ミンコフスキ時空

平成 27 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
"In the light, you will find the law," Led Zeppelin

ガリレイ時空にミンコフスキ計量を導入したミンコフスキ時空及びその変換群に就いて纏めて置こう。

1．ガリレイ時空とミンコフスキ時空

実ベクトル空間 V を基準ベクトル空間とするアフィン空間 X が**ガリレイ時空** Galilean space-time であるとは、零でない線型形式 $T : V \to \mathbb{R}$ が存在し、V の部分空間 $\mathrm{Ker}\ T$ 自身がノルム空間であることと**定義する**。X の点を**事象** event と謂う。一つの事象 $p \in X$ に対し

$$X_p = \{q \in X; q - p \in \mathrm{Ker}\ T\}$$

と置き $q, r \in X_p$ に対し

$$d_p(q, r) = \|q - r\|$$

と置く。ここに $\|\cdot\|$ ノルム空間 $\mathrm{Ker}\ T$ を基準ベクトル空間とする X の部分アフィン空間であり d_p は X_p の平行移動に関して不変な距離となる。線型形式 $T : V \to \mathbb{R}$ は零でないので $\mathrm{Ker}\ T \subsetneqq V$ となり $v_0 \in V \setminus \mathrm{Ker}\ T$ なる元 v_0 が存在する。これより $T(v_0) \neq 0, v_0 \neq 0$ を得る。さて $v \in V$ に対し

$$\varphi(v) = \left(\frac{T(v)}{T(v_0)}, v - \frac{T(v)}{T(v_0)}v_0\right) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Ker}\ T$$

と置くと $\varphi : V \to \mathbb{R} \times \mathrm{Ker}\ T$ に対し

$$\psi(t, x) = x + tv_0$$

と置いて得られる線型写像 $\psi : \mathbb{R} \times \mathrm{Ker}\ T \to V$ は φ の逆写像となるから $\varphi : V \to \mathbb{R} \times \mathrm{Ker}\ T$ は線型同型を与える。

　さて $\mathrm{Ker}\ T$ 自身がヒルベルト空間となっている場合を考える。以下 $H = \mathrm{Ker}\ T$ とし、その内積を $(\cdot|\cdot)$ と表す事にする。積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times H$ には $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times H$ に対し

$$g((t, x), (s, y)) = ts - (x|y)$$

として計量 $g : (\mathbb{R} \times H) \times (\mathbb{R} \times H) \to \mathbb{R}$ が定まる。簡単の為

$$g(t, x) = g((t, x), (t, x)) = t^2 - \|x\|^2$$

と表す。ここに $\|\cdot\| = (\cdot|\cdot)^{1/2}$ とする。各 $v \in V$ に対し

$$(g \circ \varphi)(v) = g(\varphi(v)) = \left(\frac{T(v)}{T(v_0)}\right)^2 - \|v - \frac{T(v)}{T(v_0)}v_0\|^2$$

と置くと $g \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$ は V の計量を定義する事となる。この様に Ker T 自身がヒルベルト空間である場合に計量 $g \circ \varphi$ を備えた備えた基準ベクトル空間 V を持つアフィン空間 X を**ミンコフスキ時空** Minkowski space-time と謂い $g \circ \varphi$ （又は g) を**ミンコフスキ計量** Minkowski metric と謂う。

2．ローレンツ変換とその構造

ミンコフスキ時空 $(X, g \circ \varphi)$ からそれ自身への写像としてのローレンツ変換を導入しよう。積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times H$ に付随する埋め込みと射影を

$$\iota_1 : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t, 0) \in \mathbb{R} \times H, \qquad \pi_1 : \mathbb{R} \times H \ni (t, x) \mapsto t \in \mathbb{R}$$
$$\iota_2 : H \ni x \mapsto (0, x) \in \mathbb{R} \times H, \qquad \pi_2 : \mathbb{R} \times H \ni (t, x) \mapsto x \in H$$

で定義する。

定義　ミンコフスキ時空 $(X, g \circ \varphi)$ からそれ自身への写像 $f : X \to X$ は次の三つの性質を満たすとき**ローレンツ変換**であると謂う。

(L1)（アフィン同型）　$\mathcal{L}_f \in GL(V)$ が存在し任意の $p, q \in X$ に対し等式

$$f(p) - f(q) = \mathcal{L}_f(p - q)$$

が成立つ。

(L2)（ミンコフスキ計量の保存）　$\mathcal{L}_f^*(g \circ \varphi) = g \circ \varphi$
即ち任意の $v \in V$ に対し等式

$$(\mathcal{L}_f^*(g \circ \varphi))(v) = (g \circ \varphi)(\mathcal{L}_f(v)) = (g \circ \varphi)(v)$$

が成立つ。

(L3)（時間の空間連続依存性）　線型形式 $\pi_1 \circ \varphi \circ \mathcal{L}_f \circ \varphi^{-1} \circ \iota_2 : H \to \mathbb{R}$ は連続である。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}_f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{R} \times H \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R} \times H \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

