトルパラメタ $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ の消滅極限 $\lambda \to 0$ として求めよう。滑らかな急減少函数 f に対し $(\lambda-\Delta)u = f$ の解 u は

$$
u = (\lambda-\Delta)^{-1}f = \mathscr{F}^{-1}(\lambda+|\cdot|^2)^{-1}\mathscr{F}f = (2\pi)^{-n/2}(\mathscr{F}^{-1}(\lambda+|\cdot|^2)^{-1}) * f
$$

と表されるから、問題は

$$
E_\lambda(x) \equiv (2\pi)^{-n/2}(\mathscr{F}^{-1}(\lambda+|\cdot|^2)^{-1})(x)
$$

を求める事に帰着される。1 次元と 3 次元の場合は具体的に計算出来る。

$n=1$ の場合

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対し

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\lambda + \xi^2} d\xi$$

を求める。$\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$ なる分枝を取り

$$\frac{1}{\lambda+\xi^2} = \frac{1}{(\xi + i\sqrt{\lambda})(\xi - i\sqrt{\lambda})} = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{\xi - i\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\xi + i\sqrt{\lambda}}\right)$$

と表す事にすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi \pm i\sqrt{\lambda}} d\xi$$

を求めれば充分である。この値を複素積分として求めよう。$R > 0$ に対し曲線 $\gamma_R^\pm$ を半円 $D_R^\pm = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R, \pm\, \mathrm{Im} z > 0\}$ の境界 $\partial D_R^\pm$ を正の向きに一周するものと定義する。

(1)　$x > 0$ の場合:　留数定理より

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix\xi}}{\xi \pm i\sqrt{\lambda}} d\xi + \int_0^\pi \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta} \pm i\sqrt{\lambda}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_{\gamma_R^+} \frac{e^{ixz}}{z \pm i\sqrt{\lambda}} dz$$
$$= 2\pi i \mathrm{Res}_{i\sqrt{\lambda}}\left(\frac{e^{ixz}}{z \pm i\sqrt{\lambda}}\right) = \begin{cases} 0 & (+ \text{ の場合}) \\ 2\pi i e^{-\sqrt{\lambda}x} & (- \text{ の場合}) \end{cases}$$

さて

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta} \pm i\sqrt{\lambda}} iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \frac{R}{R - |\sqrt{\lambda}|} \int_0^\pi \exp(-xR\sin\theta) d\theta \\ &= \frac{2R}{R - |\sqrt{\lambda}|} \int_0^{\pi/2} \exp(-xR\sin\theta) d\theta \\ &\leq \frac{2R}{R - |\sqrt{\lambda}|} \int_0^{\pi/2} \exp(-\frac{2xR}{\pi}\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{R - |\sqrt{\lambda}|} \frac{\pi}{x}(1 - e^{-xR}) \to 0 \ (R \to \infty) \end{aligned}$$

と評価されるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi \pm i\sqrt{\lambda}} d\xi = \begin{cases} 0 & (+ \text{ の場合}) \\ 2\pi i e^{-\sqrt{\lambda}x} & (- \text{ の場合}) \end{cases}$$

が従う。

(2)　$x<0$ の場合:　留数定理より

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix\xi}}{\xi\pm i\sqrt{\lambda}}d\xi+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}\pm i\sqrt{\lambda}}iRe^{i\theta}d\theta=\int_{\gamma_R^-}\frac{e^{ixz}}{z\pm i\sqrt{\lambda}}dz\\
&=2\pi i\mathrm{Res}_{-i\sqrt{\lambda}}\left(\frac{e^{ixz}}{z\pm i\sqrt{\lambda}}\right)=\begin{cases}2\pi ie^{\sqrt{\lambda}x} & (+\text{ の場合})\\ 0 & (-\text{ の場合})\end{cases}
\end{aligned}
$$

さて

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}\pm i\sqrt{\lambda}}iRe^{i\theta}d\theta\right| &\leq \frac{R}{R-|\sqrt{\lambda}|}\int_{\pi}^{2\pi}\exp(-xR\sin\theta)d\theta\\
&=\frac{R}{R-|\sqrt{\lambda}|}\int_{0}^{\pi}\exp(xR\sin\theta)d\theta\\
&=\frac{R}{R-|\sqrt{\lambda}|}\int_{0}^{\pi}\exp(-|x|R\sin\theta)d\theta\\
&\leq \frac{1}{R-|\sqrt{\lambda}|}\frac{\pi}{|x|}(1-e^{-|x|R})\to 0\ (R\to\infty)
\end{aligned}
$$

