常微分方程式の初期値問題の大域解の存在

平成 25 年 5 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

バナッハ空間に於ける常微分方程式の初期値問題の大域解の存在定理に就いて纏めて置こう。X をバナッハ空間とし U を X の空でない開集合とする。$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし $I \times U$ 上定義された写像 $f : I \times U \to X$ を相速度ベクトル場 vector field of phase velocity とする相点の運動方程式 equation of phase motion

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を初期時刻 $t_0 \in I$ に於いて与えられたデータ $u_0 \in U$ の下で考える。

１．リプシッツ連続相速度ベクトル場の場合

この節では連続写像 $f : I \times X \to X$ が **リプシッツ条件** を満たす場合、即ち $L > 0$ が存在し任意の $(t, u), (t, v) \in I \times X$ に対し不等式

$$(L) \qquad \|f(t, u) - f(t, v)\| \le L\|u - v\|$$

が成立つ場合を考える。

定理１（リプシッツ連続相速度ベクトル場の下での大域解の存在と一意性）
連続写像 $f : I \times X \to X$ はリプシッツ条件を満たすものとし $t_0 \in I$ 及び $u_0 \in X$ を与える。このとき $u \in C^1(I; X)$ が一意的に存在し初期条件 $u(t_0) = u_0$ 及び方程式

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を任意の $t \in I$ に対し満たす。また t_0 を含む I の任意の有界閉区間 J に対し u は評価

$$\|u(t) - u_0\| \le \frac{M}{L}\left(e^{L|t - t_0|} - 1\right)$$

を任意の $t \in J$ で満たす。ここに

$$M = M(J) = \sup\{\|f(t, u_0)\|; t \in J\}$$

とする。

（証明）　開区間 I に対し有界閉区間の増大列 $\{J_n\}$ で $I = \bigcup_{n \ge 1} J_n$ となるものを取る

(例えば $J_n = \{t \in I; |t| \le n, \mathrm{dist}(t, \mathbb{R} \setminus I) \ge 1/n\}$)。以下では $t_0 \in J_n$ なる J_n の一つを任意に取り J として固定し $T = \sup\{|t - t_0|; t \in J\}$ と置く。区間 J 上で定理を示せば充分である。

第 1 段　任意の $\varepsilon > 0$ 及び $u \in C(J; X)$ に対し

$$|||u|||_\varepsilon = \sup\{e^{-(1+\varepsilon)L|t-t_0|}\|u(t)\|; t \in J\}$$

と置く。このとき $|||\cdot|||_\varepsilon$ は $C(J; X)$ 上のノルムとなり $C(J; X)$ にノルム $|||\cdot|||_\varepsilon$ を与えたノルム空間 $\mathscr{X}$ は完備となる。$C(J; X)$ の部分集合

$$\mathscr{F} = \{u \in C(J; X); \text{任意の } t \in J \text{ に対し } \|u(t) - u_0\| \le \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)\}$$

は $\mathscr{X}$ の閉集合である。

(証明)　$\mathscr{X}$ の完備性は一様ノルムとの同値性

$$|||u|||_\varepsilon \le \sup_{t \in J} ||u(t)|| \le \exp((1+\varepsilon)LT)|||u|||_\varepsilon$$

より従う。次に $\mathscr{F}$ は $\mathscr{X}$ の閉集合である事を示そう。$\overline{\mathscr{F}} \subset \mathscr{F}$ を示せば良い。任意の $u \in \overline{\mathscr{F}}$ に対し $\{u_n\} \subset \mathscr{F}$ が存在し $|||u_n - u|||_\varepsilon \to 0$ となる。このとき任意の $t \in J$ に対し

$$\begin{aligned} ||u(t) - u_0|| &\le ||u(t) - u_n(t)|| + ||u_n(t) - u_0|| \\ &\le \exp((1+\varepsilon)LT)|||u_n - u|||_\varepsilon + \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \end{aligned}$$

であるから $n \to \infty$ とすれば $u \in \mathscr{F}$ である事が分かる。

第 2 段　$u \in \mathscr{F}$ に対し $\Phi(u) : J \to X$ を

$$(\Phi(u))(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt', \quad t \in J$$

と定めると $\Phi(u) \in \mathscr{F}$ となる。即ち $\Phi : u \longmapsto \Phi(u)$ は $\mathscr{F}$ からそれ自身への写像となる。

