アフィン空間

平成 22 年 5 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
“ Anywhere, anywhere, anywhere I lay down my head,
boys, I will call my home,” Tom Waits

1．アフィン空間の定義と基本性質

X を空でない集合、V を係数体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。次の条件（A1) 及び（A2) を満たす X から X への写像の族 $\{\tau_v; v \in V\}$ が与えられているとき X は V **を基準ベクトル空間とするアフィン空間**（アファイン空間）であるという。

（A1）任意の $u, v \in V$ に対して $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$

（A2）任意の $p, q \in X$ に対して唯一つの $v \in V$ が存在して $\tau_v(p) = q$

命題１　（１）$0 \in V$ に対応する写像 τ_0 は X 上の恒等写像である：$\tau_0 = \mathrm{id}$
（２）任意の $v \in V$ に対し τ_v は X から X への全単射である。

(証明)　（１）条件（A2）より、任意の $p \in X$ に対し唯一つの $v \in V$ が存在して $\tau_v(p) = p$ となる。この関係式と条件（A1）を用いて $\tau_0(p) = \tau_0(\tau_v(p)) = \tau_{0+v}(p) = \tau_v(p) = p$ を得る。
（２）条件（A1）及び（１）を用いる。τ_v の単射性は $\tau_{-v} \circ \tau_v = \tau_{(-v)+v} = \tau_0 = \mathrm{id}$ より従い、全射性は $\tau_v \circ \tau_{-v} = \tau_{v+(-v)} = \tau_0 = \mathrm{id}$ より従う。

定義　（A2）で与えられる v を $q - p$ と表す。X には算法は導入されていないが、その「差」$q - p$ は V の元 v として定まる：$q - p = v \in V$
また $\tau_v(p)$ を $p + v$ と表す。X には算法は導入されていないが $p \in X$ の $v \in V$ による「平行移動」$p + v$ は X の元 $\tau_v(p)$ として定まる：$p + v = \tau_v(p) \in X$

この記法に従えば $q = \tau_v(p)$ なる関係は

$$q = p + (q - p), \quad (p + (q - p)) - p = q - p$$

と表される。また次の関係が成立つ。

命題２　$p, q, r \in X$ に対し
（１）$-(q - p) = p - q$
（２）$p = q \Leftrightarrow p - q = q - p = 0$
（３）$(p - q) + (q - r) + (r - p) = 0$

(証明)　（１）$v = q - p \Leftrightarrow q = \tau_v(p) \Leftrightarrow \tau_{-v}(q) = p \Leftrightarrow -v = p - q$
（２）$p = q \Leftrightarrow \tau_0(p) = q \Leftrightarrow v = 0 = p - q \Leftrightarrow p - q = q - p = 0$

（3）$\tau_v(p)=q,\ \tau_u(q)=r$ とすると $v=q-p, u=r-p$ であり $\tau_{u+v}(p)=\tau_v(\tau_u(q))=\tau_u(p)=r$ となるから $r-p=u+v$ 即ち $0=-v-u+(r-p)=(p-q)+(p-r)+(r-p)$ を得る。

定義　$p,q\in X$ に対し、写像 $\gamma_{p,q}:[0,1]\to X$ が

$$\gamma_{p,q}(t)=p+t(q-p)=\tau_{t(q-p)}(q)=\tau_{tv}(q),\ t\in[0,1]$$

で定まる。ここに $v=q-p$ とする。$\gamma_{p,q}$ を $p=\gamma_{p,q}(0)$ を始点、$q=\gamma_{p,q}(1)$ を終点とする**有向線分**と謂う。X の有向線分全体のなす集合を Γ とし $p\in X$ を始点とする有向線分全体のなす集合を Γ_p とする：

$$\Gamma=\{\gamma_{p,q}:[0,1]\to X;p,q\in X\}$$
$$\Gamma_p=\{\gamma_{p,q}:[0,1]\to X;q\in X\}$$

命題３　Γ_p に和及びスカラー倍を

$$\gamma_{p,q}+\gamma_{p,q'}=\gamma_{p,p+(q-p)+(q'-p)},\quad q,q'\in X$$

$$a\gamma_{p,q}=\gamma_{p,p+a(q-p)},\quad q\in X,\ a\in\mathbb{K}$$

で定めると Γ_p はベクトル空間となる。

（証明）　Γ_p に於ける和に関する可換則及び結合則は V に於ける和の可換則及び結合則から従う。和に関する零元は $\gamma_{p,p}$ である。実際、任意の $q\in X$ に対し

$$\gamma_{p,q}+\gamma_{p,p}=\gamma_{p,p+(q-p)+(p-p)}=\gamma_{p,p+(q-p)+0}=\gamma_{p,q}$$