図 1: ミンコフスキ計量の保存

$L = \varphi \circ \mathcal{L}_f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \mathcal{L}_f \circ \psi$ と置けば (L2) は図 1 の可換性を表し (L3) は L の H から $\mathbb{R}$ への成分の連続性を表したものに外ならない。L の 4 つの成分としての線型写像

$$L_{11} = \pi_1 \circ L \circ \iota_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$L_{12} = \pi_1 \circ L \circ \iota_2 : H \to \mathbb{R}$$

$$L_{21} = \pi_2 \circ L \circ \iota_1 : \mathbb{R} \to H$$

$$L_{22} = \pi_2 \circ L \circ \iota_2 : H \to H$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, "\pi_1 \circ L \circ \iota_2"'] & \mathbb{R} \times H \arrow[r, "L"] & \mathbb{R} \times H \arrow[d, "\pi_1"] \\
& & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

図 2: 時間の空間連続依存性

を考える。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $L_{11}(t) = tL_{11}(1)$ であるから $a = L_{11}(1) \in \mathbb{R}$ と置くと $L_{11}(t) = at$ となる。(L3) は $L_{12} \in H^*$ を表したものであり、リースの定理に因り唯一つの $u_0 \in H$ が存在し任意の $x \in H$ に対して $L_{12}(x) = (u_0|x)$ が成立つ。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $L_{21}(t) = tL_{21}(1)$ であるから $u_1 = L_{21}(1) \in H$ と置くと $L_{21}(t) = tu_1$ となる。そこで $A = L_{22}$ と表すと等式

$$L(t, x) = (at + (u_0|x), tu_1 + Ax),\ (t, x) \in \mathbb{R} \times H$$

が従う。$(t, x) \in \mathbb{R} \times H$ を縦ベクトル表示すれば $L : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R} \times H$ の行列表示

$$\begin{pmatrix} at + (u_0|x) \\ tu_1 + Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (u_0|\cdot) \\ u_1 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

を得る。$\mathcal{L}_f : V \to V$ は線型同型であるから $a \neq 0$ 且つ $A : H \to H$ の同型性が従う。さて (L2) は任意の $(t, x) \in \mathbb{R} \times H$ に対して等式

$$g(L(t, x)) = g(t, x)$$

が成立つ事と同値であり

$$\begin{aligned} &g(L(t, x)) = g(at + (u_0|x), tu_1 + Ax) \\ =&(at + (u_0|x))^2 - \|tu_1 + Ax\|^2 \\ =&(a^2 + t^2 + 2at(u_0|x) + (u_0|x)^2) - (t^2\|u_1\|^2 + 2t(u_1|Ax) + \|Ax\|^2) \\ =&(a^2 - \|u_1\|^2)t^2 + 2(a(u_0|x) - (u_1|Ax))t + ((u_0|x)^2 - \|Ax\|^2) \end{aligned}$$

であるから (L2) は次の三つの条件が全て成立する事と同値である：

(1) $\quad a^2 - \|u_1\|^2 = 1$

(2) 任意の $x \in H$ に対し $a(u_0|x) - (u_1|Ax) = 0$

(3) 任意の $x \in H$ に対し $\|Ax\|^2 - (u_0|x)^2 = \|x\|^2$

条件 (2) により任意の $x \in H$ に対し $(au_0 - {}^tAu_1|x) = 0$ が成立するので $au_0 = {}^tAu_1$ 即ち $u_0 = \frac{1}{a}{}^tAu_1 = \frac{1}{L_{11}(1)}({}^tL_{22} \circ L_{21})(1)$ を得る。条件 (3) により $\|Ax\|^2 = (u_0|x)^2 + \|x\|^2 \leq (\|u_0\|^2 + 1)\|x\|^2$ 及び $\|Ax\|^2 = (u_0|x)^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$ を得るので A 及び A^{-1} の有界性が従う。特に $u_0 = 0$ なら A はユニタリ作用素となる。以下 $u_0 \neq 0$ として考え u_0 と u_1 は一次従属と仮定して議論を進める。即ち $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ が存在し $u_0 = \lambda u_1 \neq 0$ であると仮定する。このとき

(4) $\quad |(u_0|u_1)| = \|u_0\|\|u_1\|$

(5) $\quad \lambda u_1 = u_0 = \frac{1}{a}\,{}^tAu_1$

が成立つ。(3) で $x = u_0/\|u_0\|$ 及び $x = u_1/\|u_1\|$ と置き (4) を用いると

(6) $\quad \frac{\|Au_0\|^2}{\|u_0\|^2} = 1 + \|u_0\|^2 = 1 + \frac{(u_0|u_1)^2}{\|u_1\|^2} = \frac{\|Au_1\|^2}{\|u_1\|^2}$

を得る。そこで

(7) $\quad d = \frac{\|Au_0\|}{\|u_0\|} = \frac{\|Au_1\|}{\|u_1\|}$

と置く。(6) より $d > 1$ となる。(5) より Au_0 と Au_1 は一次従属で ${}^tAu_0$ と ${}^tAu_1$ も一次従属である。よって (5) の関係を用いて等式

$$\begin{aligned}\|Au_1\|^2 &= \frac{1}{|\lambda|}\|Au_0\|\|Au_1\| = \frac{1}{|\lambda|}|(Au_0|Au_1)| = \frac{1}{|\lambda a|}|(A{}^tAu_1|Au_1)| \\ &= \frac{1}{|\lambda a|}|({}^tAu_1|{}^tAAu_1)| = \frac{1}{|\lambda|}|({}^tAu_1|{}^tAu_0)| = \frac{1}{|\lambda|}\|{}^tAu_1\|\ \|{}^tAu_0\| \\ &= \|{}^tAu_1\|^2\end{aligned}$$

