モースの補題

平成 26 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

多様体のモース理論や振動積分の停留位相の方法に於いて重要なモースの補題は有限次元空間ばかりでなく無限次元空間に於いても定式化される事が知られている。ここでは実ヒルベルト空間上のモースの補題に就いて纏めて置こう。

定理（モースの補題）　H を内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間とし H の開集合 U 上定義された C^{k+2} 級 $(k \geq 1)$ の実数値函数を f とする。$x_0 \in U$ は f の非退化臨界点であるとする。即ち $f'(x_0) = 0 \in H' \equiv B(H;\mathbb{R})$ 且つ $f'' : H \ni \xi \mapsto f''(x_0)(\xi,\cdot) \in H'$ は線型同相であるとする。この時 H の開集合 V と C^k 級同相写像 $\varphi : V \to \varphi(V)$ と有界可逆対称作用素 $A \in B(H) = B(H;H)$ が存在し次を満たす：

(i) $x_0 \in V \subset U,\ 0 = \varphi(x_0) \in \varphi(V)$

(ii) 任意の $x \in V$ に対し等式

$$f(x) - f(x_0) = (A\varphi(x)|\varphi(x))$$

が成立つ。

（証明） $r > 0$ を取り $B(x_0;r) = \{x \in H; \|x - x_0\| < r\} \subset U$ とする。任意の $x \in B(x_0;r)$ に対し

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 f'(\theta x + (1-\theta)x_0)d\theta(x - x_0)$$
$$= \int_0^1 \Big(-\frac{d}{d\theta}\big((1-\theta)f'(\theta x + (1-\theta)x_0)\big) + (1-\theta)f''(\theta x + (1-\theta)x_0)(x - x_0)\Big)d\theta(x - x_0)$$
$$= \int_0^1 (1-\theta)f''(\theta x + (1-\theta)x_0)d\theta(x - x_0, x - x_0) = g(x)(x - x_0, x - x_0)$$

と表しておく。ここに $g(x)$ は

$$g(x) = \int_0^1 (1-\theta)f''((1-\theta)x + \theta x_0)d\theta \in B_{\mathrm{sym}}(H \times H;\mathbb{R})$$

即ち H 上の有界対称双線型形式と見做す。このとき任意の $\xi \in H$ に対し $g(x)(\xi,\cdot) : H \ni \eta \longmapsto g(x)(\xi,\eta) \in \mathbb{R}$ は有界線型汎函数となり、リース対応 $\iota \in B(H';H)$ により $A(x,\xi) = \iota \circ g(x)(\xi,\cdot)$ と定めると、等式 $\big(A(x,\xi)\big|\eta\big) = g(x)(\xi,\eta)$ が任意の $(\xi,\eta) \in H \times H$ に対して成り立つ。このとき $A(x,\cdot) : H \ni \xi \longmapsto A(x,\xi) \in H$ は有界線型作用素となる。こ

れを改めて $A(x)$ と表せば、$g(x)$ の対称性より $A(x)$ は有界対称作用素となる。更に等式 $\frac{1}{2}f''(x_0)(\xi,\eta) = g(x_0)(\xi,\eta) = \big(A(x_0)\xi\big|\eta\big)$ が任意の $(\xi,\eta) \in H \times H$ に対して成り立つので、非退化性の仮定より $A(x_0) : H \ni \xi \longmapsto \iota \circ g(x_0)(\xi,\cdot) = \iota \circ \frac{1}{2}f''(x_0)(\xi,\cdot) \in H$ は線型同相、特に可逆となる。$f'' \in C\big(U; B(H\times H;\mathbb{R})\big)$ より $A : B(x_0;r) \ni x \longmapsto A(x) \in B(H)$ は連続であり、可逆作用素全体は $B(H)$ の開集合であるから、$0 < r' < r$ なる r' が存在し任意の $x \in B(x_0;r')$ に対し $A(x)$ は可逆となる。$x \in B(x_0;r')$ に対し $B(x) = A(x_0)^{-1}A(x) \in B(H)$ と置く。$0 < \varepsilon < 1$ なる ε を任意に取る。$B(x_0) = I$ より $0 < \delta < r'$ なる δ が存在し任意の $x \in B(x_0;\delta)$ に対し $\|I - B(x)\| < \varepsilon$ とする事が出来る。さて $n \geq 1$ に対し

$$C_n(x) = I - \sum_{j=1}^{n} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}(I - B(x))^j$$

を考える。但し $0!! = (-1)!! = 1$ とする。$m > n$ に対し

$$\|C_m(x) - C_n(x)\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\varepsilon^j \leq \sum_{j=n+1}^{m} \varepsilon^j \longrightarrow 0$$