となる。和に関する $\gamma_{p,q}$ の逆元は $(-1)\gamma_{p,q}=\gamma_{p,p+(-1)(q-p)}$ である。実際

$$\begin{aligned}\gamma_{p,q}+(-1)\gamma_{p,q}&=\gamma_{p,q}+\gamma_{p,p+(-1)(q-p)}\\&=\gamma_{p,p+(q-p)+((p+(-1)(q-p))-p)}\\&=\gamma_{p,p+(q-p)+(-1)(q-p)}=\gamma_{p,p}=0\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}(a+b)\gamma_{p,q}&=\gamma_{p,p+(a+b)(q-p)}=\gamma_{p,p+a(q-p)+b(q-p)}\\&=\gamma_{p,p+((p+a(q-p))-p)+((p+b(q-p))-p)}\\&=\gamma_{p,p+a(q-p)}+\gamma_{p,p+b(q-p)}\\&=a\gamma_{p,q}+b\gamma_{p,q},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(\gamma_{p,q}+\gamma_{p,q'})&=a\gamma_{p,p+(q-p)+(q'-p)}\\&=\gamma_{p,p+a((q-p)+(q'-p))}=\gamma_{p,p+a(q-p)+a(q'-p)}\\&=\gamma_{p,p+((p+a(q-p))-p)+((p+a(q'-p))-p)}\\&=\gamma_{p,p+a(q-p)}+\gamma_{p,p+a(q'-p)}\\&=a\gamma_{p,q}+a\gamma_{p,q'}\end{aligned}$$

により分配則が従う。更に

$$
\begin{aligned}
(ab)\gamma_{p,q} &= \gamma_{p,p+(ab)(p-q)} = \gamma_{p+a(b(p-q))} \\
&= \gamma_{p,p+a((p+b(p-q))-p)} \\
&= a\gamma_{p,p+b(p-q)} = a(b\gamma_{p,q}), \\
1\gamma_{p,q} &= \gamma_{p,p+1(q-p)} = \gamma_{p,p+(q-p)} = \gamma_{p,q}
\end{aligned}
$$

が成立つので Γ_p はベクトル空間となる。

定義　ベクトル空間 Γ_p の元を点 p を始点とする**束縛ベクトル**と謂う。

命題 4　$p \in X$ に対して定まるベクトル空間 Γ_p から基準ベクトル空間 V への写像

$$T_p\colon \Gamma_p \to V \quad \text{が}$$

$$T_p(\gamma_{p,q}) = q - p,\ q \in X$$

で定まり線型同型写像となる。

（証明）　T_p の線型性は

$$
\begin{aligned}
T_p(\gamma_{p,q} + \gamma_{p,q'}) &= T_p(\gamma_{p,p+(q-p)+(q'-p)}) \\
&= (p + (q-p) + (q'-p)) - p \\
&= (q-p) + (q'-p) \\
&= T_p(\gamma_{p,q}) + T_p(\gamma_{p,q'}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_p(a\gamma_{p,q}) &= T_p(\gamma_{p,p+a(q-p)}) \\
&= (p + a(q-p)) - p \\
&= a(p-q) \\
&= aT_p(\gamma_{p,q})
\end{aligned}
$$

より従う。T_p の単射性は

$$
\begin{aligned}
T_p(\gamma_{p,q}) = 0 \Leftrightarrow q - p = 0 \Leftrightarrow p = q \\
\Rightarrow \gamma_{p,q} = \gamma_{p,p} = 0
\end{aligned}
$$

より従い T_p の全射性は任意に与えた $v \in V$ に対して $\gamma_{p,p+v} \in \Gamma_p$ は

$$T_p(\gamma_{p,p+v}) = (p+v) - p = v$$

を満たすことから従う。

命題５　Γ の二つの元 $\gamma_{p,q}, \gamma_{p',q'}$ に対し

$$\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'} \Leftrightarrow q - p = q' - p'$$

と定めると $\sim$ は同値関係となる。Γ を同値関係 $\sim$ で割った
商集合　$\Gamma/\sim$ を W とする：$W = \Gamma/\sim$
$\gamma_{p,q}$ の属す同値類を $[\gamma_{p,q}] \in W$ と表すと終点と始点との差 $q - p$ は同値類の代表元の取り方に依らず V の一定の値として定まる。これにより定まる写像

$$T : W \ni [\gamma_{p,q}] \mapsto q - p \in V$$

は全単射となる。W の元の和とスカラー倍を次で定義する：

$$[\gamma_{p,q}] + [\gamma_{p',q'}] = T^{-1}((q - p) + (q' - p'))$$

$$a[\gamma_{p,q}] = T^{-1}(a(q - p))$$

これにより W はベクトル空間となり $T : W \to V$ は線型同型となる。

（証明）　$\sim$ は同値関係となる事は次の様にして確かめられる：

- $\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p,q} \Leftrightarrow q - p = q - p$
- $\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'} \Leftrightarrow q - p = q' - p' \Leftrightarrow q' - p' = q - p \Leftrightarrow \gamma_{p',q'} \sim \gamma_{p,q}$
- $\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'}, \gamma_{p',q'} \sim \gamma_{p'',q''} \Leftrightarrow q - p = q' - p', q' - p' = q'' - p''$

$$\Rightarrow q - p = q'' - r'' \Leftrightarrow \gamma_{p,q} \sim \gamma_{p'',q''}$$