を得る。これより (7) と (5) を用いて

(8) $\quad d^2 = \frac{\|Au_1\|^2}{\|u_1\|^2} = \frac{\|{}^tAu_1\|^2}{\|u_1\|^2} = \frac{\lambda^2 a^2 1^4\|u_1\|^2}{\|u_1\|^2} = \lambda^2 a^2$

を得るので (1)(6)(7)(8) を用いると

$$\begin{aligned}1 &= d^2 - \|u_0\|^2 = d^2 - \lambda^2\|u_1\|^2 = d^2 - \frac{d^2}{a^2}\|u_1\|^2 = \left(\frac{d}{a}\right)^2(a^2 - \|u_1\|^2) \\ &= \left(\frac{d}{a}\right)^2\end{aligned}$$

が成立つ。従って $d^2 = a^2$ 及び $\lambda^2 = 1$ が成立つ。更に

$$\begin{aligned}\|Au_1 - {}^tAu_1\|^2 &= \|Au_1\|^2 - 2(Au_1|{}^tAu_1) + \|{}^tAu_1\|^2 \\ &= 2\|Au_1\|^2 - 2\lambda a(Au_1|u_1) = 2\|Au_1\|^2 - 2\lambda a(u_1|{}^tAu_1) \\ &= 2\|Au_1\|^2 - 2\lambda^2 a^2\|u_1\|^2 = 2\|u_1\|^2(d^2 - \lambda^2 a^2) = 0\end{aligned}$$

より (5) は

(9) $\quad \pm u_1 = u_0 = \frac{1}{a}Au_1$

と書き換えられる。さて $v \in \mathbb{R}$ を

(10) $\quad v = \frac{\|u_1\|}{a}$ で定義すると (1) より

$$1 = a^2 - \|u_1\|^2 = a^2(1 - v^2) = a^2\left(1 - v^2\right)$$

より $0 < v^2 < 1$,

(11) $\quad d^2 = a^2 = \frac{1}{1-v^2}$

が従う。これより u_0, u_1, Au_0, Au_1 のノルムの自乗が次の様に求まる：

$$
\begin{aligned}
\|u_1\|^2 &= a^2 - 1 = \frac{1}{1-v^2} - 1 = \frac{v^2}{1-v^2} \\
\|Au_1\|^2 &= d^2\|u_1\|^2 = \frac{v^2}{(1-v^2)^2} \\
\|u_0\|^2 &= \|u_1\|^2 = \frac{v^2}{1-v^2} \\
\|Au_0\|^2 &= d^2\|u_0\|^2 = \frac{v^2}{(1-v^2)^2}
\end{aligned}
$$

また (3) は次の様に書き換えられる：

$$
\|Ax\|^2 = \|x\|^2 + \frac{v^2}{1-v^2}\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}\middle|\, x\right)^2, \quad x \in H
$$

以上を定理の形に纏めて置こう。

定理 1 (ローレンツ変換の構造定理) ミンコフスキ時空 $(X, g, \circ\varphi)$ 内のローレンツ変換 $f : X \to X$ に対して次が成立つ。但し $\mathcal{L}_f \in GL(V)$ を f に付随する同型写像とし $L = \varphi \circ \mathcal{L}_f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \times H \to \mathbb{R} \times H$ を積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times H$ の同型写像とする。

(1) $u_0, u_1 \in H,\ a \in \mathbb{R},\ A \in GL(H)$ が唯一組定まり任意の $(t, x) \in \mathbb{R} \times H$ に対し

$$
L(t, x) = (at + (u_0|x),\ tu_1 + Ax)
$$

が成立つ。a, u_0, u_1, A は次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
a &= L_{11}(1) \\
u_0 &= \alpha(L_{12}) \\
u_1 &= L_{21}(1) \\
A &= L_{22}
\end{aligned}
$$

但し $L_{ij} = \pi_i \circ L \circ \iota_j$ で $\alpha : H^* \to H$ はリース対応を表す線型同型写像とする。

(2) (1) の u_0 と u_1 は線型従属であるとすると次の関係式が成立つ：

$$
\pm u_1 = u_0 = \frac{1}{a} Au_1
$$

ここに $\pm$ は u_0 と u_1 が同じ向き（即ち $(u_0|u_1) > 0$) のとき$+$で反対の向き（即ち $(u_0|u_1) < 0$) のとき$-$を取るものとする。即ち $u_0 = \alpha(L_{12})$ は

$$
u_0 = \frac{1}{L_{11}(1)} (L_{22} \circ L_{21})(1)
$$

で表され $u_1 = L_{21}(1)$ は u_0 の ± 1 倍で与えられる。$v \in \mathbb{R}$ を

$$v = \frac{\|u_1\|}{a} = \frac{\|L_{21}(1)\|}{L_{11}(1)}$$

で定義すると $0 < v^2 < 1$ であり等式

$$u_0 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{u_0}{\|u_0\|}, \quad u_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{u_1}{\|u_1\|},$$

$$\frac{\|Au_1\|^2}{\|u_1\|^2} = \frac{\|Au_0\|^2}{\|u_0\|^2} = a^2 = \frac{1}{1-v^2}$$

