球面上のラプラシアン

平成 20 年 4 月

平成 29 年 12 月改訂

小澤　徹

http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

球面上のラプラシアンを直交座標による表示を用いて具体的に考えてみよう。

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し $x = r\omega,\ r = |x|,\ \omega = x/|x|$ と分解する事で $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と $(0, \infty) \times S^{n-1}$ とを同一視する。$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上の滑らかな函数 u に対し $\partial_r u$ を

$$\partial_r u = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} \partial_j u$$

と**定義する**。このとき ∂_r^2 について具体的に計算する事により

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 u &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} \partial_j \left(\frac{x_k}{|x|} \partial_k u \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} \left(\left(\delta_{jk} - \frac{x_j x_k}{|x|^3} \right) \partial_k u + \frac{x_k}{|x|} \partial_j \partial_k u \right) \\
&= \frac{1}{|x|^2} x \cdot \nabla u - \frac{|x|^2}{|x|^4} x \cdot \nabla u + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_j x_k}{|x|^2} \partial_j \partial_k u \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_j x_k}{|x|^2} \partial_j \partial_k u
\end{aligned}$$

を得る。さて

$$\begin{aligned}
&\sum_{j<k} (x_j \partial_k - x_k \partial_j)^2 u \\
&= \sum_{j<k} (x_j \partial_k - x_k \partial_j)(x_j \partial_k u - x_k \partial_j u) \\
&= \sum_{j<k} x_j \partial_k (x_j \partial_k u - x_k \partial_j u) - \sum_{j<k} x_k \partial_j (x_j \partial_k u - x_k \partial_j u) \\
&= \sum_{j<k} (x_j^2 \partial_k^2 u - x_j \partial_j u - x_j x_k \partial_k \partial_j u) - \sum_{j<k} (x_k \partial_k u + x_k x_j \partial_j \partial_k u - x_k^2 \partial_j^2 u) \\
&= \sum_{j \neq k} x_j^2 \partial_k^2 u - \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} x_j \partial_j u + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} x_k \partial_k u \right) - \left(\sum_{j<k} x_j x_k \partial_k \partial_j u + \sum_{j<k} x_k x_j \partial_j \partial_k u \right) \\
&= \sum_{j \neq k} x_j^2 \partial_k^2 u - \left(\sum_{j=1}^{n} (n-j) x_j \partial_j u + \sum_{k=1}^{n} (k-1) x_k \partial_k u \right) \\
&\qquad - \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \partial_j \partial_k u - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \partial_j^2 u \right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{j\neq k} x_j^2\partial_k^2 u + \sum_{j=1}^n x_j^2\partial_j^2 u\right) - \left(\sum_{j=1}^n (n-j)x_j\partial_j u + \sum_{j=1}^n (j-1)x_j\partial_j u\right) - \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j x_k \partial_j\partial_k u$$
$$= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j^2\partial_k^2 u - (n-1)\sum_{j=1}^n x_j\partial_j u - \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j x_k\partial_j\partial_k u$$
$$= |x|^2\Delta u - (n-1)x\cdot\nabla u - \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j x_k\partial_j\partial_k u$$

即ち、等式

$$\sum_{j<k}(x_j\partial_k - x_k\partial_j)^2 = r^2\Delta - (n-1)r\partial_r - r^2\partial_r^2 u$$

が従う。そこで

$$\Delta_{S^{n-1}} = \sum_{j<k}(x_j\partial_k - x_k\partial_j)^2$$

と置くとラプラシアンの極座標表示

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}$$

が得られる。

これを定理として纏めておこう。

定理 1 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於けるラプラシアン $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ は**動径微分** $\partial_r = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{|x|}\partial_j$ 及び**角度微分** $L_{jk} = x_j\partial_k - x_k\partial_j$ によって次の様に表される：

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}},$$

但し $r = |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$, $\Delta_{S^{n-1}} = \sum_{1\leq j<k\leq n} L_{jk}^2$ とする。

次に、単位球面上のラプラシアンの表示について考えよう。

定理 2 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に於けるラプラシアンの角度方向部分は**球面微分** $L_j = \partial_j - \frac{x_j}{|x|}\partial_r$ によって次の様に表される：

$$\frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}} = \sum_{j=1}^n\left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|}\partial_r\right)^2$$

