テイラー展開

平成 20 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

f は開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の $(n+1)$ 回微分可能な函数とする。定数 $M \geq 0$ が在って任意の $x \in I$ に対し評価

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

が成立っているものとする。このとき任意の $a, x \in I$ に対し

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成立つ。ここで

$$\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

を f の a に於ける n 次のテイラー展開、

$$R_n(x) \equiv f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

を n 次の剰余項と謂う。

$n = 0$ の場合は微分積分学の基本公式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y) dy \tag{1}$$

の右辺の積分を

$$|f(x) - f(a)| \leq \left| \int_a^x |f'(y)| dy \right| \leq M \left| \int_a^x dy \right| = M|x-a|$$

と評価する事で示される。

(1) の右辺の積分から一次の項 $f'(a)(x-a)$ を取り出す為に被積分函数 $f'(y)$ を $f'(y) \cdot 1$ と見做して $g'(y) = 1$ となる函数 g を見出す事で部分積分法の応用を考える。部分積分による境界値として両端点 $y = x$ と $y = a$ からの寄与が見込まれるが f' は一次の項 $f'(a)(x-a)$ に $y = a$ での値のみ現れるので g は $y = x$ で 0 とならねばならない。よって $g'(y) = 1,\ g(x) = 0$ を満たす $g(y)$ は

$$g(y) = \int_x^y g'(t) dt = \int_x^y dt = y - x$$

として求まる。(1) の右辺の積分に部分積分法を実行すると

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(y)dy &= \int_a^x f'(y)\frac{d}{dy}(y-x)dy \\ &= [f'(y)(y-x)]_{y=a}^{y=x} - \int_a^x f''(y)(y-x)dy \\ &= -f'(a)(a-x) - \int_a^x f''(y)(y-x)dy \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(y)(x-y)dy \qquad (2)\end{aligned}$$

と変形される。(2) の右辺の積分は

$$\begin{aligned}\int_a^x f''(y)\frac{d}{dy}\left(-\frac{(x-y)^2}{2}\right)dy &= \left[-f''(y)\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{y=a}^{y=x} + \int_a^x f'''(y)\frac{(x-y)^2}{2}dy \\ &= f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(y)\frac{(x-y)^2}{2}dy \qquad (3)\end{aligned}$$

(3) の右辺の積分は

$$\begin{aligned}\int_a^x f'''(y)\frac{d}{dy}\left(-\frac{(x-y)^3}{3\cdot 2}\right)dy &= \left[-f'''(y)\frac{(x-y)^3}{3\cdot 2}\right]_{y=a}^{y=x} + \int_a^x f''''(y)\frac{(x-y)^3}{3\cdot 2}dy \\ &= f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3\cdot 2} + \int_a^x f''''(y)\frac{(x-y)^3}{3\cdot 2}dy\end{aligned}$$

以下同様に

$$\begin{aligned}&\int_a^x f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!}dy \\ &= \int_a^x f^{(k)}(y)\frac{d}{dy}\left(-\frac{(x-y)^k}{k!}\right)dy \\ &= \left[-f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}\right]_{y=a}^{y=x} + \int_a^x f^{(k+1)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}dy \\ &= f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(k+1)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}dy\end{aligned}$$

となるので

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+1)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!}dy \qquad (4)$$

を得る。このとき剰余項は

$$|R_n(x)| = |\int_a^x f^{(n+1)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!}dy| \le M|\int_a^x \frac{|x-y|^n}{n!}dy| = M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

と評価される。

等式 (4) は

$$
\begin{aligned}
&f^{(n+1)}\cdot g-(-1)^{n+1}f\cdot g^{(n+1)}\\
&=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}\right)'
\end{aligned}
\tag{5}
$$

に於いて $g(y)=\frac{(x-y)^n}{n!}$ とすれば $g^{(n+1)}=0,$

$$
(-1)^{n-k}g^{(n-k)}(y)=\frac{(x-y)^k}{k!},\quad 0\le k\le n
$$

となるので (5) の両辺を y 変数に就き a から x 迄積分し

$$
\begin{aligned}
\int_a^x f^{(n+1)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!}dy &= \left[\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!}\right]_{y=a}^{y=x}\\
&= f(x)-\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

とする事でも得られる。(5) は逆ライプニッツ則とも謂われるもので

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\right)'\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}\\
&=f^{(n+1)}\cdot g+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}+(-1)^{n}f\cdot g^{(n+1)}\\
&=f^{(n+1)}\cdot g+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}f^{(n-j)}\cdot g^{(j+1)}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}+(-1)^{n}f\cdot g^{(n+1)}\\
&=f^{(n+1)}\cdot g+(-1)^{n}f\cdot g^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