が成立つ。更に任意の $x \in H$ に対し

$$\|Ax\|^2 = \|x\|^2 + \frac{v^2}{1-v^2} \left(\frac{u_0}{\|u_1\|} \middle| x \right)^2 = \|x\|^2 + \frac{v^2}{1-v^2} \left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \middle| x \right)^2$$

が成立つ。

(証明)（１）の一意性のみ示すべき事として残っている。$a' \in \mathbb{R}, u_0', u_1' \in H,\ A' \in GL(H)$ が存在し任意の $(t,x) \in \mathbb{R} \times H$ に対し

$$(at + (u_0|x), tu_1 + Ax) = (a't + (u_0'|x), tu_1' + A'x)$$

であったとする。$(t,x) = (1,0)$ を代入し $a = a', u_1 = u_1'$ を得る。任意の $x \in H$ に対し $(t,x) = (0,x)$ として考える事に拠り $u_0 = u_1', A = A'$ を得る。

註（定理１の解釈)　ミンコフスキ時空のローレンツ変換から二つの特別なベクトル $u_0 = \alpha(L_{12})$ と $u_1 = L_{21}(1)$ が定義される。この二つのベクトルが生成する部分空間が一次元であると仮定すると u_1 の長さは u_0 の長さと等しく固有の速さ v が定まりローレンツ因子 $1/\sqrt{1-v^2}$ が得られる。この一次元部分空間 $\mathrm{Span}(u_0) = \mathrm{Span}(u_1)$ は A の固有空間であり、その直交補空間は A の不変部分空間を成し、$A|(\mathrm{Span}(u_0)^\perp)$ は $(\mathrm{Span}(u_0))^\perp$ 上のユニタリ作用素となる。

３．座標変換としてのローレンツ変換

この節では基準ベクトル空間 V が有限次元の場合、光円錐を不変に保つ相対速度一定の座標変換としてのローレンツ変換を導出しよう。$\mathrm{dim}V = n+1, n \geq 1$ とし V の二つの基底を $\mathscr{E} = (e_i; 0 \leq i \leq n), \mathscr{E}' = (e_i'; 0 \leq i \leq n)$ とする。$\mathscr{E}$ から $\mathscr{E}'$ への基底変換に伴う $(n+1)$ 次正則行列 $\mathbb{P} = (p_{ij})$ が $(e_0', \cdots, e_n') = (e_0, \cdots, e_0)\mathbb{P}$ 即ち $0 \leq i \leq n$ なる i に対し

$$e_i' = \sum_{j=0}^{n} p_{ji} e_j$$

となる様に一意的に定まる。このとき一つの点 $\xi \in V$ に対し

$$\xi = \sum_{j=0}^{n} x_j e_j = \sum_{j=0}^{n} x_j' e_j'$$

なる二つの座標表示の間に次の関係式が成立つ：

$$\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbb{P}\begin{bmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}, \quad x_i = \sum_{j=0}^{n} p_{ij} x'_j, \quad 0 \le i \le n$$

但し $t = x_0, t' = x'_0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

とする。以降 $\mathbb{R}^n$ 及び $\mathbb{R}^{1+n}$ の元は縦ベクトル表示する。

座標系 $\mathscr{E}'$ が $\mathscr{E}$ に対して速度 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ で動いているとは、アフィン空間 X の一点 $O \in X$ を固定し、時空を原点 O のベクトル空間 V として基底を $\mathscr{E} = (e_i; 0 \le i \le n)$ と設定した枠組に於いて $\mathscr{E}'$ の空間原点 $\mathbf{x}' = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ が時刻 t で $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ で与えられる事であるから、同じ事象を表す等式

$$t'e'_0 + \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = te_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

に就いて $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ 及び $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ とした等式

$$t'e'_0 = te_0 + t\sum_{j=1}^{n} v_j e_j = t(e_0 + \sum_{j=1}^{n} v_j e_j)$$

が成立つ事と同値である。そこで $\mathscr{E}'$ **が** $\mathscr{E}$ **に対して速度** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ **で動く**とは

$$e'_0 \in \mathrm{Span}(e_0 + \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j)$$

である事と**定義する**。これは或る $t_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し

$$\mathbb{P}\mathbf{e}_0 = t_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = t_0\mathbf{e}_0 + t_0\sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j$$

が成立つ事と同値である。ここに $\mathbf{e}_j$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準単位ベクトル即ち

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする。以降 $\mathscr{E}'$ は $\mathscr{E}$ に対して速度 $\mathbf{v}$ で動いているものとし基底変換に伴う行列 $\mathbb{P}$ を $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ と表す事にする：

$$\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \begin{bmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t_0 \\ t_0\mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。以降 $\mathbb{P}_{\mathbf{v}} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に関する連続性と

$$\mathbb{P}_{\mathbf{0}} = \mathbb{I}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}$$

を仮定する。$\mathscr{E}'$ が $\mathscr{E}$ に対して速度 $\mathbf{v}$ で動く時 $\mathscr{E}$ は $\mathscr{E}'$ に対して速度 $-\mathbf{v}$ で動くと考えるのは自然であるが、これも仮定の一つに過ぎないので**速度の相対性**として定式化して置こう。即ち $\mathscr{E}$ に対して速度 $\mathbf{v}$ で動く系 $\mathscr{E}'$ が速度の相対性を満たすとは二つの条件

$$e_0 \in \mathrm{Span}(e'_0 - \sum_{j=1}^n v_j e'_j)$$

及び

$$\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = \mathbb{I}_{n+1}$$

が成り立つ事と定義する。この時或る $t'_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し

$$\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbf{e}_0 = t'_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} = t'_0\mathbf{e}_0 - t'_0\sum_{j=1}^n v_j\mathbf{e}_j$$