と評価されるので

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}}{\xi\pm i\sqrt{\lambda}}d\xi=\begin{cases}-2\pi ie^{-\sqrt{\lambda}x} & (+\text{ の場合})\\ 0 & (-\text{ の場合})\end{cases}
$$

が従う。

以上より $\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\infty,0],\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}>0$ に対し

$$
\begin{aligned}
E_\lambda(x)&=\frac{1}{4\pi i\sqrt{\lambda}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}}{\xi-i\sqrt{\lambda}}d\xi-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}}{\xi+i\sqrt{\lambda}}d\xi\right)\\
&=\frac{1}{4\pi i\sqrt{\lambda}}\cdot 2\pi i\cdot\begin{cases}e^{-\sqrt{\lambda}x} & (x>0\text{ の場合})\\ e^{\sqrt{\lambda}x} & (x<0\text{ の場合})\end{cases}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}
\end{aligned}
$$

が成立つ。ここに

$$
E_\lambda(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda+\xi^2}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}
$$

に注意する。これは L^1 函数のフーリエ変換の連続性を用いても直接複素積分を計算しても確かめられる。

1 次元の場合は次の様に直接解く事も出来る。$f\in L^1(\mathbb{R})$ に対し方程式

$$
(\lambda-\frac{d^2}{dx^2})u=f
$$

を考える。$v=(\sqrt{\lambda}-\frac{d}{dx})u$ と置くと

$$
f=(\sqrt{\lambda}+\frac{d}{dx})(\sqrt{\lambda}-\frac{d}{dx})u=(\sqrt{\lambda}+\frac{d}{dx})v=e^{-\sqrt{\lambda}x}\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{\lambda}x}v)
$$

となるから $v(x) \to 0\ (x \to \pm\infty)$ なる v は

$$e^{\sqrt{\lambda}x} f = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{\lambda}x} v)$$

を積分して

$$e^{\sqrt{\lambda}x} v(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{\lambda}y} f(y) dy$$

より

$$v(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y) dy$$

と表される。一方 $u(x) \to 0\ (x \to \pm\infty)$ なる u は

$$v = -e^{\sqrt{\lambda}x} \frac{d}{dx}(e^{-\sqrt{\lambda}x} u)$$

より

$$e^{-\sqrt{\lambda}x} u(x) = \int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}y} v(y) dy$$

即ち

$$u(x) = \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} v(y) dy$$

と表される。従って

$$\begin{aligned}
u(x) = & \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} \left(\int_{-\infty}^{y} e^{-\sqrt{\lambda}(y-\xi)} f(\xi) d\xi \right) dy \\
= & \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} \left(\int_{x}^{y} e^{-\sqrt{\lambda}(y-\xi)} f(\xi) d\xi \right) dy \\
& + \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{\lambda}(y-\xi)} f(\xi) d\xi \right) dy \\
= & \int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x+\xi)} \left(\int_{\xi}^{\infty} e^{-2\sqrt{\lambda}y} dy \right) f(\xi) d\xi \\
& + \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{\lambda}(x+\xi)} \left(\int_{x}^{\infty} e^{-2\sqrt{\lambda}y} dy \right) f(\xi) d\xi \\
= & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(\int_{x}^{\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-\xi)} f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{x} e^{\sqrt{\lambda}(\xi-x)} f(\xi) d\xi \right) \\
= & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(\int_{x}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|x-\xi|} f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{\lambda}|x-\xi|} f(\xi) d\xi \right) \\
= & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|x-\xi|} f(\xi) d\xi = (E_\lambda * f)(x)
\end{aligned}$$

となり E_λ が直接求められた。

$n = 3$ の場合

$\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$ なる $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ に対し

