直方体上のリーマン積分

平成 20 年 7 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

$\mathbb{R}^n$ に於ける (閉) 直方体 (closed) rectangle で定義された実数値函数のリーマン積分に就いて考える。R が閉直方体とは n 個の有界閉区間 $I_j \subset \mathbb{R}$ の直積 $R = \prod_{j=1}^{n} I_j$ で表される有界閉集合のこととする。$I_j = [a_j, b_j], a_j \leq b_j,$ の場合は $R = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j \leq x_j \leq b_j\}$ と表される。このとき R の体積 $\mu(R)$ は $\mu(R) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$ と定義される。R の分割 partition とは有限個の部分直方体の集まり $\mathcal{P} = \{R_i; i \in I\}$ で次を満たすものとする：

$$R = \bigcup_{i \in I} R_i, \ i \neq j \text{ なる任意の } i, j \in I \text{ に対し } \mu(R_i \cap R_j) = 0$$

R の二つの分割 $\mathcal{P} = \{R_i; i \in I\},\ \mathcal{P}' = \{R'_j; j \in J\}$ に対し $\mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ の細分 refinement であるとは任意の $i \in I$ に対し $\{R'_j \in \mathcal{P}'; R'_j \subset R_i\}$ は R_i の分割を成す事を謂う。R の任意の二つの分割 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ に対し双方の細分となっている分割 $\mathcal{P}''$ が存在する。これは全ての部分直方体の各辺の端点を座標成分毎に小さい方から並べてその成分の分割更にはその直積を取る事で得られる。

同様にして全ての部分直方体の各成分の分割更にはその直積を取る事により、R の一つの分割 $\mathcal{P} = \{R_i; i \in I\}$ に対し $\mu(R) = \sum_{i \in I} \mu(R_i)$ が成立する事が分かる。

定義１．　R を直方体、$f : R \to \mathbb{R}$ を有界函数、$\mathcal{P} = \{R_i; i \in I\}$ を R の一つの分割とする。このとき上リーマン和 upper Riemann sum 及び下リーマン和 lower Riemann sum を夫々

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i \in I} (\sup_{R_i} f) \mu(R_i), \quad L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i \in I} (\inf_{R_i} f) \mu(R_i)$$

で定義する。

命題１．　(1) $\mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ の細分ならば

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P}') \leq U(f, \mathcal{P})$$

(2) 任意の二つの分割 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ に対し

$$L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}')$$

(証明) (1) $\mathcal{P}=\{R_i; i\in I\}$, $\mathcal{P}'=\{R'_j; j\in J\}$ とする。任意の $i\in I$ に対し $\{R'_j\in\mathcal{P}'; R'_j\subset R_i\}$ は R_i の分割を成すので $J_i=\{j\in J; R'_j\subset R;\}$ と置くと $\mu(R_i)=\displaystyle\sum_{j\in J_i}\mu(R'_j)$ となる。このとき J は互いに素な合併 $J=\displaystyle\bigcup_{i\in I}J_i$ で表され

$$\begin{aligned}
U(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i\in I}(\sup_{R_i} f)\mu(R_i) \\
&= \sum_{i\in I}(\sup_{R_i} f)\sum_{j\in J_i}\mu(R'_j) \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}(\sup_{R_i} f)\mu(R'_j) \\
&\geq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i}(\sup_{R'_j} f)\mu(R'_j) \\
&= \sum_{j\in J}(\sup_{R'_j} f)\mu(R'_j) = U(f,\mathcal{P}')
\end{aligned}$$

となるから最後の不等式が従う。最初の不等式も同様である。

(2) $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の共通の細分 $\mathcal{P}''$ を取ると (1) により

$$L(f,\mathcal{P})\leq L(f,\mathcal{P}'')\leq U(f,\mathcal{P}'')\leq U(f,\mathcal{P}')$$

命題 1 の (2) により $\displaystyle\sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P})\leq\inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P})$ となる。ここに上限と下限は夫々直方体 R の分割 $\mathcal{P}$ に亙って取るものとする。

定義２． 直方体 R 上の実数値有界函数 f に対し上リーマン積分 upper Riemann integral、下リーマン積分 lower Riemann integral を夫々

$$\overline{\int_R} f=\inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}),\qquad \underline{\int_R} f=\sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P})$$

で定義する。

定義３． 直方体 R の分割 $\mathcal{P}=\{R_i; i\in I\}$ に対し

$$|\mathcal{P}|=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\max_{i\in I}|\pi_j(R_i)|\right)^2\right)^{1/2}$$

