# ポワソンの和公式

平成 20 年 6 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ポワソンの和公式はフーリエ級数とフーリエ変換との関係を与えるものとして重要である。これは少し一般化して考えると、局所コンパクト可換群 $G$ とその閉部分群 $H$ に対し、商群 $G/H$ の双対群 $(G/H)^\wedge$ 上のゲルファント変換と $G$ 上のゲルファント変換との関係を与えているものと捉える事が出来る。ポワソンの和公式は、ゼータ函数やテータ函数の性質を調べる時にも用いられる。ここではポワソンの和公式の導出に就いて考えよう。標準的な導出法は $e_{2\pi\nu}(x) = \exp(2\pi i\nu \cdot x),\ x \in \mathbb{R}^n$ で定まる正規直交系 $\{e_{2\pi\nu}; \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ がヒルベルト空間 $L^2([0,1)^n; \mathbb{C})$ で完全である事に基づく方法であろう。先ず正規直交系の完全性に就いて纏めて置こう。

**命題 1**　ヒルベルト空間 $H \equiv L^2([0,1)^n; \mathbb{C})$ の正規直交系 $\{e_{2\pi\nu}; \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ に就いて次は同値である。

(1) $\{e_{2\pi\nu}; \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ の生成する部分空間は $H$ で稠密である。

(2) 任意の $u \in H$ に対し $\displaystyle\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left( \int_{[0,1)^n} u e_{-2\pi\nu} dx \right) e_{2\pi\nu}$ は $H$ で収束し $u$ に等しい：

$$u = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left( \int_{[0,1)^n} u e_{-2\pi\nu} dx \right) e_{2\pi\nu}$$

(3) 任意の $u \in H$ に対し

$$\int_{[0,1)^n} |u|^2 dx = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left| \int_{[0,1)^n} u e_{-2\pi\nu} dx \right|^2$$

(4) 任意の $u, v \in H$ に対し

$$\int_{[0,1)^n} u\bar{v} dx = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \int_{[0,1)^n} u e_{-2\pi\nu} dx \overline{\int_{[0,1)^n} v e_{-2\pi\nu} dx}$$

(5) $u \in H$ に対し

$$\int_{[0,1)^n} u e_{-2\pi\nu} dx = 0\ \forall\nu \in \mathbb{Z}^n \ \Leftrightarrow\ u = 0$$

(7) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\nu) = (2\pi)^{n/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(2\pi\nu)$$

(8) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\nu) e_\nu = (2\pi)^{n/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_{2\pi\nu}\varphi$$

証明は標準的なので省略する。命題１の同値な条件 (1)-(5) が成立するとき正規直交系 $\{e_{2\pi\nu}; \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ は $L^2([0,1)^n; \mathbb{C})$ で完全であると謂う。

**命題２**　次は同値である。

(1) 正規直交系 $\{e_{2\pi\nu}; \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ は $L^2([0,1)^n; \mathbb{C})$ で完全である。

(2) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_\nu\varphi = (2\pi)^{n/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(2\pi\nu) e_{2\pi\nu}$$

(3) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\nu) = (2\pi)^{n/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(2\pi\nu)$$

(4) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\nu) e_{-\nu} = (2\pi)^{n/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_{2\pi\nu}\hat{\varphi}$$

(5) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し　$\mathscr{F}\mathscr{F}\varphi = \varphi^\vee$

(6) 任意の $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_\nu\hat{\varphi} = (2\pi)^{n/2} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(2\pi\nu) e_{-2\pi\nu}$$

**(証明)(1) ⇒ (2)：** $u = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_\nu\varphi = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \tau_{-\nu}\varphi$ と置くと、$u$ は周期的で局所有界故 $\mathbb{R}^n$ 上有界である。特に $u|[0,1)^n \in L^2([0,1)^n)$ となり (1) より $u$ は命題１の (2) の様に展開される。このとき次の式から (2) が従う。