となる事により従う。

(1) から (4) を導くために次の様に考える方法もある。

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(y)dy \\
&= \int_0^{x-a} f'(x-t)dt \\
&= \int_0^{x-a} f'(x-t)\frac{d}{dt}t\ dt \\
&= [f'(x-t)t]_{t=0}^{t=x-a} + \int_0^{x-a} f''(x-t)t\ dt \\
&= f'(a)(x-a) + \int_0^{x-a} f''(x-t)\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2}\right)dt \\
&= f'(a)(x-a) + \left[f''(x-t)\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x-a} + \int_0^{x-a} f'''(x-t)\frac{t^2}{2}dt \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_0^{x-a} f'''(x-t)\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3\cdot 2}\right)dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_0^{x-a} f^{(n+1)}(x-t)\frac{t^n}{n!}dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^{x} f^{(n+1)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!}dy
\end{aligned}
$$

代表的な例を挙げよう。

1. 指数函数：$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\ x \in \mathbb{R}$

(証明)　$f(x) = e^x$ とすると任意の $n \geq 0$ に対し $f^{(n)}(x) = f(x),\ f^{(n)}(0) = f(0) = 1$ であり $|f^{(n)}(x)| \leq e^{|x|}$ であるから

$$
\left| e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}e^{|x|}\cdot|x|^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

2. 正弦函数：$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

(証明)　$f(x) = \sin x$ とすると $f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,$ $f''''(x) = \sin x$ であるから、任意の $n \geq 0$ に対し $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x,$ $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x,$

$f^{(2n)}(0) = 0,\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,\ |f^{(n)}(x)| \leq 1$ となり

$$
\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} \to 0\ (n \to \infty)
$$

3. 余弦函数：$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}$

(証明)　$f(x) = \cos x$ とすると $f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,$
$f''''(x) = \cos x$ であるから、任意の $n \geq 0$ に対し $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x,$
$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x,\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n,\ f^{(2n+1)}(0) = 0,\ |f^{(n)}(x)| \leq 1$ となり

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \to 0\ (n \to \infty)$$

注 1. 指数函数のテイラー展開について
テイラー展開の一般項の形から容易に覚えられる。

注 2. 正弦函数のテイラー展開について

1. 奇数項のみから成る
これは正弦函数は奇函数であることの反映と考えられる。

2. 係数は ±1 を交互に取る
$f^{(k)}(x) = f(x + \frac{k}{2}\pi)$ より $f^{(2n+1)}(0) = f'(n\pi)$ となる。これは正弦函数をグラフに表したとき零点 $n\pi$ に於いて傾き $(-1)^n$ で x 軸を横切る事に対応している。正弦函数の周期性・振動性の反映と考えられる。

3. 最初の項は x である
これは $\frac{\sin x}{x} \to 1 (x \to 0)$ を反映したものである。

注 3. 余弦函数のテイラー展開について

1. 偶数項から成る
これは余弦函数は偶函数であることの反映と考えられる。

2. 係数は ±1 を交互に取る
$f^{(k)}(x) = f(x + \frac{k}{2}\pi)$ より $f^{(2n)}(0) = f'((n - \frac{1}{2})\pi)$ となる。これは余弦函数をグラフに表したとき零点 $(n - \frac{1}{2})\pi$ に於いて傾き $(-1)^n$ で x 軸を横切る事に対応している。余弦函数の周期性・振動性の反映と考えられる。

3. 最初の項は 1 である
これは $\cos 0 = 1$ を反映したものである。

4. 二項級数

$s>0$ に対し $f(x)=(1+x)^s,\ x\in[-1,1]$ を考える。s は整数ならば通常の二項展開

$$f(x)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}x^k,\quad \binom{s}{k}=\frac{s!}{k!(s-k)!}=\frac{s(s-1)\cdots(s-(k-1))}{k!}$$

がテイラー展開を与えている。以下 s は非整数とする。$x>-1$ に対し

$$f^{(k)}(x)=\left(\prod_{j=0}^{k-1}(s-j)\right)(1+x)^{s-k}$$

となる。そこで $\displaystyle\binom{s}{k}=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(s-j)=\frac{s(s-1)\cdots(s-(k-1))}{k!}$ と置くと