(証明)　$u \in \mathscr{F}$ に対し $J \ni t \mapsto f(t, u(t)) \in X$ は連続であるから $\Phi(u) \in C(J; X)$ となる。また

$$\begin{aligned} ||f(t', u(t'))|| &\le \|f(t', u_0)|| + ||f(t', u(t') - u_0)|| \\ &\le M + L||u(t') - u_0|| \\ &\le M + M\left(e^{L|t'-t_0|} - 1\right) = Me^{L|t'-t_0|} \end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
||(\Phi(u))(t)-u_0|| &\leq M\left|\int_{t_0}^{t} e^{L|t'-t_0|}dt'\right| \\
&= \frac{M}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right)
\end{aligned}
$$

を得るので $\Phi(u)\in\mathscr{F}$ が従う。

第 3 段　$\Phi:\mathscr{F}\ni u\mapsto\Phi(u)\in\mathscr{F}$ は $\mathscr{X}$ に於ける距離 $d(u,v)=|||u-v|||_\varepsilon$ に関し縮小写像となる。Φ の不動点 $u\in\mathscr{F}$ は初期値問題

$$
\begin{cases}
u'(t)=f(t,u(t)), & t\in J \\
u(t_0)=u_0
\end{cases}
$$

の $C^1(J;X)$ に属す解である。

（証明）　$u,v\in\mathscr{F}, t\in J$ に対し等式

$$
(\Phi(u))(t)-(\Phi(v))(t)=\int_{t_0}^{t}(f(t',u(t'))-f(t',v(t')))dt'
$$

が成立つのでリプシッツ条件及びノルム $|||\cdot|||_\varepsilon$ の定義を用いると

$$
\begin{aligned}
\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t}\|f(t',u(t'))-f(t',v(t'))\|dt'\right| \\
&\leq L\left|\int_{t_0}^{t}\|u(t')-v(t')\|dt'\right| \\
&\leq L\left|\int_{t_0}^{t}e^{(1+\varepsilon)Lt'-t_0}|||u-v|||_\varepsilon dt'\right| \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon}(e^{(1+\varepsilon)L|t-t_0|}-1)|||u-v|||_\varepsilon
\end{aligned}
$$

を得る。これより

$$
|||\Phi(u)-\Phi(v)|||_\varepsilon\leq\frac{1}{1+\varepsilon}|||u-v|||_\varepsilon
$$

が従い Φ は縮小写像となる。故に Φ は $\mathscr{F}$ 内に不動点 u を持つ。
Φ の不動点 u は $u\in\mathscr{F}\subset C(J;X)$ であり積分方程式

$$
u(t)=u_0+\int_{t_0}^{t}f(t',u(t'))dt',\ t\in J
$$

を満たす。一点 $t\in\mathrm{Int}J$ を取り $t+h\in\mathrm{Int}J$ なる任意の $h\neq 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-f(t,u(t)) &= \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}f(t',u(t'))dt'-f(t,u(t)) \\
&= \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}(f(t',u(t'))-f(t,u(t)))dt'
\end{aligned}
$$

と変形すると

$$\begin{aligned}\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-f(t,u(t))\| &\leq \sup_{|t'-t|\leq|h|}\|f(t',u(t'))-f(t,u(t))\| \\ &\to 0\ (h\to 0)\end{aligned}$$

を得るので u は $\mathrm{Int}J$ 上微分可能であり

$$u'(t)=f(t,u(t)),\ t\in(t_0,t_0+T)$$

を満たす。右辺は J 上連続なので $u\in C^1(J;X)$ となる。

第４段　一意性を証明しよう。$v\in C^1(J;X)$ は $v(t_0)=u_0, v'(t)=f(t,v(t)),\ t\in J$ を満たしているものとすると t に就いて両辺を積分する事により

$$v(t)=u_0+\int_{t_0}^{t}f(t',v(t'))dt'$$

を得る。このとき

$$\|u(t)-v(t)\|\leq L\left|\int_{t_0}^{t}\|u(t')-v(t')\|dt'\right|$$

となりグロンウォールの補題より $u=v$ を得る。

２．局所リプシッツ連続相速度ベクトル場の場合

$I\subset\mathbb{R}$ を開区間とし U をバナッハ空間 X の開集合とする。写像 $f:I\times U\to X$ が**局所リプシッツ条件**を満たすとは任意の $(t_0,u_0)\in I\times U$ に対し $r,L>0$ が存在し $[t_0-r,\ t_0+r]\times\overline{B(u_0;r)}\subset I\times U$ 且つ