が成立ち、等式

$$\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = (\mathbb{P}_{\mathbf{v}})^{-1}$$

$$\det(\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}) \cdot \det(\mathbb{P}_{\mathbf{v}}) = 1$$

が成立つ。速度の相対性を同一座標系で記述するには、空間反転

$$P = \begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = P\mathbb{P}_{\mathbf{v}}P \ (\Leftrightarrow P\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}}P)$$

と定式化するのが相応しい。そこでこの等式が成立つとき**速度の相対性が空間反転と両立する**と定義する。このとき

$$\det(\mathbb{P}_{\mathbf{v}}) = \det(\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}) = 1$$

が成立つ。

座標空間 $\mathbb{R}^{1+n}$ に於いて光円錐 light cone を

$$\Gamma = \{ \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1+n}; \mathbf{x}^2 = t^2 \}$$

と定義する。ここに $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j^2$ とする。このとき相対速度 $\mathbf{v}$ を持つ座標変換に関する**光速度の不変性**を座標変換 $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ に対する光円錐 Γ の不変性：

$$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\Gamma = \Gamma$$

と定義する。これは

$$\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\Gamma = \Gamma$$

としても同値である。そこで速度 $\mathbf{v}$ の相対性を満たし空間反転と両立し光速度の不変性を保存する基底変換 $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ を具体的に求める事が問題となる。その解答は次で与えられる。

定理２ (ローレンツ座標変換に伴う変換行列の特徴付け)
ミンコフスキ時空 $(X, g\circ\varphi)$ の基準ベクトル空間 V が $(n+1)$ 次元であるとする。V の二つの基底を $\mathscr{E} = (e_i; 0\le i\le n)$, $\mathscr{E}' = (e'_i; 0\le i\le n)$ とし $\mathscr{E}'$ は $\mathscr{E}$ に対して速度 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ で動くものとする。$\mathscr{E}$ から $\mathscr{E}'$ への基底変換に伴う $(n+1)$ 次正則行列を $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ で表す。写像 $\mathbb{R}^n\ni\mathbf{v}\mapsto\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\in M(n+1;\mathbb{R})$ はユークリッド構造から定まる位相で連続とし $\mathbb{P}_{\mathbf{0}} = \mathbb{I}_{n+1}$ であるとする。このとき基底変換 $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ に対し次は同値である：

(1)　基底変換の速度は相対的であり空間反転と両立し光円錐を不変に保つ：

(速度の相対性)　$\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = \mathbb{I}_{n+1}$

(空間反転との両立性)　$P\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}}P$

(光速度不変性)　$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\Gamma = \Gamma$

(2)　$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} < 1$ であり $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}$ は次で与えられる：

$$\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma\,{}^t\mathbf{v} \\ \hline \gamma\mathbf{v} & \mathbb{I}_n + \frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{v}\otimes{}^t\mathbf{v}\end{array}\right]$$

ここに

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\ v = |\mathbf{v}| = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2},$$

$$\mathbb{I}_n + \frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{v}\otimes{}^t\mathbf{v} = (\delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_iv_j; 1\le i,j\le n)$$

とする。

座標成分の変換則は

$$\begin{bmatrix} t' \\ \mathbf{x}'\end{bmatrix} = \mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x}\end{bmatrix},\ \mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\,{}^t\mathbf{v} \\ \hline -\gamma\mathbf{v} & \mathbb{I}_n + \frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{v}\otimes{}^t\mathbf{v}\end{array}\right]$$

$$t' = \gamma(t-\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t-\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} - \gamma t)\mathbf{v} = \mathbf{x}_\perp + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\mathbf{x}_{||} - t\mathbf{v})$$

で与えられる。ここに

$$\mathbf{x}_{||} = \frac{1}{v^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\mathbf{v},\ \mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{||}$$

とする。

(1)⇒(2) の証明　定理は $\mathbf{v}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ の場合は自明なので以下では $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ の場合を考える。

第 1 段　($n=1$ **の場合への帰着)**

与えられた $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ に対して $R_0\in O(n)$ が存在して $R_0\mathbf{v}=v\mathbf{e}_1$ を満たす。そこで $R=1\otimes R_0$ と置くと $R\in O(n+1)$ であり

$$R\mathbf{e}_0=\mathbf{e}_0,\ R\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{v}\end{bmatrix}=v\mathbf{e}_1$$

を満たす。このとき二次元部分空間 $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1)$ が $R\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR$ で不変である事：

$$R\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR(\mathrm{Span}(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1))=\mathrm{Span}(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1)$$