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{\lambda + |\xi|^2} d\xi$$

を求めよう。右辺の積分は絶対収束しないので広義積分として考える。任意の $R>0$ に対し半径 R の球 $\{\xi\in\mathbb{R}^3; |\xi|<R\}$ を極座標表示 $\xi=\rho\omega$ ($\rho=|\xi|<R$, $\omega=\xi/|\xi|=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$) して

$$\int_{|\xi|<R}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi=\int_0^R\frac{\rho^2}{\lambda+\rho^2}\left(\int_{S^2}e^{ix\cdot\rho\omega}d\sigma(\omega)\right)d\rho$$

と表す。左辺の積分は回転に対して不変なので $Tx=(0,0,|x|)$ なる $T\in O(3)$ を用いれば

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|<R}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi&=\int_{|\xi|<R}\frac{e^{iTx\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi\\&=\int_0^R\frac{\rho^2}{\lambda+\rho^2}\left(\int_{S^2}e^{i|x|\rho\omega_3}d\sigma(\omega)\right)d\rho\end{aligned}$$

となる。単位球面上の積分は

$$\begin{aligned}\int_{S^2}e^{i|x|\rho\omega_3}d\sigma(\omega)&=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}e^{i|x|\rho\cos\theta}\sin\theta d\theta\right)d\varphi\\&=2\pi\left[\frac{-1}{i|x|\rho}e^{i|x|\rho\cos\theta}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{2\pi i}{|x|\rho}(e^{-i|x|\rho}-e^{i|x|\rho})\end{aligned}$$

と計算されるので

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|<R}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi&=\frac{2\pi i}{|x|}\int_0^R\frac{\rho}{\lambda+\rho^2}(e^{-i|x|\rho}-e^{i|x|\rho})d\rho\\&=\frac{2\pi i}{|x|}\int_{-R}^R\frac{\rho e^{-i|x|\rho}}{\lambda+\rho^2}d\rho\\&=\frac{\pi i}{|x|}\int_{-R}^R\left(\frac{1}{\rho+i\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{\rho-i\sqrt{\lambda}}\right)e^{-i|x|\rho}d\rho\\&\to\frac{\pi i}{|x|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i|x|\rho}}{\rho+i\sqrt{\lambda}}d\rho+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i|x|\rho}}{\rho-i\sqrt{\lambda}}d\rho\right)\\&=\frac{\pi i}{|x|}\left(-2\pi i e^{-\sqrt{\lambda}|x|}+0\right)=\frac{2\pi^2}{|x|}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}\quad(R\to\infty)\end{aligned}$$

より

$$E_\lambda(x)=\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x|}}{4\pi|x|}$$

を得る。

一般の n 次元の場合

$\mathrm{Re}\lambda>0$ なる $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し

$$E_\lambda(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi$$

を広義積分として考える。ガウス核のフーリエ変換を用いると E_λ は

$$
\begin{aligned}
E_\lambda(x) &= \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|<R}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi \\
&= \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|<R}e^{ix\cdot\xi}\left(\int_0^\infty e^{-(\lambda+|\xi|^2)t}d\xi\right)dt \\
&= \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{|\xi|<R}e^{ix\cdot\xi}e^{-t|\xi|^2}d\xi\right)dt \\
&= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}e^{-t|\xi|^2}d\xi\right)dt \\
&= (2\pi)^{-n}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)dt \\
&= \frac{1}{4\pi^{n/2}|x|^{n-2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda|x|^2}{4s}-s\right)s^{n/2-2}ds
\end{aligned}
$$

と表される。$n\geq 3$ ならば原点の近傍で $s^{n/2-2}$ は可積分であり被積分函数は λ に依らない評価

$$
\left|\exp\left(-\frac{\lambda|x|^2}{4s}-s\right)s^{n/2-2}\right|\leq \exp(-s)s^{n/2-2}
$$

を持つ。よってルベーグの収束定理により各 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \mathrm{Re}\lambda>0}}E_\lambda(x) &= \frac{1}{4\pi^{n/2}|x|^{n-2}}\int_0^\infty e^{-s}s^{n/2-2}ds = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{n/2}|x|^{n-2}} \\
&= \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}|x|^{2-n}
\end{aligned}
$$

を得る。これは前節迄に得られた結果と一致する。

一方 $n\leq 2$ ならば $\lambda\to 0$ なるとき $E_\lambda(x)$ は一般に発散してしまう。特に $\lambda=0$ を代入すると

$$
\int_0^\infty \exp(-s)s^{n/2-2}ds \geq \int_0^1 \exp(-s)s^{n/2-2}ds \geq \frac{1}{e}\int_0^1 s^{n/2-2}ds = \infty
$$