と置く。ここに $\pi_j:\mathbb{R}^n\ni x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_j\in\mathbb{R}$ は第 j 成分への射影であり $|I|$ は区間 $I\subset\mathbb{R}$ の幅を表すものとする。

命題２．　直方体 R 上の実数値函数 f に対し次は同値である。

(1) $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し分割 $\mathcal{P}$ が在って $0 \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が在って $|\mathcal{P}| < \delta$ なる任意の分割 $\mathcal{P}$ に対し

$$0 \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$$

(4) $\lim_{k\to\infty} |\mathcal{P}_k| = 0$ なる任意の分割の列 $\{\mathcal{P}_k\}$ に対し

$$\lim_{k\to\infty} U(f,\mathcal{P}_k) = \lim_{k\to\infty} L(f,\mathcal{P}_k)$$

証明　(1) ⇒ (2) :　(1) の共通の値を S と置く。上リーマン積分と下リーマン積分の定義により、任意の $\varepsilon > 0$ に対し分割 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ が在って $S - \varepsilon/2 < L(f,\mathcal{P}) \leq S \leq U(f,\mathcal{P}') < S + \varepsilon/2$ となる。$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の共通の細分を $\mathcal{P}''$ とすると

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}'') - L(f,\mathcal{P}'') &\leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}') \\ &< (S+\varepsilon/2) - (S-\varepsilon/2) = \varepsilon \end{aligned}$$

(2) ⇒ (1) :　任意の $\varepsilon > 0$ に対し (2) の分割を $\mathcal{P}_\varepsilon$ とすると

$$0 \leq \inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}) - \sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}_\varepsilon) - L(f,\mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$$

となり $\varepsilon > 0$ は任意故 (1) が従う。

(3) ⇒ (4) :　任意の $\varepsilon > 0$ に対し (3) で保証される $\delta > 0$ を取る。$\lim_{k\to\infty} |\mathcal{P}_k| = 0$ 故 N が在って $k \geq N$ なる任意の k に対し $|\mathcal{P}_k| < \delta$ と出来る。これは (4) を意味する。

(4) ⇒ (1) :　R の各辺を k 等分して出来る分割を $\mathcal{P}_k$ とすると $|\mathcal{P}_k| = O(1/k)(k \to \infty)$ であるから

$$0 \leq \inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}) - \sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}_k) - L(f,\mathcal{P}_k) \to 0$$

となり (1) が従う。

(1) ⇒ (3) :　(1) の共通の値を S と置く。任意の $\varepsilon > 0$ に対し分割 $\mathcal{P} = \{R_i; i \in I\}$ が在って

$$0 \leq U(f,\mathcal{P}) - S < \varepsilon/4, \quad 0 \leq S - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon/4$$

と出来る。

$\delta>0$ を定めて $|\mathcal{P}'|<\delta$ なる任意の分割 $\mathcal{P}'$ に対し $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の共通の細分 $\mathcal{P}''$ を取り

$$0\le U(f,\mathcal{P}')-U(f,\mathcal{P}'')<\varepsilon/4$$
$$0\le L(f,\mathcal{P}'')-L(f,\mathcal{P}')<\varepsilon/4$$

と出来る事を示せば

$$\begin{aligned}
0 &\le U(f,\mathcal{P}')-L(f,\mathcal{P}')\\
&= (U(f,\mathcal{P}')-U(f,\mathcal{P}''))+(U(f,\mathcal{P}'')-U(f,\mathcal{P}))+(U(f,\mathcal{P})-S)\\
&\quad +(L(f,\mathcal{P}'')-L(f,\mathcal{P}'))+(L(f,\mathcal{P})-L(f,\mathcal{P}''))+(S-L(f,\mathcal{P}))\\
&\le (U(f,\mathcal{P}')-U(f,\mathcal{P}''))+(U(f,\mathcal{P})-S)\\
&\quad +(L(f,\mathcal{P}'')-L(f,\mathcal{P}'))+(S-L(f,\mathcal{P}))\\
&< \varepsilon/4+\varepsilon/4+\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon
\end{aligned}$$