を示そう。（これにより問題は時空 2 次元 $(n=1)$ の場合に帰着される。）

先ず $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{e}=t_0\mathbf{e}_0+t_0\mathbf{v}$ より $R\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_0=t_0\mathbf{e}_0+t_0v\mathbf{e}$ が従うので両辺に $(R\mathbb{P}_{\mathbf{v}})^{-1}=\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR$ を施し $\mathbf{e}_0=\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR(t_0\mathbf{e}_0+t_0v\mathbf{e})$ を得る。
次に $\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbf{e}_0=t_0'\mathbf{e}_0-t_0'\mathbf{v}$ より $\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR\mathbf{e}_0=\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbf{e}_0=t_0'\mathbf{e}_0-t_0'\mathbf{v}={}^tR(t_0'\mathbf{e}_0-t_0'v\mathbf{e}_1)$ を得る。
このとき任意の $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR(\lambda\mathbf{e}_0+\mu\mathbf{e}_1)=\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR((\lambda-\frac{\mu}{v})\mathbf{e}_0+\frac{\mu}{t_0v}(t_0\mathbf{e}_0+t_0v\mathbf{e}_1))\\
&=(\lambda-\frac{\mu}{v})\mathbb{P}_{-v}{}^tR\mathbf{e}_0+\frac{\mu}{t_0v}\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR(t_0\mathbf{e}_0+t_0v\mathbf{e}_1)\\
&=(\lambda-\frac{\mu}{v}){}^tR(t_0'\mathbf{e}_0-t_0'v\mathbf{e}_1)+\frac{\mu}{t_0v}\mathbf{e}_0\\
&={}^tR((-\frac{\mu}{tv_0}+(\lambda-\frac{\mu}{v})t_0')\mathbf{e}_0-(\lambda-\frac{\mu}{v})t_0'v\mathbf{e}_1)
\end{aligned}$$

が成立つ。これが示すべき事であった。

第 2 段　($n \geq 2$ の場合)

第 1 段により $R\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR$ は

$$R\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}{}^tR\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\mu}{t_0v}+(\lambda-\frac{\mu}{v})t_0'\\ -(\lambda-\frac{\mu}{v})t_0'\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|ccc} t_0' & \frac{1}{t_0v}-\frac{t_0'}{v} & & 0 & \\ -t_0'v & t_0' & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

なる形を取っている事が分かる。また $R=1\otimes R_0$ を構成する R_0 は $\mathbb{R}^n$ に於いて、ユークリッド的な長さを不変に保つので ${}^tR\Gamma=\Gamma$ である。そこで

$$\begin{bmatrix}t'\\ x_1'\\ x_2'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|ccc} a & b & & 0 & \\ -av & a & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}t\\ x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

の形の行列により Γ が不変となる様な $a,b\in\mathbb{R}$ を求めよう。Γ の元 $\begin{bmatrix}t\\ \mathbf{x}\end{bmatrix}$ を任意に取る。このとき $\mathbf{x}^2=t^2$ により、等式

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}')^2-(t')^2&=(-avt+ax_1)^2+\sum_{j=2}^n x_j^2-(at+bx_1)^2\\ &=(a^2-b^2)x_1^2-2a(av+b)x_1t+a^2(v^2-1)t^2+\sum_{j=2}^n x_j^2\\ &=(a^2-b^2-1)x_1^2-2a(av+b)x_1t+(a^2(v^2-1)+1)t^2\end{aligned}$$

を得る。$n\geq 2$ の場合は t と x_1 を独立変数と見做せるので上の式が恒等的に零となる必要充分条件は

(1) $a^2-b^2=1$

(2) $av+b=0$

(3) $a^2(1-v^2)=1$

の三つの条件が全て成立つ事である。(3) より $0\leq v^2<1$ であり $a=\pm1/\sqrt{1-v^2}$ となるが $v=0$ で $a=1$ となる事から $a=1/\sqrt{1-v^2}$ が従う。(2) より $b=-v/\sqrt{1-v^2}$ を得る。この a と b は (1) を満たすので

$$\begin{bmatrix}a & b\\ -av & a\end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix}1 & -v\\ -v & 1\end{bmatrix}$$

が求めるものである。

第３段　($n=1$ の場合)

ここでは $\mathbf{v}$ を $v\in\mathbb{R},\mathbf{x}$ を $x\in\mathbb{R}$ と表し P_{-v} を

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = P_{-v}\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix},\quad P_{-v} = \begin{bmatrix} a & b \\ -av & a \end{bmatrix}$$

の形で求める事にする。$\det P_{-v}=1$ 故 $a(a+bv)=1$ が従う。a と b の v 依存性を表す為に $a(v),b(v)$ なる記号を用いる。$(P_{-v})^{-1}=P_v$ 故

$$\begin{bmatrix} a(v) & -b(v) \\ a(v)v & a(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(-v) & b(-v) \\ a(-v)v & a(-v) \end{bmatrix}$$

が成立つ。これより a は v の偶函数で b は v の奇函数である事が従う。Γ の元 $\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$ を任意に取る。$x=\pm t, x'=\pm t'$ であるから 4 つの場合に分けて考える。

$x=t,\ x'=t'$ **の場合**

$t'=at+bx=(a+b)t,\ x'=-avt+ax=(1-v)at$ を $x'=t'$ に代入すると $a(1-v)t=(a+b)t$ を得る。t は任意なので $a(1-v)=(a+b)$ となり、これより $b=va$ を得る。従って $1=a(a+bv)=a^2(1-v^2)$ より $0\le v^2<1$ であり $a=1/\sqrt{1-v^2}, b=-v/\sqrt{1-v^2}$ を得る。