(証明) 交換関係 $\left[\partial_r, \frac{x_j}{|x|}\cdot\right] = 0,\ [\partial_r, \partial_j] = -\frac{1}{|x|}\partial_j + \frac{x_j}{|x|^2}\partial_r$ に注意して計算する。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left(\partial_j-\frac{x_j}{|x|}\partial_r\right)^2 u\\
&=\sum_{j=1}^{n}\partial_j\left(\partial_j-\frac{x_j}{|x|}\partial_r\right)u\\
&\qquad-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}\partial_r\left(\partial_j-\frac{x_j}{|x|}\partial_r\right)u\\
&=\Delta u-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{x_j^2}{|x|^3}\right)\partial_r u-\partial_r^2 u\\
&\qquad-\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}\left(\partial_j\partial_r u-\frac{1}{|x|}\partial_j u+\frac{x_j}{|x|^2}\partial_r u\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}\frac{x_j}{|x|}\partial_r^2 u\\
&=\Delta u-\frac{n-1}{|x|}\partial_r u-\partial_r^2 u\\
&\qquad-\partial_r^2 u+\frac{1}{|x|}\partial_r u-\frac{1}{|x|}\partial_r u+\partial_r^2 u\\
&=\Delta u-\frac{n-1}{r}\partial_r u-\partial_r^2 u
\end{aligned}
$$

よって定理 1 より定理 2 を得る。

単位球面上で定義された函数 $u \in C^2(S^{n-1})$ に対し $Eu \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ を $(Eu)(x) = u\left(\frac{x}{|x|}\right)$ で定めよう (E は拡張作用素 extension operator であり、赤道写像 equator map $x \mapsto x/|x|$ による引き戻しである)。一方 $v \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対して、その制限 $Rv \in C^2(S^{n-1})$ が $(Rv)(x) = v(x),\ x \in S^{n-1}$ で定まる。このとき

定理 3 $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対し

$$\Delta E u = \frac{1}{|x|^2} E \Delta_{S^{n-1}} u$$

が成立つ。単位球面上に制限すると

$$\Delta_{S^{n-1}} = R \circ \Delta \circ E$$

が成立つ。

$$
\begin{array}{ccc}
C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\Delta} & C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\
{\scriptstyle E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\
C^2(S^{n-1}) & \xrightarrow[\Delta_{S^{n-1}}]{} & C(S^{n-1})
\end{array}
$$

(証明)　等式

$$\partial_j E = \frac{1}{|x|} E \left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r \right)$$

に注意して ΔE を計算する。

$$\begin{aligned}
\Delta E u &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 E u \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial_j \left(\frac{1}{|x|} E \left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r \right) u \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{x_j}{|x|^3} \right) E \left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r \right) u + \frac{1}{|x|^2} \sum_{j=1}^{n} E \left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r \right)^2 u \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|^3} E \partial_j u + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{|x|^4} E \partial_r u + \frac{1}{|x|^2} E \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r \right)^2 u \right) \\
&= -\frac{1}{|x|^2} E \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} \partial_j u \right) + \frac{1}{|x|^2} E \partial_r u + \frac{1}{|x|^2} E \left(\frac{1}{|x|^2} \Delta_{S^{n-1}} u \right) \\
&= \frac{1}{|x|^2} E \Delta_{S^{n-1}} u
\end{aligned}$$

ここで定理２を用いた。

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が球対称函数（動径函数 radial function）であるとは u の値が角度方向に依らず動径方向にのみ依存する函数と定義する。即ち $v \in C^\infty((0, \infty))$ が存在し任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し等式

$$u(x) = v(|x|)$$

が成立つ事を謂う。$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が動径対称函数（球面函数 spherical function）であるとは u の値が動径方向に依らず角度方向にのみ依存する函数と定義する。即ち任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し、等式

$$u(x) = u\left(\frac{x}{|x|} \right)$$

が成立つ事を謂う。

動径函数に対し**角度微分** $L_{jk} = x_j \partial_k - x_k \partial_j$ 及び**球面微分** $L_j = \partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r$ は**消滅作用素**として働く。実際（上の記号で）

$$\begin{aligned}
L_{jk} u &= (x_j \partial_k - x_k \partial_j) v(|x|) \\
&= x_j \frac{x_k}{|x|} v'(|x|) - x_k \frac{x_j}{|x|} v'(|x|) = 0, \\
L_j u &= \left(\partial_j - \frac{x_j}{|x|} \partial_r \right) v(|x|) \\
&= \frac{x_j}{|x|} v'(|x|) - \frac{x_j}{|x|} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{|x|} \frac{x_k}{|x|} v'(|x|) = 0
\end{aligned}$$

となるからである。また球面函数に対し**動径微分** $\partial_r = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|}\partial_j$ は**消滅作用素**として働く。実際

$$\begin{aligned}
\partial_r u &= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|}\partial_j \left(u\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} \sum_{k=1}^{n} \partial_j \left(\frac{x_k}{|x|}\right) (\partial_k u) \left(\frac{x}{|x|}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\delta_{jk}}{|x|} - \frac{x_j x_k}{|x|^3}\right) (\partial_k u) \left(\frac{x}{|x|}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{|x|^2} (\partial_j u) \left(\frac{x}{|x|}\right) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2 x_k}{|x|^4} (\partial_k u) \left(\frac{x}{|x|}\right) = 0
\end{aligned}$$