となり (3) が従う。そこで上リーマン和に関する不等式

$$0\le U(f,\mathcal{P}')-U(f,\mathcal{P}'')<\varepsilon/4$$

を示そう。下リーマン和に関する不等式も同様にして示される。以下では分割は R の各辺の分割の直積として表されるものとする。先ず分割 $\mathcal{P}=\{R_i;i\in I\}$ による部分直方体の辺の長さの最小値を δ_0 即ち $\delta_0=\min\{|\pi_j(R_i)|;i\in I,\ j\in\{1,\cdots,n\}\}$ とし、$|\mathcal{P}'|<\delta_0$ なる分割 $\mathcal{P}'$ を考える。$\mathcal{P}'=\{R'_k;k\in K\}$ とする。R'_k の各辺の長さは δ_0 よりも真に小さいので、R'_k の各辺は $\mathcal{P}$ の分点を高々一つしか含まない。即ち任意の $i\in I,\ k\in K,\ j\in\{1,\cdots,n\}$ に対し

$$\sharp(\pi_j(R'_k)\cap\partial(\pi_j(R_i)))\le 1$$

となる。よって

$$n_k=\sharp\{i\in I;\exists j\in\{1,\cdots,n\}:\partial(\pi_j(R_i))\subset\ \mathrm{Int}\ (\pi_j(R'_k))\}$$

とおくと $n_k\le n$ となる。さて $\mathcal{P}''=\{R''_\ell;\ell\in L\}$ を、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の分点を合わせたものを分点とする分割とすると L は互いに素な合併 $L=\displaystyle\bigcup_{k\in K}L_k$ で表され、更に $R'_k=\displaystyle\bigcup_{\ell\in L_k}R''_\ell,\ \ell\ne m$ なる任意の $\ell,\ m\in L_k$ に対し $\mu(R''_\ell\cap R''_m)=0$ となる。

このとき $\mathcal{P}$ の分点によって実際に分割される R'_k(即ち $n_k\ne0$ なる R'_k の影響を考えると)

$$\begin{aligned}
0\le U(f,\mathcal{P}')-U(f,\mathcal{P}'') &= \sum_{k\in K}\sum_{\ell\in L_k}(\sup_{R'_k}f-\sup_{R''_\ell}f)\mu(R''_\ell)\\
&= \sum_{\substack{k\in K\\ n_k\ne0}}\sum_{\ell\in L_k}(\sup_{R'_k}f-\sup_{R''_\ell}f)\mu(R''_\ell)\\
&\le 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{k\in K\\ n_k\ne0}}\sum_{\ell\in L_k}\mu(R''_\ell)\\
&= 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{k\in K\\ n_k\ne0}}\mu(R'_k)
\end{aligned}$$

となる。そこで最後の和の評価が問題となる。

直方体 R の第 j 成分の内部に在る $\mathcal{P}$ の分点の数を r_j とする：

$$r_j = \sum_{i\in I} \sharp(\mathrm{Int}(\pi_j(R)) \cap \partial(\pi_j(R_i)))$$

この分点の一つを辺の内部に含む R'_k 全部の合併

$$\bigcup\{R'_k; \partial(\pi_j(R_i)) \subset \ \mathrm{Int}\ (\pi_j(R'_k))\}$$

は、第 j 成分の長さ $\leq |\mathcal{P}'|$, 第 $m \neq j$ 成分の長さ $= b_m - a_m$ を持つ直方体に含まれるので、その体積は $|\mathcal{P}'| \prod_{m\neq j}(b_m - a_m)$ 以下である。第 j 成分についてこの様な分点は r_j 個あるので

$$\sum_{\substack{k\in K\\ n_k\neq 0}} \mu(R'_k) \leq \sum_{j=1}^{n} r_j |\mathcal{P}'| \prod_{m\neq j}(b_m - a_m)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 0 \leq U(f,\mathcal{P}') - U(f,\mathcal{P}'') \leq C_0|\mathcal{P}'|, \\ C_0 = 2\|f\|_\infty \sum_{j=1}^{n} r_j \prod_{m\neq j}(b_m - a_m) \end{aligned}$$