$$(L)_{\mathrm{loc}}\qquad ||f(t,u)-f(t,v)||\leq L||u-v||$$

が任意の $(t,u),(t,v)\in[t_0-r,t_0+r]\times\overline{B(u_0;r)}$ に対して成立つ事と定義する。

定理２（局所リプシッツ連続相速度ベクトル場の下での極大解の存在と一意性）
連続写像 $f:I\times U\to X$ は局所リプシッツ条件を満たすものとする。$t_0\in I$ 及び $u_0\in U$ を与える。このとき開区間 $(T_-,T_+)\subset I$ 及び $u\in C^1((T_-,T_+);X)$ が存在し $u((T_-,T_+))\subset U,\ u(t_0)=u_0$ 及び微分方程式

$$u'(t)=f(t,u(t))$$

を任意の $t\in(T_-,T_+)$ に対し満たす。この様な u は唯一つである。更に次が成立つ。

(1)　$T_+<\sup I$ ならば $K\subset U$ なる任意のコンパクト集合 K 及び任意の $\varepsilon>0$ に対し $t\in(T_+-\varepsilon,T_+)$ が存在し $u(t)\notin K$ となる。

(2) $T_- > \inf I$ ならば $K \subset U$ なる任意のコンパクト集合 K 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_-, T_- + \varepsilon)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる。

系 定理で与えられる $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ を極大解とする。コンパクト集合 $K_+ \subset U$ 及び $\varepsilon_+ > 0$ が存在し $u((T_+ - \varepsilon_+, T_+)) \subset K_+$ となっているとすれば $T_+ = \sup I$ である。コンパクト集合 $K_- \subset U$ 及び $\varepsilon_- > 0$ が存在し $u((T_-, T_- + \varepsilon_-)) \subset K_-$ となっているとすれば $T_- = \inf I$ である。

上の局所リプシッツ条件を強めた狭義局所リプシッツ条件を導入しよう。$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし $U \subset X$ を開集合とする。写像 $f : I \times U \to X$ が**狭義局所リプシッツ条件**を満たすとは I の任意の有界閉区間 J 及び U の任意の有界閉集合 K に対し $L > 0$ が存在し

$$(L)'_{\mathrm{loc}} \qquad ||f(t,u) - f(t,v)|| \leq L||u - v||$$

が任意の $(t,u), (t,v) \in J \times K$ に対して成立つことと定義する。

定理３（狭義局所リプシッツ連続相速度ベクトル場の下での極大解の存在と一意性） 連続写像 $f : I \times U \to X$ は狭義局所リプシッツ条件を満たすものとする。$t_0 \in I$ 及び $u_0 \in U$ を与える。このとき開区間 $(T_-, T_+) \subset I$ 及び $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ が存在し $u((T_-, T_+)) \subset U,\ u(t_0) = u_0$ 及び微分方程式

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

を任意の $t \in (T_-, T_+)$ に対し満たす。この様な u は唯一つである。更に次が成立つ。

(1) $T_+ < \sup I$ ならば $K \subset U$ なる任意の有界閉集合 K 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_+ - \varepsilon, T_+)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる。

(2) $T_- > \inf I$ ならば $K \subset U$ なる任意の有界閉集合 K 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t \in (T_-, T_- + \varepsilon)$ が存在し $u(t) \notin K$ となる。

系 定理で与えられる $u \in C^1((T_-, T_+); X)$ を極大解とする。有界閉集合 $K_+ \subset U$ 及び $\varepsilon_+ > 0$ が存在し $u((T_+ - \varepsilon_+, T_+)) \subset K_+$ となっているとすれば $T_+ = \sup I$ である。有界閉集合 $K_- \subset U$ 及び $\varepsilon_- > 0$ が存在し $u((T_-, T_- + \varepsilon_-)) \subset K_-$ となっているとすれば $T_- = \inf I$ である。