となるからである。

動径微分 ∂_r は、動径伸長

$$T_\theta : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \longmapsto x + \theta \frac{x}{|x|} \in \mathbb{R}^n$$

の成す族 $(T_\theta; \theta \geq 0)$ の**引き戻し** (pullback) としての函数への作用

$$(T_\theta^* u)(x) = u(T_\theta x)$$

の**生成作用素** (generator)

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \ \theta^{-1}(T_\theta^* u - u) = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} T_\theta^* u = \partial_r u$$

として理解される。$(T_\theta; \theta \geq 0)$ は $T_0 = \mathrm{id}$ ではあるが、動径函数の成す函数空間に制限して初めて半群を成す。

角度微分 L_{jk} は、$(e_1, \cdots, e_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底としたとき jk 平面に於ける回転

$$R_\theta^{jk} : \mathbb{R}^n \ni x \longmapsto (x_j \cos\theta - x_k \sin\theta) e_j + (x_j \sin\theta - x_k \cos\theta) e_k + \sum_{l \neq j,k} x_l e_l \in \mathbb{R}^n$$

の成す一径数群 $(R_\theta^{jk}; \theta \in \mathbb{R})$ の引き戻しとしての函数への作用の生成作用素

$$\lim_{\theta \to 0} \ \theta^{-1} \left(\left(R_\theta^{jk}\right)^* u - u \right) = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} \left(R_\theta^{jk}\right)^* u = L_{jk} u$$

として理解される。

球面微分 L_j は、（球面）接並進

$$S_\theta^j : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \longmapsto \theta \left(e_j - \frac{x_j}{|x|}\frac{x}{|x|} \right) \in \mathbb{R}^n$$

の成す族 $(S_\theta^j;\theta\in\mathbb{R})$ の引き戻しとしての函数への作用の生成作用素

$$\lim_{\theta\to 0}\ \theta^{-1}\left(\left(S_\theta^j\right)^* u-u\right)=\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0}\left(S_\theta^j\right)^* u=L_j u$$

として理解される。$(S_\theta^j;\theta\in\mathbb{R})$ は $S_\theta^j=\mathrm{id}$ ではあるが、群を成さない。

動径方向と球面上の接平面方向との直交性は、変換族のレベルでは

$$\begin{aligned}&((T_\theta-\mathrm{id})x)\cdot((S_\theta^j-\mathrm{id})x)\\&=\theta\frac{x}{|x|}\cdot\theta\left(e_j-\frac{x_j}{|x|}\frac{x}{|x|}\right)=\theta^2\left(\frac{x_j}{|x|}-\frac{x_j}{|x|}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{x}{|x|}\right)=0\end{aligned}$$

と理解され、微分作用素のレベルでは

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{|x|}L_j&=\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{|x|}\left(\partial_j-\frac{x_j}{|x|}\partial_r\right)=\partial_r-\partial_r=0,\\|\partial_r u|^2+&\sum_{j=1}^n|L_j u|^2\\&=|\partial_r u|^2+\sum_{j=1}^n\left(|\partial_j u|^2-2\mathrm{Re}\left(\frac{x_j}{|x|}\ \overline{\partial_r u}\ \partial_j u\right)+\frac{x_j^2}{|x|^2}|\partial_r u|^2\right)\\&=|\partial_r u|^2+|\nabla u|^2-2\mathrm{Re}\ (\overline{\partial_r u}\ \partial_r u)+|\partial_r u|^2\\&=|\nabla u|^2,\\|\nabla u|^2&=\sum_{j=1}^n\left|L_j u+\frac{x_j}{|x|}\partial_r u\right|^2\\&=\sum_{j=1}^n|L_j u|^2+2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{|x|}L_j u\right)\ \overline{\partial_r u}+|\partial_r u|^2\\&=\sum_{j=1}^n|L_j u|^2+|\partial_r u|^2\end{aligned}$$

と表現される。

最後に、球対称函数 (動径函数) の特徴付けを与えよう。以下では $\rho>0$ に対して函数 u_ρ を $u_\rho(x)=u(\rho x)$ で定義する。

定理４　$n\geq 2$ とする。$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ に対し次は同値である。

(1) $v\in C^\infty((0,\infty))$ が在って、任意の $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し $u(x)=v(|x|)$ が成立つ。