となる。よって求める δ は $0 < \delta < \min(\delta_0,\ \varepsilon/(C_0+1))$ を満たすものを取れば良い。

定義４　直方体 R 上の実数値有界函数 f は命題２の同値な条件 (1)-(4) を満たすとき R 上リーマン可積分であると謂い、その積分値を上リーマン積分と下リーマン積分の共通の値と定め $\int_R f$ と表す：

$$\int_R f = \overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f$$

命題３　直方体上の連続函数はリーマン可積分である。

(証明)　有界閉集合である直方体 R 上の連続函数 f は有界かつ一様連続である。R の一つの分割 $\mathcal{P} = \{R_i : i \in I\}$ に対し

$$\begin{aligned} 0 &\leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \\ &= \sum_{i\in I}\left(\sup_{R_i} f - \inf_{R_i} f\right)\mu(R_i) \\ &= \sum_{i\in I}\left(\sup_{x,y\in R_i}|f(x)-f(y)|\right)\mu(R_i) \\ &\leq \sum_{i\in I}\left(\sup_{|x-y|\leq|\mathcal{P}|}|f(x)-f(y)|\right)\mu(R_i) \\ &= \left(\sup_{|x-y|\leq|\mathcal{P}|}|f(x)-f(y)|\right)\mu(R) \end{aligned}$$

となるので f の一様連続性により $|\mathcal{P}| \to 0$ とすれば $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) \to 0$ となる。

以下の目的はリーマン可積分性についての特徴付けを与え、それに基づいてアルツェラの有界収束定理を証明する事である。命題４から９の証明は省略する。集合 A の特徴函数を χ_A と表す。

命題４　$A \subset \mathbb{R}^n$ を有界集合とする。A 上の実数値有界函数 f に対し次は同値である。

(1) $A \subset R$ なる任意の直方体 R に対し $f\chi_A$ は R 上リーマン可積分である。

(2) $A \subset R$ なる或る直方体 R に対し $f\chi_A$ は R 上リーマン可積分である。

このとき $A \subset R$ なる任意の直方体 R に対し $\int_R f\chi_A$ は一定の値となる。

定義５　有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 上の実数値函数 f に対し命題４の同値な条件 (1)、(2) が成立つとき f は A 上リーマン可積分であると謂い、A を含む直方体上の $f\chi_A$ のリーマン積分の値を $\int_A f$ と表し f の A 上のリーマン積分の値と謂う。

定義６　有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し $A \subset R$ なる直方体 R 上の χ_A の上リーマン積分及び下リーマン積分は R に依らず一定の値となる。それらを夫々A のジョルダン外測度及びジョルダン内測度と謂い $\bar{\mu}(A),\ \underline{\mu}(A)$ と表す：

$$\bar{\mu}(A) = \overline{\int_R} \chi_A, \quad \underline{\mu}(A) = \underline{\int_R} \chi_A$$

A はジョルダン可測であるとは χ_A は A 上リーマン可積分である事を謂う。このとき A のジョルダン外測度とジョルダン内測度は一致する。この値を A のジョルダン測度と謂い $\mu(A)$ と表す：

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$$

命題５　有界集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し次は同値である。

(1) A はジョルダン可測である。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の直方体 $\{R_i; i \in I\}$ が在って

$$\partial A \subset \bigcup_{i\in I} \mathrm{Int}\ R_i, \qquad \sum_{i\in I} \mu(R_i) < \varepsilon$$

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の直方体 $\{R_i; i \in I\}$ が在って

$$\partial A \subset \bigcup_{i\in I} R_i, \qquad \sum_{i\in I} \mu(R_i) < \varepsilon$$

(4) $\mu(\partial A) = 0$

定義 7　直方体 R 上の函数 f が階段函数であるとは有限個のジョルダン可測集合 $\{M_i; i \in I\}$ が在って

$$R = \bigcup_{i \in I} M_i,\ i \neq j \text{ なる任意の } i, j \in I \text{ に対し } \mu(M_i \cap M_j) = 0$$

なる条件を満たし各 $i \in I$ に対し $f|\mathrm{Int}\ M_i$ は定数であるものを謂う。f の標準的な表し方 $f = \sum_{i \in I} (f|\mathrm{Int}\ M_i)\chi_{M_i}$ はジョルダン測度で零集合上での差異を除き一意的であり、それらのリーマン積分の値は共通の値 $\int_R f = \sum_{i \in I} (f|\mathrm{Int}\ M_i)\mu(M_i)$ を持つ。直方体 R 上の階段函数全体の成す集合を $\mathrm{Step}(R)$ と表す。