（定理２の証明）　以下では初期時刻 t_0 に対し区間 $[t_0,\infty)\cap I$ で考える。区間 $(-\infty,t_0]\cap I$ についての議論も同様である。$(t_0,u_0)\in I\times U$ に対し $r_0>0$ が存在し $D_0\equiv[t_0,r_0]\times\overline{B(u_0;r_0)}\subset I\times U$ 且つ f は D_0 上リプシッツ定数 L_0 を持つ。このとき任意の $(t,u)\in D_0$ に対し

$$\begin{aligned}\|f(t,u)\| &\le \|f(t,u)-f(t,u_0)\|+\|f(t,u_0)\|\\ &\le L_0\|u-u_0\|+\|f(t,u_0)\|\\ &\le L_0r_0+\sup\{\|f(t,u_0)\|;t\in[t_0,r_0]\}\end{aligned}$$

より

$$M_0=\sup\{||f(t,u)||;(t,u)\in D_0\}$$

は有限値を取る。$M_0>0$ として良い。$T_0=\min(r_0,r_0/M_0)$ とすれば局所解の存在定理により $u\in C^1([t_0,t_0+T_0];X)$ が唯一つ存在して $u([t_0,t_0+T_0])\subset U$ 及び

$$u(t)=u_0+\int_{t_0}^{t}f(t',u(t'))dt',\ t\in[t_0,t_0+T_0]$$

が成立する。次に $t_1=t_0+T_0$ 及び $u_1=u(t_1)$ と置く。$(t_1,u_1)\in I\times U$ に対し $r_1>0$ が存在し $D_1\equiv[t_1,r_1]\times\overline{B(u_1;r_1)}\subset I\times U$ 且つ f は D_1 上リプシッツ定数 L_1 を持つ。このとき

$$M_1=\sup\{\|f(t,u)\|;(t,u)\in D_1\}$$

は有限値を取る。$M_1>0$ として良い。$T_1=\min(r_1,r_1/M_1)$ とすれば局所解の存在定理により $u\in C^1([t_1,t_1+T_1];X)$ が唯一つ存在して $u([t_1,t_1+T_1])\subset U$ 及び

$$u(t)=u_1+\int_{t_1}^{t}f(t',u(t'))dt',\quad t\in[t_1,t_1+T_1]$$

が成立する。u_1 は $[t_0,t_0+T_0]$ 上の解 u により

$$u_1=u(t_1)=u_0+\int_{t_0}^{t_1}f(t',u(t'))dt'$$

と表わされるので u を $[t_0,t_1+T_1]$ 上に延長する事により $u\in C^1([t_0,t_1+T_1];X)$ が得られ $u([t_0,t_1+T_1])\subset U$ 及び

$$u(t)=u_0+\int_{t_0}^{t}f(t',u(t'))dt',\quad t\in[t_0,t_1+T_1]$$

が成立する。

以下同様にして狭義増加列 $\{t_n;n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$ と正の実数列 $\{r_n;n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$, $\{M_n;n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$, $\{T_n;n\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$ 及び任意の $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $u\in C^1([t_0,t_n+T_n];X)$ が存在し $u_n=u(t_n)$, $D_n\equiv[t_n,t_n+r_n]\times\overline{B(u_n;r_n)}\subset I\times U$ となり f は D_n 上リプシッツ定数 L_n を持ち

$$M_n=\sup\{\|f(t,u)\|;(t,u)\in D_n\},$$

$$T_n=\min(r_n,r_n/M_n),\ u([t_0,t_n+T_n])\subset U,$$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt',\ t \in [t_0, T_n + T_n]$$

が成立つ。

そこで $T_+ = t_0 + \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ と置くと $u \in C^1([t_0, T_+); X),\ u([t_0, T_+)) \subset U,$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt',\ t \in [t_0, T_+)$$

