ニュートン力学の基礎的枠組

平成 23 年 6 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

　ガリレイ時空に於けるニュートン力学の基礎的枠組について考える。以下に現れる函数や写像は充分滑らかであるとする。

1. ガリレイ時空：時間と空間の分離

実ベクトル空間 W を基準ベクトルとするアフィン空間 Y が**ガリレイ時空**であるとは、零でない線型形式 $T : W \to \mathbb{R}$ が存在し、W の部分空間 Ker T 自身がノルム空間である事と定義する。Y の点を事象と謂い T を時間間隔と謂う。事象 $p \in Y$ に対し同時事象の全体を Y_p と表す：

$$\begin{aligned} Y_p &= \{q \in Y; q - p \in \mathrm{Ker}\ T\} \\ &= \{q \in Y; T(q-p) = 0\} \end{aligned}$$

ノルム空間 Ker T を V と表しそのノルムを $\|\cdot\|$ と表そう。事象 $p \in Y$ に対する同時事象の空間 Y_p に於いて

$$d_p(q, r) = \|q - r\|, \quad q, r \in Y_p$$

と置くと写像 $d_p : Y_p \times Y_p \to \mathbb{R}$ が定まる。Y_p は $V = \mathrm{Ker}\ T$ を基準ベクトル空間とする Y の部分アフィン空間であり d_p は Y_p の平行移動に関して不変な距離である。$v_0 \in W \setminus \mathrm{Ker}\ T$ なる元を取ると $T(v_0) \neq 0$ かつ $v_0 \neq 0$ である。写像

$$\varphi : \mathbb{R} \times V \ni (t, v) \mapsto v + tv_0 \in W$$

は積ベクトル空間 $\mathbb{R} \times V$ からベクトル空間 W への線型写像であり $w \in W$ に対し

$$\psi(w) = \left(\frac{T(w)}{T(v_0)},\ w - \frac{T(w)}{T(v_0)} v_0 \right)$$

と置いて得られる写像

$$\psi : W \to \mathbb{R} \times V$$

は線型で $\varphi \circ \psi = id_W, \psi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}\times V}$ を満たす。従って $\psi : W \to \mathbb{R} \times V$ は線型同型である。W の任意の元 w は

$$w = \frac{T(w)}{T(v_0)} v_0 + \left(w - \frac{T(w)}{T(v_0)} v_0 \right)$$

の様に、線型形式としての時間間隔 T によって、時間 $T(w)/T(v_0)$ と空間 $w - (T(w)/T(v_0))v_0$ とに分解される。この分解は v_0 の取り方にのみ依存し、一意的である。線型同型写像 $\psi : W \to \mathbb{R} \times V$ を $v_0 \in W \setminus V$ に伴う**時空表示**、W の一意的直和分解

$$W = \mathrm{Span} v_0 \oplus V$$

を基準ベクトル空間 W の $v_0 \in W \setminus V$ も伴う**時空分解**と謂う。以下 $p \in Y$ 及び $v_0 \in W \setminus V$ を一つ固定し、一次元ベクトル空間 $\mathrm{Span} v_0$ を基準ベクトル空間に持つ Y の部分アフィン空間 $p + \mathrm{Span} v_0$ を**時間軸** time axis と呼ぶ事にしよう。また、V を基準ベクトルとする Y の部分アフィン空間 $V_p = p + V$ を**配置空間** configuration space と呼び X を表す事にしよう。以上によりガリレイ時空 Y は時間軸と配位空間との積アフィン空間とアフィン同型となる。

2. 相空間

実ノルム空間 V を基準ベクトル空間とするアフィン空間 X を配位空間と位置付けられるのであれば、その接バンドル $TX = X \times V$ は**相空間** phase space と呼ぶの相応しい。配位空間の点 $x \in X$ に対し x に於ける接空間 $T_xX = \{(x, v); v \in X\}$ には、和とスカラー倍が

$$
\begin{aligned}
&(x,u) + (x,v) = (x, u+v), \quad (x,u),(x,v) \in T_xX \\
&\lambda(x,u) = (x, \lambda u), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, (x,u) \in T_xX
\end{aligned}
$$

で定まり T_xX は実ベクトル空間を成す。接バンドル $TX = \bigcup_{x \in X} T_xX = X \times V$ から X への射影 $\pi : TX \to X$ が $\pi(x,v) = x$ で定まる。$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし $\xi : I \to TX$ を時間変数 $t \in I$ に依る相空間内の運動を表すものとし $\xi(t) = (x(t), v(t)) \in X \times V$ と置く。X はアフィン空間であるから $x'(t) = \lim_{h \to 0} h^{-1}(x(t+h) - x(t))$ は V の元であり $\xi'(t) = (x'(t), v'(t))$ は $V \times V$ の元となる。定義より、配位空間内の運動は I から X への写像として $x = \pi \circ \xi$ で記述される。写像 $\pi : TX \to X$ の接写像 $T\pi : TTX \to TX$ が $(T\pi)((x,u),(v,w)) = (\pi(x,u), (\pi'(x,u))(v,w))$ で定義される。