$x=t,\ x'=-t'$ **の場合**

$x'=-t'$ より $a(1-v)=-(a+b)$ を得る。これより $b=-(2-v)a$ となり $1=a(a+bv)=a^2(1-(2v-v^2))=a^2(1-v)^2$ より $a=\frac{1}{1-v}$ を得るが、右辺は v の偶函数ではないので矛盾となる。従って、この場合は起こらない。

$x=-t,\ x'=t'$ **の場合**

$t'=at+bx=(a-b)t,\ x'=-avt+ax=-(1+v)at$ を $x'=t'$ に代入し $-(1+v)a=(a-b)$ を得る。これより $b=(2+v)$ となり $1=a(a+bv)=a^2(1+(2v+v^2))=a^2(1+v)^2$ より $a=\frac{1}{1+v}$ を得るが、右辺は v の偶函数ではないので矛盾となる。従って、この場合は起こらない。

$x=-t,\ x'=-t'$ **の場合**

$x'=-t'$ より $-(1+v)a=-(a-b)$ を得る。これより $b=-va$ となり $1=a(a+bv)=a^2(1-v^2)$ より $0\le v^2$ であり $a=1/\sqrt{1-v^2},\ b=-v/\sqrt{1-v^2}$ を得る。

以上より $n=1$ の場合も $n\ge 2$ の場合と同様な結果となる事が分かった。

第 4 段　(一般の場合)

第 2 段と第 3 段により $R\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\,{}^tR$ は

$$R\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\,{}^tR = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma & -\gamma v & 0 \\ -\gamma v & \gamma & \\ \hline & & \\ 0 & & \mathbb{I}_{n-1} \\ & & \end{array}\right]$$

と表される事が分かった。簡単の為に $\mathbf{y} = R\mathbf{x},\ \mathbf{y}' = R\mathbf{x}'$ と表すと、これは

$$t' = \gamma(t - vy_1),\ y_1' = \gamma(y_1 - vt),\ y_j' = y_j(2 \le j \le n)$$

である事と同値である。さて

$$y_1 = \mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1 = R\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}\cdot{}^tR\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}\cdot(\frac{1}{v}\mathbf{v})$$

であるから

$$t' = \gamma(t - vy_1) = \gamma(t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{x})$$

が従う。一方 $y_1' = \gamma(y_1 - vt)$ は

$$\mathbf{y}'\cdot\mathbf{e}_1 = \gamma(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1 - vt)$$

と書き換えられ

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= {}^tR\mathbf{y}' = {}^tR\left(\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{y}'\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j\right) = {}^tR((\mathbf{y}'\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n}(\mathbf{y}'\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j) \\
&= {}^tR(\gamma(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1 - vt)\mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^{n}(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j) \\
&= {}^tR(\gamma(\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1 - vt)\mathbf{e}_1 + \mathbf{y} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1) \\
&= {}^tR(((\gamma-1)\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1 - \gamma vt)\mathbf{e}_1 + \mathbf{y}) \\
&= ((\gamma-1)\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1 - \gamma vt)\frac{1}{v}\mathbf{v} + \mathbf{x} \\
&= ((\gamma-1)R\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1 - \gamma vt)\frac{1}{v}\boldsymbol{v} + \mathbf{x} \\
&= ((\gamma-1)\mathbf{x}\cdot{}^tR\mathbf{e}_1 - \gamma vt)\frac{1}{v}\boldsymbol{v} + \mathbf{x} \\
&= (\frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{v} - \gamma t)\boldsymbol{v} + \mathbf{x}
\end{aligned}$$

が従う。

$(2) \Rightarrow (1)$ **の証明**

先ず $\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = (p_{ij}; 0 \le i, j \le n)$, $\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = (q_{ij}; 0 \le i, j \le n)$ として $\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = (r_{ij}; 0 \le i, j \le n)$ としたとき $r_{ij} = \delta_{ij}$ である事を示そう。$1 \le i, j \le n$ として

$$
\begin{aligned}
r_{00} &= \sum_{k=0}^{n} q_{0k}p_{k0} = q_{00}p_{00} + \sum_{k=1}^{n} q_{0k}p_{k0} \\
&= \gamma^2 \sum_{k=1}^{n}(-\gamma v_k)(\gamma v_k) = \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2(1-v^2) = 1, \\
r_{i0} &= \sum_{k=0}^{n} q_{ik}p_{k0} = q_{i0}p_{00} + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}p_{k0} \\
&= (-\gamma v_i)\gamma + \sum_{k=1}^{n}(\delta_{ik} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i v_k)(\gamma v_k) \\
&= -\gamma^2 v_i + \gamma v_i + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i\gamma v^2 = [-\gamma^2 + \gamma + (\gamma-1)\gamma]v_i = 0, \\
r_{0j} &= \sum_{k=0}^{n} q_{0k}p_{kj} = q_{00}p_{0j} + \sum_{k=1}^{n} q_{0k}p_{kj} = \gamma(\gamma v_j) + \sum_{k=1}^{n}(-\gamma v_k)(\delta_{kj} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_k v_j) \\
&= \gamma^2 v_j - \gamma v_j - \frac{\gamma(\gamma-1)}{v^2}v^2 v_j = [\gamma^2 - \gamma - \gamma(\gamma-1)]v_j = 0, \\
r_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} q_{ik}p_{kj} = q_{i0}p_{0j} + \sum_{k=1}^{n} q_{ik}p_{kj} \\
&= (-\gamma v_i)(\gamma v_j) + \sum_{k=1}^{n}(\delta_{ik} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i v_k)(\delta_{kj} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_k v_j) \\
&= -\gamma^2 v_i v_j + \sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}(\delta_{kj} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_k v_j) + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i \sum_{k=1}^{n} v_k(\delta_{kj} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_k v_j) \\
&= -\gamma^2 v_i v_j + \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i v_j + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i(v_j + \frac{\gamma-1}{v^2}\sum_{k=1}^{n} v_k^2 v_j) \\
&= -\gamma^2 v_i v_j + \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i v_j + \frac{\gamma-1}{v^2}v_i v_j(1 + (\gamma-1)) \\
&= \delta_{ij} + (-\gamma^2 + \frac{\gamma-1}{v^2} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{v^2})v_i v_j = \delta_{ij} + (-\gamma^2 + \frac{\gamma^2-1}{v^2})v_i v_j = \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