が成立つ。このとき次の二つの内の何れか一つが成立つ。

(i) $\quad T_+ = \sup I$

(ii) $\quad T_+ < \sup I$

(ii) の場合に (1) を示そう。コンパクト集合 K_0 及び $\varepsilon_0 > 0$ が存在し任意の $t \in (T_+ - \varepsilon_0, T_+)$ に対し $u(t) \in K_0$ であるとする。$T_+ < \infty$ であるから $\{T_n\}$ は 0 に収束し単調増加列 $\{t_n\}$ は T_+ に収束する。$\{u(t_n)\} \subset K_0$ で K_0 は点列コンパクトであるから $v_0 \in K$ 及び部分列 $\{u(t_{n_j}); j \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ が存在し $u(t_{n_j}) \to v_0 (j \to \infty)$ となる。$0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0/2$ なる ε_1 が存在して $J \equiv [T_+ - \varepsilon_1, T_+ + \varepsilon_1] \subset I$ となる。$J \times K$ は $I \times U$ のコンパクト部分集合であるから

$$M \equiv \sup\{\|f(t, u)\|; (t, u) \in J \times K\}$$

は有限である。任意の $t, s \in (T_+ - \varepsilon_1, T_+)$ に対し

$$\|u(t) - u(s)\| = \|\int_{s}^{t} f(t', u(t'))dt'\| \le M|t - s|$$

となるから $s = t_{n_j}$ と置き $j \to \infty$ とすると

$$\|u(t) - v_0\| \le M|t - T_+|$$

が成立つ。これより $u(t) \to v_0 (t \uparrow T_+)$ が従う。

さて $(T_+, v_0) \in I \times U$ であるから $r' > 0$ が存在して $D' \equiv [T_+, T_+ + r'] \times \overline{B(v_0; r')} \subset I \times U$ 且つ f は D' 上リプシッツ定数 L' を持つ。このとき

$$M' \equiv \sup\{\|f(t, u)\|; (t, u) \in D'\}$$

は有限である。$M' > 0$ として良い。$T' = \min(r', r'/M')$ とすれば局所解の存在定理により $u \in C^1([T_+, T_+ + T']; X)$ が唯一つ存在して $u([T_+, T_+ + T']) \subset U$ 及び

$$u(t) = v_0 + \int_{T_+}^{t} f(t', u(t'))dt',\quad t \in [T_+, T_+ + T']$$

が成立する。従って $[t_0, T_+)$ 上で定義された極大解は $[t_0, T_+ + T']$ に延長される事になる。これは矛盾である。

（定理３の証明）：　前半は定理２の証明と全く同じである。後半の (ii) の場合に (1) を示せば充分である。有界閉集合 K_0 及び $\varepsilon_0 > 0$ が存在し任意の $t \in (T_+ - \varepsilon_0, T_+)$ に対し $u(t) \in K_0$ であるとする。$T_+ < \infty$ であるから $\{T_n\}$ は 0 に収束し単調増加列 $\{t_n\}$ は T_+ に収束する。$0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0/2$ なる ε_1 が存在して $J \equiv [T_+ - \varepsilon_1, T_+ + \varepsilon_1] \subset I$ となる。狭義局所リプシッツ条件より f は $J \times K_0$ 上リプシッツ定数 L' を持つ。任意の $(t, u) \in J \times K_0$ に対し

$$\begin{aligned}\|f(t,u)\| &\le \|f(t,u) - f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\| + \|f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\| \\ &\le L'\|u - u(T_+ - \varepsilon_1)\| + \|f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\| \\ &\le 2L' \sup\{\|u\|; u \in K\} + \sup\{\|f(t, u(T_+ - \varepsilon_1))\|; t \in J\}\end{aligned}$$

より

$$M' = \sup\{\|f(t,u)\|; (t,u) \in J \times K_0\}$$

は有限である。任意の $t, s \in (T_+ - \varepsilon_1, T_+)$ に対し

$$\|u(t) - u(s)\| = \|\int_s^t f(t', u(t'))dt'\| \le M'|t - s|$$

となるから $t = t_m,\ s = t_n,\ m > n \to \infty$ とすれば

$$\|u_m - u_n\| \le M'|t_m - t_n| \to 0$$

となる。完備性より $v_0 \in K_0$ が存在し $u_n \to v_0 (n \to \infty)$ となる。上の不等式で $s = t_n$ とし $n \to \infty$ とすれば

$$\|u(t) - v_0\| \le M|t - T_+|$$

が従う。これより定理２の証明と同じ議論で矛盾を得る。

参考文献：

大谷光春，理工基礎　常微分方程式論，サイエンス社
白石謙一，力学系の理論，岩波書店
白石謙一，常微分方程式論序説，サイエンス社
小澤徹，常微分方程式の初期値問題の局所解の存在
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/201010.pdf