ここに TTX は X の二重接バンドル即ち TX の接バンドルであり $TTX = (TX) \times (V \times V) = (X \times V) \times (V \times V)$ と表示される。また π の (x,u) での微分 $\pi'(x,u)$ は基準ベクトル空間を $V \times V$ とするアフィン空間 TX に於いて定義されるものとする。$(x,u) \in X \times V, (v,w) \in V \times V$ に対し

$$
\begin{tikzcd}
 & TX = X \times V \arrow[d, "\pi"] \\
I \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "\pi \circ \xi"'] & X
\end{tikzcd}
$$

$$\pi((x,u) + (v,w)) - \pi(x,u) = \pi((x+v, u+w)) - \pi(x,u) = (x+v) - x = v$$

となるから $(\pi'(x,u))(v,w) = v$ となり

$$(T\pi)((x,u),(v,w)) = (x,v)$$

が従う。TTX から TX 及び $V \times V$ への射影を夫々 $\tilde{\pi}$ 及び $p = (p_1, p_2)$ と表す事にする。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}((x,u),(v,w)) &= (x,u) \\
p((x,u),(v,w)) &= (v,w) \\
p_1((x,u),(v,w)) &= v \\
p_2((x,u),(v,w)) &= w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & TTX = TX \times (V \times V) \arrow[dl, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dr, "p = (p_1, p_2)"] & \\
TX & & V \times V
\end{tikzcd}
$$

以上より

$$T\pi = (\pi \circ \tilde{\pi}, p_1) : TTX \to TX$$

が成立つ。

$$\begin{tikzcd} TTX \arrow[r, "T\pi"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & TX \arrow[d, "\pi"] \\ TX \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

3. 二階のベクトル場

以降 V はバナッハ空間であるとしバナッハ空間に於ける微分積分法は自由に用いる。f を TX 上のベクトル場とする。即ち f は TX から TTX への写像で $\tilde{\pi} \circ f = id$ を満たすものとする。このとき次が成立つ。

$$\begin{tikzcd} & TTX \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ TX \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "id"'] & TX \end{tikzcd}$$

定理　TX 上のベクトル場 f に対し次は同値である：

(1) $T\pi \circ f = id$

(2) $p \circ f : TX \to V \times V$ の任意の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は

$$\xi = (\pi \circ \xi, (\pi \circ \xi)') : I \to X \times V = TX$$

を満たす。

(3) 任意の $(x, v) \in TX$ に対し次の等式が成立つ。

$$(p \circ f)(x, v) = (v, (p_2 \circ f)(x, v)) \in V \times V$$

(4) $p \circ f : TX \to V \times V$ の任意の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は $t \in I$ に対し $\xi(t) = (x(t), v(t))$ と表したとき次の等式を満たす：

$$\xi'(t) = (x'(t), v'(t)) = (v(t), (p_2 \circ f)(x(t), v(t)))$$

定義　上の (1)-(4) を満たす TX 上のベクトル場を**二階のベクトル場**と謂う。

(証明)　(1) $\Rightarrow$ (2)：$p \circ f$ の積分曲線 $\xi : I \to TX$ に対し

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (T\pi \circ f)(\xi(t)) = T\pi(f(\xi(t))) \\ &= (\pi((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t))), \pi'((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t)))(p \circ f)(\xi(t))) \\ &= (\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))(p \circ f)(\xi(t))) \\ &= (\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))\xi'(t)) \\ &= ((\pi \circ \xi)(t), (\pi \circ \xi)'(t)) \end{aligned}$$

となるから (2) が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1)：任意に $(x, v) \in TX$ を取る。$0 \in I$ なる区間 $I \subset \mathbb{R}$ 及び $\xi : I \to TX$ が存在して

$$\begin{cases} \xi'(t) = & (p \circ f)(\xi(t)),\ t \in I \\ \xi(0) = & (x, v) \end{cases}$$

を満たす。このとき

$$
\begin{aligned}
(T\pi \circ f)(\xi(t)) &= (\pi((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t))), \pi'((\tilde{\pi} \circ f)(\xi(t))))(p \circ f)(\xi(t))) \\
&= (\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))(p \circ f)(\xi(t))) \\
&= (\pi(\xi(t)), \pi'(\xi(t))\xi'(t)) \\
&= ((\pi \circ \xi)(t), (\pi \circ \xi)'(t))
\end{aligned}
$$