となる。（$n=1$ の場合は具体的な形

$$
E_\lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}
$$

からも発散の様子が分かる。）しかし一方で $n\leq 2$ でもラプラシアンの基本解は求められる。そこで E_λ の発散部分を取り除く事により $\lambda\to 0$ でラプラシアンの基本解を記述する方法を考えよう。

$n=1$ の場合

$\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$ なる $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 及び $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して $c_\lambda \in \mathbb{C}$ を

$$c_\lambda = c_\lambda(f) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

と定める。

さて

$$u_\lambda(x) \equiv (E_\lambda * f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|} f(y)dy$$

は

$$(\lambda - \frac{d^2}{dx^2})u_\lambda = f$$

を満たすので

$$(\lambda - \frac{d^2}{dx^2})(u_\lambda - c_\lambda) = f - \lambda c_\lambda$$

が従う。このとき

$$u_\lambda(x) - c_\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|} - 1) f(y)dy$$

であり λ に関する一様評価

$$\begin{aligned} |\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|} - 1)| &= |\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \frac{d}{dt}(e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|t})dt| \\ &= |\int_0^1 e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|t} dt |x-y|| \\ &\leq \int_0^1 \exp(-(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda})|x-y|t)dt|x-y| \leq |x-y| \end{aligned}$$

が得られるのでルベーグの収束定理により $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$, $\lambda \to 0$ なるとき

$$u_\lambda(x) - c_\lambda \to -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y| f(y)dy$$

が従う。一方

$$f(x) - \lambda c_\lambda = f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \to f(x)$$

であり、等式

$$\begin{aligned} \left(\lambda - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} (f - \lambda c_\lambda) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}(f(y) - \lambda c_\lambda)dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|} f(y)dy - c_\lambda = u_\lambda - c_\lambda \end{aligned}$$

が成立つので、この等式の $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} > 0$, $\lambda \to 0$ なる極限として

$$u(x) = ((-\Delta)^{-1} f)(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y| f(y)dy$$

が従う。

$n=2$ の場合
$\lambda>0$ 及び $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して $c_\lambda\in\mathbb{C}$ を

$$c_\lambda=\frac{1}{4\pi}\left(\log\lambda-2\log 2+2\int_0^1(e^{-t}-1)\frac{dt}{t}+2\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\right)\int_{\mathbb{R}^2}f(x)dx$$

と定める。さて

$$u_\lambda(x)\equiv(E_\lambda*f)(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\exp(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s)\frac{ds}{s}\right)f(y)dy$$

は

$$(\lambda-\Delta)u_\lambda=f$$

を満たすので

$$(\lambda-\Delta)(u_\lambda-c_\lambda)=f-\lambda c_\lambda$$

が従う。このとき

$$\begin{aligned}&u_\lambda(x)-c_\lambda\\=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_0^\infty\exp(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s)\frac{ds}{s}-\log\frac{\lambda}{4}-2\int_0^1(e^{-t}-1)\frac{dt}{t}-2\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\right)f(y)dy\end{aligned}$$

であり、等式

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s\right)\frac{ds}{s}-\log\frac{\lambda}{4}-2\int_0^1(e^{-t}-1)\frac{dt}{t}-2\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\\=&\int_0^{\lambda|x-y|^2/4}\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s\right)\frac{ds}{s}-\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\\+&\int_{\lambda|x-y|^2/4}^1\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s\right)\frac{ds}{s}+\left(2\log\frac{1}{|x-y|}-\int_{\lambda|x-y|^2/4}^1\frac{ds}{s}\right)-2\int_0^1(e^{-t}-1)\frac{dt}{t}\\+&\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s\right)\frac{ds}{s}-\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\\=&2\log\frac{1}{|x-y|}+2\mathrm{I}+\mathrm{II}_\lambda\end{aligned}$$

が成立つ。ここに

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_\lambda=&\int_1^\infty\left(\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4t}\right)-1\right)e^{-t}\frac{dt}{t}\\=&\int_0^{\lambda|x-y|^2/4}\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4s}-s\right)\frac{ds}{s}-\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t},\\\mathrm{II}_\lambda=&\int_{\lambda|x-y|^2/4}^1\left(\exp\left(-\frac{\lambda|x-y|^2}{4t}\right)-1\right)e^{-t}\frac{dt}{t}-\int_0^1(e^{-t}-1)\frac{dt}{t}-\int_0^{\lambda|x-y|^2/4}(e^{-t}-1)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