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)^n} u e^{-2\pi\nu} dx &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{[0,1)^n} \varphi(x+m)\exp(-2\pi i\nu\cdot x)dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{m+[0,1)^n} \varphi(y)\exp(-2\pi i\nu\cdot(y-m))dy \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{m+[0,1)^n} \varphi(y)\exp(-2\pi i\nu\cdot y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\exp(-2\pi i\nu\cdot y)dy = \hat{\varphi}(2\pi\nu)
\end{aligned}$$

**(2) $\Rightarrow$ (3) :** (3) は (2) の原点 $x=0$ での等式である。

**(3) $\Rightarrow$ (4) :** $\varphi \in \mathscr{S}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ を任意に取り固定する。$\psi = e_{-x}\varphi$, 即ち $\psi(y) = \exp(-iy\cdot x)\varphi(y),\ y \in \mathbb{R}^n$ と置き $\psi$ に対し (3) を適用すると

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(e_{-x}\varphi)(\nu) = (2\pi)^{n/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(e_{-x}\varphi)\hat{}\,(2\pi\nu)$$

となる。$(e_{-x}\varphi)(\nu) = \exp(-i\nu\cdot x)\varphi(\nu) = (\varphi(\nu)e_{-\nu})(x)$ 及び $(e_{-x}\varphi)\hat{}\,(2\pi\nu) = (\tau_{-x}\hat{\varphi})(2\pi\nu) = \hat{\varphi}(2\pi\nu + x) = (\tau_{-2\pi\nu}\hat{\varphi})(x)$ により

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\nu)e_{-\nu} = (2\pi)^{n/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\tau_{-2\pi\nu}\hat{\varphi} = (2\pi)^{n/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\tau_{2\pi\nu}\hat{\varphi}$$

を得る。

**(4) $\Rightarrow$ (5) :** (4) の両辺を $[0,2\pi]^n$ 上積分すると、左辺より

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\nu)\exp(-i\nu\cdot x)dx &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\nu)\int_{[0,2\pi]^n}\exp(-i\nu\cdot x)dx \\ &= (2\pi)^n\varphi(0)\end{aligned}$$

右辺より

$$\begin{aligned}&\int_{[0,2\pi]^n}(2\pi)^{n/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(x-2\pi\nu)dx = (2\pi)^{n/2}\int_{[0,2\pi]^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(2\pi\nu+x)dx \\ &= (2\pi)^{n/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\int_{[0,2\pi]^n}\hat{\varphi}(2\pi\nu+x)dx \\ &= (2\pi)^{n/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\int_{2\pi\nu+[0,2\pi)^n}\hat{\varphi}(y)dy = (2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}(y)dy\end{aligned}$$

を得るので

$$\varphi(0) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\varphi}(y)dy$$

なる等式を得る。これは (5) と同値である。

**(5) $\Rightarrow$ (3) :** 次を満たす $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を取る：

$$\psi \geq 0, \quad \mathrm{supp}\ \psi \subset (-1,1)^n, \quad \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\tau_\nu\psi = 1$$

このとき $u \equiv \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} e_{2\pi\nu}\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ であり、任意の $\nu \in \mathbb{Z}^n$ に対し $(e_{2\pi\nu}-1)u = 0$ となる。特に、第 $j$ 成分のみ 1 で残りが 0 の $\nu$ を取ると

$$(\exp(2\pi i x_j) - 1)u = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

となる、さて

$$\exp(2\pi i x_j) - 1 = 2i\exp(\pi i x_j)\sin\pi x_j = \left(2i\exp(\pi i x_j)\frac{\sin\pi x_j}{x_j}\right)x_j$$

と表したとき supp $\psi$ 上で

$$2i\exp(\pi i x_j)\frac{\sin\pi x_j}{x_j}\neq 0$$

となるので

$$x_j u=0,\quad 1\le j\le n$$

が従う。任意の $\varphi\in\mathscr{S}$ に対し

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\sum_{j=1}^n x_j\int_0^1(\partial_j\varphi)(tx)dt$$

となることを用いると

$$\begin{aligned}(u,\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\overline{\varphi(x)}dx &= \overline{\varphi(0)}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)dx+\sum_{j=1}^n\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}x_ju(x)\overline{\partial_j\varphi}(tx)dx\ dt\\ &= \overline{\varphi(0)}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)dx\end{aligned}$$