$(m > n \to \infty)$ であるから $\{C_n(x)\} \subset B(H)$ は収束極限 $C(x) \in B(H)$ を持つ。さて $0 \leq t < 1$ なる t に対し

$$\begin{aligned}
1 - t = (\sqrt{1-t})^2 &= \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n\right)^2 \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\sum_{\substack{j+k=l \\ j+k\geq 1}} \frac{(2j-3)!!\,(2k-3)!!}{(2j)!!\,(2k)!!}\right)t^l
\end{aligned}$$

であるから任意の $n \geq 2$ に対し

$$2 \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} = \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k\geq 1}} \frac{(2j-3)!!\,(2k-3)!!}{(2j)!!\,(2k)!!}$$

が成立する。これより

$$\begin{aligned}
C_n^2(x) - B(x) &= \left(I - \sum_{l=1}^{n} \frac{(2l-3)!!}{(2l)!!}(I - B(x))^l\right)^2 - B(x) \\
&= I - (I - B(x)) - 2\sum_{l=1}^{n} \frac{(2l-3)!!}{(2l)!!}(I - B(x))^l \\
&\quad + \sum_{l=2}^{2n}\left(\sum_{\substack{j+k=l \\ 1\leq j,k\leq n}} \frac{(2j-3)!!\,(2k-3)!!}{(2j)!!\,(2k)!!}\right)(I - B(x))^l - B(x) \\
&= \sum_{l=n+1}^{2n}\left(\sum_{\substack{j+k=l \\ 1\leq j,k\leq n}} \frac{(2j-3)!!\,(2k-3)!!}{(2j)!!\,(2k)!!}\right)(I - B(x))^l
\end{aligned}$$

を得る。故に

$$\|C_n^2(x) - B(x)\| \le \sum_{l=n+1}^{2n} \left(\sum_{\substack{j+k=l \\ 1\le j,k\le n}} \frac{(2j-3)!!\,(2k-3)!!}{(2j)!!\,(2k)!!} \right) \|I - B(x)\|^l$$
$$\le 2\sum_{l=n+1}^{2n} \frac{(2l-3)!!}{(2l)!!}\varepsilon^l \le \frac{1}{n+1}\sum_{l=n+1}^{\infty} \varepsilon^l \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

が従う。これより

$$C(x) = I - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(I - B(x))^n = (I - (I - B(x)))^{1/2} = B(x)^{1/2}$$

なる関係を得る。さて $B(x) = A(x_0)^{-1}A(x)$ より ${}^tB(x) = {}^tA(x){}^tA(x_0)^{-1} = A(x)A(x_0)^{-1}$, ${}^tB(x)A(x_0) = A(x) = A(x_0)B(x)$ が従う。故に

$$\begin{aligned} {}^tC_n(x)A(x_0) &= \left(I - \sum_{j=1}^{n} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}(I - {}^tB(x))^j \right) A(x_0) \\ &= A(x_0)\left(I - \sum_{j=1}^{n} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}(I - B(x))^j \right) = A(x_0)C_n(x) \end{aligned}$$

の $B(H)$ に於ける極限として ${}^tC(x)A(x_0) = A(x_0)C(x)$ が成り立つ。これより

$${}^tC(x)A(x_0)C(x) = A(x_0)C(x)C(x) = A(x_0)B(x) = A(x)$$

が得られる。 そこで $\varphi(x) = C(x)(x - x_0)$, $x \in B(x_0\,;\delta)$, $A = A(x_0)$ と置くと

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= g(x)(x - x_0,\, x - x_0\,) \\ &= (\, A(x)(x - x_0) \mid x - x_0\,) \\ &= (\, {}^tC(x)A(x_0)C(x)(x - x_0) \mid x - x_0\,) \\ &= (\, A(x_0)C(x)(x - x_0) \mid C(x)(x - x_0)) \\ &= (\, A(x_0)\varphi(x) \mid \varphi(x)\,) \end{aligned}$$

が得られる。 さて $\varphi'(x_0) = C(x_0) = B(x_0)^{1/2} = I$ より, φ は x_0 の或る開近傍で C^k 級同相を与える。

系　(モースの補題)　H を内積 $(\cdot \mid \cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間とし H の開集合 U 上定義された C^{k+2} 級 $(k \ge 1)$ の実数値函数を f とする。$x_0 \in U$ は f の非退化臨界点であるとする。この時 $0 \in H$ の開近傍 W と C^k 級同相写像 $\psi : W \to \psi(W)$ 更に H の直交分解 $H = M \oplus M^{\perp}$ が存在し、次を満たす：