と置いた。これらの積分は

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_\lambda| &\le \frac{\lambda|x-y|^2}{4}\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt, \\
|\mathrm{II}_\lambda| &\le \frac{\lambda|x-y|^2}{4}\int_{\min(1,\lambda|x-y|^2/4)}^{\max(1,\lambda|x-y|^2/4)} \frac{dt}{t^2} + 1 + \frac{\lambda|x-y|^2}{4} \\
&= \frac{\lambda|x-y|^2}{4}\left|\frac{\lambda|x-y|^2}{4} - 1\right| + 1 + \frac{\lambda|x-y|^2}{4}
\end{aligned}
$$

と評価される。

そこで $\varepsilon \downarrow 0$ なるとき

$$\int_\varepsilon^1 (e^{-\varepsilon/t}-1)e^{-t}\frac{dt}{t} \to \int_0^1 (e^{-t}-1)\frac{dt}{t}$$

を示せば、ルベーグの収束定理により $\lambda \downarrow 0$ なるとき

$$u_\lambda(x) - c_\lambda \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log\left(\frac{1}{|x-y|}\right) f(y)dy$$

が従う。一方

$$f(x) - \lambda c_\lambda \to f(x)$$

であり

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\Delta)^{-1}(f-\lambda c_\lambda) = E_\lambda * (f-\lambda c_\lambda) &= E_\lambda * f - \lambda c_\lambda (E_\lambda * 1) \\
&= u_\lambda - c_\lambda
\end{aligned}
$$

が成立つので、この等式の $\lambda \downarrow 0$ なる極限として

$$u(x) = ((-\Delta)^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(\frac{1}{|x-y|})f(y)dy$$

が従う。そこで上の積分の $\varepsilon \downarrow 0$ に於ける収束を示そう。$0 < \varepsilon \le 1$ として

$$\int_\varepsilon^1 (e^{-\varepsilon/t}-1)e^{-t}\frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^\infty \frac{(-\varepsilon)^j}{j!}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{-j-1}dt$$

を考える。部分積分を $(j+1)$ 回繰り返す事により

$$
\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{-j-1}dt &= \sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\frac{(j-k-1)!}{j!}(\varepsilon^{k-j}e^{-\varepsilon}-e^{-1}) - \frac{(-1)^j}{j!}\int_\varepsilon^1 e^{-t}t^{-1}dt \\
= \sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\frac{(j-k-1)!}{j!}&(\varepsilon^{k-j}e^{-\varepsilon}-e^{-1}) \ + \frac{(-1)^j}{j!}(\log\varepsilon)e^{-\varepsilon} - \frac{(-1)^j}{j!}\int_\varepsilon^1 (\log t)e^{-t}dt
\end{aligned}
$$

を得る。これより

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{1}(e^{-\varepsilon/t}-1)e^{-t}\frac{dt}{t}\\
=\ &\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{1}{j}e^{-\varepsilon}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\varepsilon^j\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\frac{(j-k-1)!}{j!}e^{-1}\\
+\ &\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^k\frac{(j-k-1)!}{j!}\varepsilon^k e^{-\varepsilon}\\
+\ &\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{(j!)^2}\left[(\log\varepsilon)e^{-\varepsilon}-\int_{\varepsilon}^{1}(\log t)e^{-t}dt\right]
\end{aligned}
$$

が従う。故に

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1}(e^{-\varepsilon/t}-1)e^{-t}\frac{dt}{t} &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!j}=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^j}{j!}t^{j-1}dt\\
&=\int_0^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt
\end{aligned}
$$

が成立つ。これが示すべき事であった。

参考文献：

岸正倫，ポテンシャル論，森北出版

高橋陽一郎，実関数とフーリエ解析，岩波書店

L. シュワルツ，超函数の理論，岩波書店

G. B. Folland, Introduction to Partial Differential Equations, Princeton

B. E. Petersen, Introduction to the Fourier Transform and Pseudo-Diffential Operators, Pitman