Schwarzの不等式

平成19年10月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

複素ベクトル空間Xに内積(スカラー積)$(\cdot,\cdot)$が与えられているものとする。内積$(\cdot,\cdot)$: $X \times X \to \mathbb{C}$は第一変数に関し線型、第二変数に関し反線型とする。Xには$\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$によってノルムが定まる。このとき任意の$x, y, \in X$に対し

$$\begin{aligned}\|x \pm y\|^2 &= (x \pm y, x \pm y) \\ &= (x, x \pm y) \pm (y, x \pm y) \\ &= (x, x) \pm (x, y) \pm (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 \pm ((x, y) + (\overline{x, y})) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \pm 2\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2\end{aligned}$$

よって

$$\mp 2\mathrm{Re}(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x \pm y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

これより

$$|\mathrm{Re}(x, y)| \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

が得られる。

命題1. 次の不等式は同値である。

(1) (Schwarzの不等式)　$|(x, y)| \le \|x\|\|y\|,\ x, y \in X$

(2) $|(x, y)| \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ x, y \in X$

(3) $|\mathrm{Re}(x, y)| \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ x, y \in X$

(4) $\mathrm{Re}(x, y) \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ x, y \in X$

(5) $|\mathrm{Im}(x, y)| \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ x, y \in X$

(6) $\mathrm{Im}(x, y) \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ x, y \in X$

(証明)　(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 及び (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) は容易。(4) $\Leftrightarrow$ (6) は、$\mathrm{Im}(x, y) = \mathrm{Re}(-ix, y)$, $\mathrm{Re}(x, y) = \mathrm{Im}(ix, y)$ 及び $\|\pm ix\| = \|x\|$ より従う。そこで (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) を示せば充分。

(4) ⇒ (2) : $x, y, \in X$ を任意に与える。その内積 $(x,y) \in \mathbb{C}$ に対し $\theta \in \mathbb{R}$ が存在し $(x,y) = |(x,y)|e^{i\theta}$ と書ける。このとき $|(x,y)| = e^{-i\theta}(x,y) = (e^{-i\theta}x, y)$ であり最左辺は実数なので $|(x,y)| = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}x, y)$.

(4) を用いて

$$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}x, y) \le \frac{1}{2}(\|e^{-i\theta}x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

これより (2) が従う。

(2) ⇒ (1) : $x, y, \in X$ を取る。任意の $t > 0$ に対し $(x,y) = (\sqrt{t}x, \frac{1}{\sqrt{t}}y)$. 右辺に (2) を用いて

$$|(x,y)| \le \frac{t}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2t}\|y\|^2.$$

この右辺を $t > 0$ について最小化して (1) を得る。

(別証明) (2) で x, y を $x/(\|x\| + \varepsilon)$, $y/(\|y\| + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, に適用し $|(x,y)| \le (\|x\| + \varepsilon)(\|y\| + \varepsilon)$ として $\varepsilon > 0$ が任意である事から (1) を得る。

注１． X が実内積空間の場合、(2) と (3) は同一表現となり、(4) は

$$(4)' \qquad (x,y) \le \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in X$$

となる。$(4)' \Rightarrow (2)$ は x を $\pm x$ とすれば得られる。

具体的な内積空間では Schwarz の不等式は Lagrange の等式の系として得られる。測度空間 (X,μ) に対し、直積空間 $(X \times X,\ \mu \times \mu)$ が定義でき Fubini-Tonelli の定理が成立するものとする。

$f, g \in L^2((X,\mu);\mathbb{C})$ に対し

$$(f,g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x),\ \|f\| = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}$$

とおく。

命題２． (Lagrange の等式)

$$\|f\|^2\|g\|^2 - |(f,g)|^2 = \frac{1}{2}\int_X\int_X |f(x)g(y) - f(y)g(x)|^2 d\mu(x)d\mu(y)$$

(証明)

$$\frac{1}{2}\int_X\int_X |f(x)g(y)-f(y)g(x)|^2 d\mu(x)d\mu(y)$$

$$=\frac{1}{2}\int_X\int_X (|f(x)|^2|g(y)|^2 - 2\mathrm{Re}(f(x)g(y)\overline{f(y)g(x)}) + |f(y)|^2|g(x)|^2)d\mu(x)d\mu(y)$$

$$=\frac{1}{2}\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\int_X |g(y)|^2 d\mu(y)$$

$$-\mathrm{Re}\int_X\int_X f(x)\overline{g(x)}\ \overline{f(y)}g(y)d\mu(x)d\mu(y)+\frac{1}{2}\int_X |f(y)|^2 d\mu(y)\int_X |g(x)|^2 d\mu(x)$$

$$=\|f\|^2\|g\|^2-\mathrm{Re}\left(\int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)\cdot\overline{\int_X f(y)\overline{g(y)}d\mu(y)}\right)$$

$$=\|f\|^2\|g\|^2-\mathrm{Re}((f,g)\overline{(f,g)})$$

$$=\|f\|^2\|g\|^2-|(f,g)|^2.$$

注１． 右辺は非負なので Lagrange の等式より Schwarz の不等式が従う。

注２． $|(f,g)|^2=\|f\|^2\|g\|^2$
$\Leftrightarrow a.a\ x,y\in X,\ f(x)g(y)=f(y)g(x)$
$\Leftrightarrow a.a\ x,y\in\{z\in X; g(z)\neq 0\},\quad f(x)/g(x)=f(y)/g(y)$
$\Leftrightarrow \exists\ c\in\mathbb{C}: f=cg$

注３． $L^2((X,\mu);\mathbb{C})$ が Dirac 測度を備えた $\ell^2(\mathbb{Z})$ の場合 Lagrange の等式は次の様になる。

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|^2\right)-\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\overline{b_n}\right|^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_mb_n-a_nb_m|^2$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n>m}|a_mb_n-a_nb_m|^2$$

参考文献： 藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學、内田老鶴圃