命題 6　直方体 R 上の実数値有界函数 f に対し次の等式が成立つ。

$$\begin{aligned}
\overline{\int_R} f &= \inf\{\int_R \psi\ ;\ \psi \in\ \mathrm{Step}(R),\ f \leq \psi\} \\
&= \inf\{\int_R \psi\ ;\ R \text{ の分割 } \mathcal{P} = \{R_i; i \in I\} \text{ と } \{c_i; i \in I\} \subset \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad \text{が在って } \psi = \sum_{i \in I} c_i \chi_{R_i} \text{ 且つ } f \leq \psi\} \\
\underline{\int_R} f &= \sup\left\{\int_R \varphi\ ;\ \varphi \in\ \mathrm{Step}(R),\ \varphi \leq f\right\} \\
&= \sup\{\ \int_R \varphi\ ;\ R \text{ の分割 } \mathcal{P} = \{R_i; i \in I\} \text{ と } \{c_i; i \in I\} \subset \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad \text{が在って } \varphi = \sum_{i \in I} c_i \chi_{R_i} \text{ 且つ } \varphi \leq f\ \}
\end{aligned}$$

命題 7　直方体 R 上の実数値有界函数 f に対し次は同値である。

(1) f は R 上リーマン可積分である。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi, \psi \in\ \mathrm{Step}(R)$ が在って $\varphi \leq f \leq \psi$ 且つ

$$0 \leq \int_R (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

(3) $\{\varphi_k\},\ \{\psi_k\} \subset\ \mathrm{Step}(R)$ が在って $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ 且つ

$$\lim_{k \to \infty} \int_R (\psi_k - \varphi_k) = 0$$

(4) $\mathrm{Step}(R)$ の単調増加列 $\{\varphi_k\}$ 及び単調減少列 $\{\psi_k\}$ が在って $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ 且つ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_R(\psi_k - \varphi_k) = 0$

命題８　直方体 R 上の実数値有界函数 f に対し次の等式が成立つ。

$$\begin{aligned}\overline{\int_R} f &= \inf\left\{\int_R \psi\ ;\ \psi \in C(R),\ f \leq \psi\right\}\\ \underline{\int_R} f &= \sup\left\{\int_R \varphi\ ;\ \varphi \in C(R),\ \varphi \leq f\right\}\end{aligned}$$

命題９　直方体 R 上の実数値有界函数 f に対し次は同値である。

(1) f は R 上リーマン可積分である。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi, \psi \in C(R)$ が在って $\varphi \leq f \leq \psi$ 且つ

$$0 \leq \int_R(\psi - \varphi) < \varepsilon$$

(3) $\{\varphi_k\},\ \{\psi_k\} \subset C(R)$ が在って $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ 且つ

$$\lim_{k\to\infty}\int_R(\psi_k - \varphi_k) = 0$$

(4) $C(R)$ の単調増加列 $\{\varphi_k\}$ 及び単調減少列 $\{\psi_k\}$ が在って $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ 且つ

$$\lim_{k\to\infty}\int_R(\psi_k - \varphi_k) = 0$$

命題１０　直方体 R 上の非負有界函数列 $\{f_j\}$ は次の条件を満たすものとする：

(1) 各 $x \in R$ に対し $\displaystyle\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$

(2) $\{f_j\}$ は単調減少列を成す。即ち任意の j と $x \in R$ に対し $f_{j+1}(x) \leq f_j(x)$ が成立つ。

このとき

$$\lim_{j\to\infty}\ \underline{\int_R} f_j = 0$$

注意　f_j はリーマン可積分であるとは仮定していない。

(証明) $\underline{\int}_R f_j = \sup\left\{\int_R \varphi\ ;\ \varphi \in C(R),\ \varphi \le f_j\right\}$であるから任意の$\varepsilon > 0$に対し$\varphi_j \in C(R)$が在って$\varphi_j \le f_j,\quad \underline{\int}_R f_j < \int_R \varphi_j + \varepsilon/2^j$とする事が出来る。$\varphi_j$を$\varphi_j \vee 0$に置き換える事により$\varphi_j \ge 0$として良い事が分かる。そこで帰納的に$\{\psi_j\} \subset C(R)$を

$$\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_j = \varphi_j \wedge \psi_{j-1},\ j \ge 2$$

と定める。このとき$\psi_{j+1} = \varphi_{j+1} \wedge \psi_j \le \psi_j$より$\{\psi_j\}$は単調減少であり、$\psi_1 = \varphi_1 \ge 0,\ \varphi_j \ge 0$より帰納的に$\psi_j = \varphi_j \wedge \psi_{j-1} \ge 0$である事が従う。また、$0 \le \psi_j \le \varphi_j \le f_j$により$\{\psi_j\}$は0に各点収束する事が分かる。