であり (2) の仮定より最右辺は $\xi(t)$ に等しい。$t = 0$ とすると (1) が従う。

(1) $\Rightarrow$ (3) : 任意の $(x, v) \in TX$ に対し

$$
\begin{aligned}
&(T\pi \circ f)(x, v) = T\pi(f(x, v)) \\
&= ((\pi \circ \tilde{\pi})(f(x, v)), p_1(f(x, v))) \\
&= (\pi((\tilde{\pi} \circ f)(x, v)), p_1(f(x, v))) \\
&= (x, (p_1 \circ f)(x, v))
\end{aligned}
$$

が成立つから

$$T\pi \circ f = id \Leftrightarrow v = (p_1 \circ f)(x, v)$$

(3) $\Rightarrow$ (4) : $p \circ f$ の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は $t \in I$ に対し

$$
\begin{aligned}
(x'(t), v'(t)) = \xi'(t) &= (p \circ f)(\xi(t)) \\
&= (v(t), (p_2 \circ f)(\xi(t))) \\
&= (v(t), (p_2 \circ f)(x(t), v(t)))
\end{aligned}
$$

を満たすので (4) が従う。

(4) $\Rightarrow$ (3) : 任意の $(x, v) \in X$ に対し $0 \in I$ なる区間 $I \subset I$ 及び $\xi : I \to TX$ が存在して

$$
\begin{cases}
\xi'(t) = (p \circ f)(\xi(t)), \ t \in I \\
\xi(0) = (x, v)
\end{cases}
$$

を満たす。このとき (4) により

$$(p \circ f)(\xi(t)) = \xi'(t) = (v(t), (p_2 \circ f)(\xi(t)))$$

が従う。$t = 0$ として (3) を得る。

4. ニュートン力学の基礎的枠組

ガリレイ時空を時間軸と配位空間の積アフィン空間に分解する。配位空間 X は実バナッハ空間 V を基準ベクトル空間とするアフィン空間とする。質点は固有の質量 $m > 0$ を持ち、その位置は配位空間の点で表される。質点の運動は、時間軸の基準ベクトル空間である $\mathbb{R}$ の区間 I で定義された写像 $x : I \ni t \mapsto x(t) \in X$ で記述される。その速度は $v : I \ni t \mapsto x'(t) \in V$ で記述される。質点の**状態**は相空間 TX で $I \ni t \mapsto (x(t), x'(t)) \in TX$ により記述される。**力の場**とは相空間 TX 上の二階のベクトル場 $f : TX \to TTX$ であると定義する。力の場 $f : TX \to TTX$ が与えられたとき $p \circ f : TX \to V \times V$ の任意の積分曲線 $\xi : I \to TX$ は $t \in I$ に対し $\xi(t) = (x(t), v(t)) \in TX$ と表したとき $V \times V$ に於いて

$$\xi'(t) = (x'(t),\ v'(t)) \tag{1}$$
$$= (v(t),\ (p_2 \circ f)(x(t), v(t))) \tag{2}$$

を満たす。特に V に於いて

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ x''(t) = v'(t) = (p_2 \circ f)(x(t), v(t)) \end{cases}$$

を満たす。この方程式は単位質量を持つ質点の運動を支配するものと理解される。質量 m を持つ質点は時刻 t での状態 $(x(t), x'(t)) \in TX$ に於いて力の場 f の影響により、加速度 $\frac{1}{m}(p_2 \circ f)(x(t), x'(t))$ を持つと云うのがニュートンの運動の第 2 法則である。即ち質量 m を持つ質点の状態 $(x(t), x'(t))$ はニュートンの運動方程式

$$mx''(t) = F(x(t), x'(t))$$

に従って記述される。ここに $F = p_2 \circ f$ である。単位質量に対する質量比 m は、力の作用・反作用の法則を通じて運動学的に決定される。即ち、作用・反作用の法則に従って力を及ぼし合っている二つの質点の加速度の大きさの逆比が質量比を与える。

参考文献：

V. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, 1978
S. Lang, Differentiable Manifolds, Addison-Wesley, 1972
新井朝雄, 物理現象の数学的諸原理 - 現代数理物理学入門-，共立出版
新井朝雄, 物理の中の対称性，日本評論社
小澤徹, アフィン空間, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/a.pdf
小澤徹, ガリレイ時空, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/g.pdf
小澤徹, ベクトル空間の力学的解釈, http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/vector.pdf