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n+1)}(y)dy\\ &= \frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{n!}\int_0^x (x-y)^n(1+y)^{s-n-1}dy\end{aligned}$$

を得る。剰余項 $R_n(x)$ の $n\to\infty$ に於ける収束に就いて考える。n は充分大きいものとして考えて良いので $n\geq[s]+2$ とすると次を得る：

$$\begin{aligned}\left|\frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{n!}\right| &= s\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{s-j}{j}\right|=s\prod_{j=1}^{[s]}\left(\frac{s}{j}-1\right)\cdot\prod_{j=[s]+1}^{n}\left(1-\frac{s}{j}\right)\\ &\leq s\prod_{j=1}^{[s]}\left(\frac{s}{j}-1\right)\equiv C_s\end{aligned}$$

$0\leq x\leq 1$ の場合:　$n\geq[s]+2$ に対し $n-1-s\geq[s]+1-s>0$ 故

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leq C_s\int_0^x (x-y)^n(1+y)^{s-n-1}dy\\ &\leq C_s\int_0^x (x-y)^n dy=\frac{C_s}{n+1}x^{n+1}\leq\frac{C_s}{n+1}\end{aligned}$$

となり

$$\sup_{0\leq x\leq 1}|R_n(x)|\leq\frac{C_s}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$$

を得る。

$-1\leq x\leq 0$ の場合:　先ず $x>-1$ の場合を扱う為 $0<\delta<1$ なる δ を取り閉区間 $[-1+\delta,0]$ 上で考える。$-1+\delta\leq x<y\leq 0$ ならば $0<\delta\leq 1+x<1+y\leq 1$ より $0<(1+x)/(1+y)<1$ となるので

$$\left|\frac{x-y}{1+y}\right|=\left|\frac{1+x}{1+y}-1\right|=1-\frac{1+x}{1+y}\leq 1-(1+x)=-x\leq 1-\delta<1$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\le C_s\left|\int_0^x \left|\frac{x-y}{1+y}\right|^n |1+y|^{s-1}dy\right| \\ &\le C_s(1-\delta)^n\left|\int_0^x |1+y|^{s-1}dy\right| \\ &= C_s(1-\delta)^n\int_x^0 (1+y)^{s-1}dy \\ &= C_s(1-\delta)^n\frac{1}{s}(1-(1+x)^s) \le \frac{C_s}{s}(1-\delta)^n\end{aligned}$$

となり

$$\sup_{-1+\delta\le x\le 0}|R_x(x)| \le \frac{C_s}{s}(1-\delta)^n \to 0\ (n\to\infty)$$

を得る。

最後に $x=-1$ の場合を考える。剰余項は次の様に具体的に計算出来る：

$$\begin{aligned}R_n(-1) &= \frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{n!}\int_0^{-1}(-1-y)^n(1+y)^{s-n-1}dy \\ &= \frac{s(s-1)\cdots(s-n)}{n!}(-1)^n\int_0^{-1}(1+y)^{s-1}dy \\ &= \frac{(n-s)(n-s-1)\cdots(1-s)s}{n!}\left(-\int_0^1(1-t)^{s-1}dt\right) \\ &= \frac{(n-s)(n-s-1)\cdots(1-s)}{n!} \\ &= \prod_{j=1}^n\left(1-\frac{s}{j}\right)\end{aligned}$$

さて $0\le t<1$ ならば $e^t=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\le\sum_{n=0}^\infty t^n=\frac{1}{1-t}$ であるから $j\ge[s]+1$ に対して $1-\frac{s}{j}\le\exp\left(-\frac{s}{j}\right)$ となる。よって $\prod_{j=1}^n\left(1-\frac{s}{j}\right)=\prod_{j=1}^{[s]}\left(1-\frac{s}{j}\right)\cdot\prod_{j=[s]+1}^n\left(1-\frac{s}{j}\right)$ において

$$\begin{aligned}0\le\prod_{j=[s]+1}^n\left(1-\frac{s}{j}\right)\le\prod_{j=[s]+1}^n\exp\left(-\frac{s}{j}\right) &= \exp\left(-\sum_{j=[s]+1}^n\frac{s}{j}\right) \\ &= \exp\left(-s\sum_{j=[s]+1}^n\frac{1}{j}\right) \\ &\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

となるので $\lim_{n\to\infty}R_n(-1)=0$ が従う。

参考文献： ディユドネ，現代解析の基礎，東京図書
S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley
藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學第一巻、内田老鶴圃、1934