が従う。さて

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(2\pi\nu) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(-2\pi\nu)\\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(\varphi,e_{2\pi\nu})\\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(\varphi,\tau_\mu\psi\cdot e_{2\pi\nu})\\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(\varphi,\tau_\mu(\psi e_{2\pi\nu}))\\ &= \sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(\varphi,\tau_\mu u)=\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(\tau_{-\mu}\varphi,u)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}(\tau_{-\mu}\varphi,u) &= \overline{(u,\overline{\tau_{-\mu}\varphi})}\\ &= \overline{(\overline{\tau_{-\mu}\varphi})(0)\int_{\mathbb{R}^n}u(x)dx}=\varphi(\mu)\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u(x)}dx=\varphi(\mu)\int_{\mathbb{R}^n}u(x)dx\end{aligned}$$

であるから

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(2\pi\nu)=c\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\nu),\ c=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)dx\in\mathbb{R}$$

が従う。

　この等式は任意の $\varphi\in\mathscr{S}$ に対して成立するから、$\hat{\varphi}$ と $\varphi_{2\pi}(x)=(2\pi)^n\varphi(2\pi x)$ に対して適用するとそれぞれ

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\hat{\varphi}}(2\pi\nu)=c\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\hat{\varphi}(\nu),$$

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\varphi_{2\pi}}(2\pi\nu)=c\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\varphi_{2\pi}(\nu)$$

となる。(5) により $\hat{\hat{\varphi}}(2\pi\nu) = \varphi(-2\pi\nu)$, 変数変換により $\widehat{\varphi_{2\pi}}(2\pi\nu) = \hat{\varphi}(\nu)$ となるので

$$\begin{aligned}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(2\pi\nu) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(-2\pi\nu) = c\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\nu) = c\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi_{2\pi}}(2\pi\nu) = c^2\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi_{2\pi}(\nu) \\ &= c^2\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(2\pi\nu)\end{aligned}$$

を得る。よって $c^2 = 1$ となる。さて、$\varphi \in \mathscr{S}$ として $\varphi = v * v^\vee$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $v \geq 0$, $\operatorname{supp} v \subset (-1/2, 1/2)^n$ を取ると $\operatorname{supp} \varphi \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$, $\hat{\varphi} = |\hat{v}|^2 \geq 0$ であるから

$$0 \leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(2\pi\nu) = c\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\nu) = c\varphi(0) = c\int_{\mathbb{R}^n} v(x)^2 dx$$

となり $c = 1$ を得る。よって (3) が従う。

**(4) ⇒ (6)：** $\varphi \in \mathscr{S}$ に対し $\varphi_{2\pi} \in \mathscr{S}$ を $\varphi_{2\pi}(x) = (2\pi)^n\varphi(2\pi x)$ と定めると

$$\begin{aligned}(\varphi_{2\pi}(\nu)e_{-\nu})(2\pi x) &= (2\pi)^n\varphi(2\pi\nu)\exp(-2\pi i v\cdot x) \\ &= (2\pi)^n(\varphi(2\pi\nu)e_{-2\pi\nu})(x), \\ (\tau_{2\pi\nu}\widehat{\varphi_{2\pi}})(2\pi x) &= \widehat{\varphi_{2\pi}}(2\pi x - 2\pi\nu) \\ &= \hat{\varphi}(x-\nu) = (\tau_\nu\hat{\varphi})(x)\end{aligned}$$

となるので、(4) に $\varphi_{2\pi}$ を適用した両辺を $(2\pi)^{n/2}$ で割ると (6) となる。

**(6) ⇒ (4)：** (4)⇒(6) の証明と同様。

# 参考文献


[1] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **87**, 2004.

[2] G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.

[3] F.G. Friedlander and M. Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University Press, 1998.

[4] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Graduate Texts in Mathematics **97**, Springer-Verlag, 1993.

[5] B.E. Peterson, *Introduction to the Fourier Transform and Pseudo-Differential Operators*, Pitman, 1983.