(i) $x_0 = \psi(0) \in \psi(W) \subset U$

(ii) 任意の $x \in W$ に対し等式

$$f(\psi(x)) - f(\psi(0)) = \|Px\|^2 - \|Qx\|^2$$

が成立つ。ここに $P : H \to M$ 及び $Q : H \to M^\perp$ は直交分解 $H = M \oplus M^\perp$ に付随する直交射影とする。

（証明） C^k 級同相写像 $\varphi : V \to \varphi(V)$ の逆写像 $\varphi^{-1} : \varphi(V) \to V$ とすると任意の $x \in \varphi(V)$ に対し等式

$$f(\varphi^{-1}(x)) - f(\varphi^{-1}(0)) = (Ax|x)$$

が成立つ。有界自己共軛作用素 A に対して $\mathbb{R}$ のボレル集合族 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上で一意的に定まるスペクトル測度を $E : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to B(H)$ と表し H の閉部分空間 M を

$$M = \mathrm{Ran}\ E((0,\infty)) = E((0,\infty))H$$

で定める。A は有界な逆を持つから $0 \in \rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ であり $\varepsilon > 0$ が存在し $E((-\varepsilon,\varepsilon)) = 0$ となる。任意に $y \in M^\perp$ を取る。任意の $x \in H$ に対し

$$(y|E((0,\infty))x) = 0$$

が成立つ。この時

$$\begin{aligned} \|y - E((-\infty,0))y\|^2 = &\ \|E((0,\infty))y\|^2 \\ = &\ (y|E((0,\infty))^2y) = (y|E((0,\infty)y)) = 0 \end{aligned}$$

より $y = E((-\infty,0))y \in \mathrm{Ran}\ E((-\infty,0))$ を得る。一方、任意の $x, y \in H$ に対し

$$\begin{aligned} (E((-\infty,0))x|E((0,\infty))y) = &\ (E((0,\infty))E((-\infty,0))x|y) \\ = &\ (E((0,\infty)\cap(-\infty,0))x|y) = 0 \end{aligned}$$

より $E((-\infty,0))x \in (\mathrm{Ran}\ E((0,\infty)))^\perp = M^\perp$ を得る。故に $M^\perp = \mathrm{Ran}\ E((-\infty,0))$ が成立つ。これより直交分解 $H = M \oplus M^\perp$ 及び付随する直交射影 $P = E((0,\infty)) : H \to M$ 及び $Q = E((-\infty,0)) : H \to M^\perp$ を得る。M 及び $M^\perp$ は A-不変、即ち $A(M) \subset M$ 及び $A(M^\perp) \subset M^\perp$ が成立つ。A の M への制限 $A|M : M \to M$ は

$$(AE((0,\infty))x|E((0,\infty))x) = \int_\varepsilon^{||A||} \lambda\ d\|E(\lambda)x\|^2 \geq 0$$

より正定符号であり A の $M^\perp$ への制限 $A|M^\perp : M^\perp \to M^\perp$ は

$$(AE((-\infty,0))x|E((-\infty,0))x) = \int_{-||A||}^{-\varepsilon} \lambda d\|E(\lambda)x\|^2 \leq 0$$

より負定符号となる。更に $A|M$ 及び $-A|M^\perp$ は正定符号可逆有界作用素であり、夫々の平方根 $(A|M)^{1/2}: M \to M$ 及び $(-A|M^\perp)^{1/2}: M^\perp \to M^\perp$ も可逆となる。従って

$$B = (A|M)^{-1/2}P + (-A|M^\perp)^{-1/2}Q$$

は H 上の可逆有界作用素となり、その逆は $B^{-1} = (A|M)^{1/2}P + (-A|M^\perp)^{1/2}Q$ で与えられる。さて $\psi = \varphi^{-1} \circ B : W \equiv B^{-1}(\varphi(V)) \to V$ と置くと $0 \in W$ で ψ は C^k 級同相となり任意の $x \in W$ に対して等式

$$\begin{aligned}
f(\psi(x)) - f(\psi(0)) &= f(\varphi^{-1}(Bx)) - f(\varphi^{-1}(0)) \\
&= (ABx|Bx) \\
&= (APBx|PBx) + (AQBx|QBx) \\
&= ((A|M)^{1/2}PBx|PBx) - ((-A|M^\perp)^{1/2}QBx|(-A|M^\perp)^{1/2}QBx) \\
&= (Px|Px) - (Qx|Qx) \\
&= ||Px||^2 - ||Qx||^2
\end{aligned}$$

が従う。

参考文献：

S. Lang, "Differential Manifolds," Addison-Wesley, 1972.
S. Lang, "Real and Functional Analysis," Springer, 1983.