(2) 任意の $T\in O(n)$ に対し $T^*u=u$ となる。即ち任意の $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し $u(Tx)=u(x)$ が成立つ。

(3) 任意の $T\in SO(n)$ に対し $T^*u=u$

(4) $1 \leq j \leq n$ なる任意の j に対し $\partial_j u = \frac{x_j}{|x|}\partial_r u$

(5) $1 \leq j < k \leq n$ なる任意の j, k に対し $L_{jk}u = 0$

(6) 任意の $\rho > 0$ に対し Eu_ρ は (x に存在しない) 定数函数。

(証明)

(1) ⇒ (2) : 直交行列は等距離変換を導く事により従う。

(2) ⇒ (3) : (3) は (2) の特別な場合である。

(3) ⇒ (1) : 任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し $T_x \in SO(n)$ が在って $T_x \frac{x}{|x|} = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ となる。そこで $(0, \infty)$ 上の函数 v を $v(r) = u(re_1)$ と置く。このとき (3) により

$$u(|x|e_1) = u\left(|x|T_x \frac{x}{|x|}\right) = u(T_x x) = u(x)$$

となるので (1) が従う。

(1) ⇒ (4) : $\partial_j u(x) = \partial_j v(|x|) = \frac{x_j}{|x|}v'(|x|)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{x_j}{|x|}\partial_r u &= \sum_{k=1}^n \frac{x_j x_k}{|x|^2}\partial_k u = \sum_{k=1}^n \frac{x_j x_k}{|x|^2} \cdot \frac{x_k}{|x|}v'(|x|) = \frac{x_j}{|x|}\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{|x|^2}v'(|x|) \\ &= \frac{x_j}{|x|}v'(|x|) = \partial_j u\end{aligned}$$

(4) ⇒ (5) : $\partial_j u = \frac{x_j}{|x|}\partial_r u$ 及び $\partial_k u = \frac{x_k}{|x|}\partial_r u$ を用いて

$$x_k \partial_j u = \frac{x_k x_j}{|x|}\partial_r u = \frac{x_j x_k}{|x|}\partial_r u = x_j \partial_k u$$

となるので $L_{jk}u = 0$ となる。

(5) ⇒ (4) : $x_k \partial_j u = x_j \partial_k u$ であるから

$$\frac{x_j}{|x|}\partial_r u = \sum_{k=1}^n \frac{x_j x_k}{|x|^2}\partial_k u = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{|x|^2}\partial_j u = \partial_j u$$

(4) ⇒ (6) : $\partial_j u_\rho = \rho(\partial_j u)_\rho$ であるから (4) により

$$\left(\partial_j u_\rho - \frac{x_j}{|x|}\partial_r u_\rho\right)(x) = \rho\left(\partial_j u - \frac{x_j}{|x|}\partial_r u\right)(\rho x) = 0$$

従って $\partial_j E u_\rho = \frac{1}{|x|}E(\partial_j - \frac{x_j}{|x|}\partial_r)u_\rho = 0$

(6) ⇒ (1) : Eu_ρ は x に依らず、ρ のみに依存する定数の値を取るので、それを $v(\rho)$ と表す。このとき任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し $(Eu_\rho)(x) = v(\rho)$ となる。一方 $(Eu_\rho)(x) = u_\rho(\frac{x}{|x|}) = u(\rho\frac{x}{|x|})$ である。従って、任意の $\rho > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し $u(\rho\frac{x}{|x|}) = v(\rho)$ が成立つ。そこで $\rho = |x|$ と置くと $u(x) = v(|x|)$ となる。

定理 5　$n \geq 2$ とし、$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対し次の条件を考える。

(7)　$\Delta_{S^{n-1}} u = 0$

このとき (1)-(6) の同値な性質の一つから (7) が従う。更に、$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ および $1 \leq j < k \leq n$ なる任意の j, k に対し $L_{jk} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ であると仮定すると (1)-(7) は同値である。

(証明)

(5) ⇒ (7)： $\Delta_{S^{n-1}} u = \sum_{j<k} L_{jk}^2 u = 0$

(7) ⇒ (5)： 部分積分により

$$\sum_{j<k} (L_{jk}^2 u, u) = -\sum_{j<k} \|L_{jk} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

となるので (7) から (5) が従う。

注意　定理 5 の後半に於いて可積分性の条件は必要である。実際 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ を $u(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1}(x/y)$ で定めると $L_{12} u = 1,\ \Delta_{S^1} u = L_{12}^2 u = 0$ であるから、(7) は成立つが (5) は成立しない。

参考文献： R.T. Seeley, Spherical harmonics, American Mathematical Monthly **73** (1966) 115-121.
平井武、山下博、表現論入門セミナー、遊星社