が従う。ここに $\frac{\gamma-1}{v^2} = \frac{1}{v^2}(\frac{1}{1-v^2} - 1) = \frac{1}{1-v^2} = \gamma^2$ を用いた。以上より $\mathbb{P}_{-\mathbf{v}}\mathbb{P}_{\mathbf{v}} = \mathbb{I}_{n+1}$ が示された。

次に $P = (\delta_{ij}; 0 \le i,\ j \le n)$, $g_{00} = 1$, $g_{ij} = -1(1 \le i \le n)$, $g_{ij} = 0(i \ne j)$ として

$P\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = (s_{ij}; 0 \le i,j \le n)$ と $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}P = (t_{ij}; 0 \le i,j \le n)$ の各成分が一致する事を示そう。

$$\begin{aligned}
s_{00} &= \sum_{k=0}^{n} g_{0k}q_{k0} = g_{00}q_{00} = q_{00} = \gamma \\
r_{00} &= \sum_{k=0}^{n} p_{0k}g_{k0} = p_{00}g_{00} = p_{00} = \gamma \\
s_{i0} &= \sum_{k=0}^{n} g_{ik}q_{k0} = g_{ii}q_{i0} = -q_{i0} = \gamma v_i \\
r_{i0} &= \sum_{k=0}^{n} p_{ik}q_{k0} = p_{i0}g_{00} = p_{i0} = \gamma v_i \\
s_{0j} &= \sum_{k=0}^{n} g_{0k}q_{kj} = g_{00}q_{0j} = q_{0j} = -\gamma v_j \\
r_{0j} &= \sum_{k=0}^{n} p_{0k}g_{kj} = p_{0j}g_{jj} = -p_{0j} = -\gamma v_j \\
s_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} g_{ik}q_{kj} = g_{ii}q_{ij} = -q_{ij} = -\delta_{ij} - \frac{\gamma - 1}{v^2}v_i v_j \\
r_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} p_{ik}q_{kj} = p_{ij}q_{jj} = -p_{ij} = -\delta_{ij} - \frac{\gamma - 1}{v^2}v_i v_j
\end{aligned}$$

以上より $P\mathbb{P}_{-\mathbf{v}} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}}P$ が示された。

最後に $\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\Gamma = \Gamma$ を示そう。$\mathbb{P}_{\mathbf{v}}\Gamma \subset \Gamma$ を示せば充分である。$\begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \Gamma$ を任意に取り $\begin{bmatrix} s \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbb{P}_{\mathbf{v}} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$ と置く。このとき

$$\begin{aligned}
s &= \gamma t + \gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x} \\
\mathbf{y} &= \gamma t \boldsymbol{v} + \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^2 - s^2 &= (\gamma t\boldsymbol{v} + \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{v})^2 - (\gamma t + \gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})^2 \\
&= \gamma^2 t^2 v^2 + \mathbf{x}^2 + \frac{(\gamma - 1)^2}{v^4}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})^2 v^2 \\
&\quad + 2\gamma t v \cdot \mathbf{x} + 2\frac{\gamma - 1}{v^2}(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})^2 + 2\frac{\gamma(\gamma - 1)}{v^2}t(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})v^2 \\
&\quad - \gamma^2 t^2 + 2\gamma^2 t\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x} + \gamma^2(\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})^2) \\
&= \gamma^2(v^2 - 1)t^2 + \mathbf{x}^2 + \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{v^2} + 2\frac{\gamma - 1^2}{v^2} - \gamma^2\right](\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x})^2 \\
&\quad + 2\gamma t[1 + (\gamma - 1) - \gamma]\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{x} \\
&= -t^2 + \mathbf{x}^2 = 0
\end{aligned}$$

が従う。ここに $\gamma^2(v^2-1)=-1,\ (\gamma-1)^2+2(\gamma-1)=\gamma^2-1=v^2\gamma^2$ を用いた。

参考文献： 新井朝雄、物理現象の数学的諸原理、共立出版
太田浩一、マクスウェル理論の基礎、東京大学出版会
小澤徹、ガリレイ時空、http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/g.pdf
加藤晃史、特殊相対論と時空の幾何学、数理科学 **612**(2014), 9-15