さて

$$\psi_j + \varphi_j \vee \psi_{j-1} = \varphi_j \wedge \psi_{j-1} + \varphi_j \vee \psi_{j-1} = \varphi_j + \psi_{j-1}$$

を積分すると

$$\int_R \psi_j + \int_R \varphi_j \vee \psi_{j-1} = \int_R \varphi_j + \int_R \psi_{j-1}$$

となる。ここで$\varphi_j \vee \psi_{j-1} \le \varphi_{j-1} \le f_{j-1}$より

$$\int_R \varphi_j \vee \psi_j \le \int_R \varphi_{j-1} \le \underline{\int}_R f_{j-1}$$

が従い

$$\int_R \varphi_j > \underline{\int}_R f_j - \varepsilon/2^j$$

であるから

$$\int_R \psi_j = \int_R \varphi_j + \int_R \psi_{j-1} - \int_R \varphi_j \vee \psi_{j-1} > \underline{\int}_R f_j - \varepsilon/2^j + \int_R \psi_{j-1} - \underline{\int}_R f_{j-1}$$

即ち

$$\underline{\int}_R f_j - \int_R \psi_j < \underline{\int}_R f_{j-1} - \int_R \psi_{j-1} + \varepsilon/2^j$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}
\underline{\int}_R f_j - \int_R \psi_j &< \underline{\int}_R f_1 - \int_R \psi_1 + \sum_{k=2}^{j} \varepsilon/2^k \\
&= \underline{\int}_R f_1 - \int_R \varphi_1 + \sum_{k=2}^{j} \varepsilon/2^k < \sum_{k=1}^{j} \varepsilon/2^k < \varepsilon
\end{aligned}$$

即ち

$$\underline{\int}_R f_j < \int_R \psi_j + \varepsilon$$

を得る。$\{\psi_j\} \subset C(R)$ は 0 に各点収束する単調減少列であるからディニの定理により一様収束する。よって

$$\lim_{j\to\infty}\int_R \psi_j = 0$$

となり

$$\limsup_{j\to\infty}\ \underline{\int}_R f_j \leq \varepsilon$$

が従う。$\varepsilon > 0$ は任意故結論が従う。

命題１１ (アルツェラの有界収束定理)
　直方体 R 上のリーマン可積分函数 f とリーマン可積分函数列 $\{f_j\}$ は次の条件を満たすものとする：

(1) $\{f_j\}$ は f に R 上各点収束する。即ち各 $x \in R$ に対し $f_j(x) \to f(x)\ (j \to \infty)$

(2) $\{f_j\}$ は R 上一様有界である。即ち

$$\sup_j \|f_j\|_\infty < \infty$$

このとき

$$\lim_{j\to\infty}\int_R f_j = \int_R f$$

(証明)　$g_j = f_j - f$ と置くと g_j もリーマン可積分であり $\{g_j\}$ は 0 に各点収束する。$g_j^{\pm} = \frac{1}{2}(|g_j| \pm g_j)$ と置くと $g_j^{\pm} \geq 0,\ g_j = g_j^+ - g_j^-,\ |g_j| = g_j^+ + g_j^-$ であり $\{g_j^+\}$ も $\{g_j^-\}$ も共に 0 に各点収束し $|g_j^{\pm}| \leq |g_j| \leq |f_j| + |f|$ より $\{g_j^{\pm}\}$ は共に R 上一様有界である。さて $h_j^{\pm} = \sup\{g_k^{\pm}; k \geq j\}$ と置くと $h_j^{\pm}$ は R 上の非負有界函数の単調減少列であり 0 に各点収束する。よって命題 10 より

$$\lim_{j\to\infty}\ \underline{\int}_R h_j^{\pm} = 0$$

となり $g_j^{\pm} \leq h_j^{\pm}$ 及び $g_j^{\pm}$ はリーマン可積分なので

$$\lim_{j\to\infty}\int_R g_j^{\pm} = \lim_{j\to\infty}\ \underline{\int}_R g_j^{\pm} \leq \lim_{j\to\infty}\ \underline{\int}_R h_j^{\pm} = 0$$

が従う。以上より

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_R f_j &= \lim_{j\to\infty}\int_R (f_j - f) + \int_R f \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_R (g_j^+ - g_j^-) + \int_R f = \int_R f\end{aligned}$$

参考文献：藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學第一巻、内田老鶴圃
杉浦光夫、解析入門Ｉ、東京大学出版会
J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk, *Multidimensional Real Analysis II*, Cambridge University Press.