$\gamma_{p,q}$ の属す同値類 $[\gamma_{p,q}]$ は

$$\begin{aligned}[\gamma_{p,q}] =& \{\gamma_{p',q'}; \gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'}\} \\ =& \{\gamma_{p',q'}; q - p = q' - p'\}\end{aligned}$$

となるから $q - p$ は代表元の取り方に依らず定まり $T : W \ni [\gamma_{p,q}] \mapsto q - p \in V$ が定まる。T が全単射となる事は次の様にして確かめられる：

- 任意の $u \in V$ 及び任意の $p \in X$ に対し $T([\gamma_{p,p+u}]) = u$
- $T([\gamma_{p,q}]) = T([\gamma_{p',q'}]) \Leftrightarrow q - p = q' - p' \Leftrightarrow [\gamma_{p,q}] = [\gamma_{p',q'}]$

W には T によって V のベクトル空間の構造が入り零元は $[\gamma_{p,p}]$ となる。$[\gamma_{p,q}]$ の（和に関する）逆元 $-[\gamma_{p,q}]$ は $[\gamma_{q,p}]$ で与えられる。T の線型性は W の和とスカラー倍の定義より従う。

定義　ベクトル空間 $W = \Gamma/\sim$ の元を**自由ベクトル**と謂う。

定義　$p \in X$ に対し $V_p = \{(p, u); u \in V\}$ と置き V_p の元の和とスカラー倍を

$$(p, u) + (p, v) = (p, u + v)$$

$$a(p,u)=(p,au)$$

で定義すると V_p はベクトル空間となる。V_p の零元は $(p,0)$ であり (p,u) の（和に関する）逆元 $-(p,u)$ は $(p,-u)$ で与えられる。ベクトル空間 V_p の元 $(p,q-p)$ を点 p に関する点 q の**位置ベクトル**と謂う。

命題６　$p\in X$ に対して V_p から V への写像 π_p を $\pi_p((p,u))=u$ で定めると $\pi_p:V_p\to V$ は線型同型となる。Γ_p から V_p への写像 S_p を $S_p(\gamma_{p,q})=(p,q-p)$ で定めると $S_p:\Gamma_p\to V_p$ は線型同型であり $\pi_p\circ S_p=T_p$ が成立つ。

（証明）　π_p の線型性は

$$\begin{aligned}&\pi_p((p,u)+(p,v))=\pi_p((p,u+v))=u+v=\pi_p((p,u))+\pi_p((p,v))\\&\pi_p(a(p,u))=\pi_p((p,au))=au=a\pi_p((p,u))\end{aligned}$$

から従い逆写像 π_p^{-1} は $\pi_p^{-1}(u)=(p,u)$ で与えられる。S_p の定義より $\pi_p\circ S_p=T_p$ が従い $S_p=\pi_p^{-1}\circ T_p$ より S_p は線型同型となる。

$\Gamma=\{\gamma_{p,q};p,q\in X\}=\bigcup_{p\in X}\Gamma_p$ から $X\times V=\bigcup_{p\in X}V_p$ への写像 S が $S(\gamma_{p,q})=(p,q-p)$ で定まる。$p\in X$ を一つ固定すると S の作用は S_p に相当するものとなる。以上を図式化すると次の様になる：

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma=\bigcup_{p\in X}\Gamma_p \arrow[rr,"S"] \arrow[d] \arrow[ddl] & & \bigcup_{p\in X}V_p=X\times V \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
 & \Gamma_p \arrow[rr,"S_p"] \arrow[dr,"T_p"'] & & V_p \arrow[dl,"\pi_p"] & \\
\Gamma/\sim\,=W \arrow[rr,"T"] & & V \arrow[rr,equal] & & V
\end{tikzcd}$$

ここで左端の矢印は同値類を与える写像、右端は第二成分への射影であり S_p,T_p,π_p,T は線型同型写像である。$S:\Gamma\to X\times V$ は X 上のバンドル同型と見做すことが出来る。

２．アフィン部分空間

命題７　（空でない）集合 X をベクトル空間 V を基準とするアフィン空間とする。X の部分集合 Y に対し次は同値である。
（１）V の部分空間 W が存在し、任意の $p\in Y$ に対し

$$\begin{aligned}Y&=\{\tau_w(p)\in X;w\in W\}\\&=\{q=p+w\in X;w\in W\}\\&=\{q\in X;q-p\in W\}=p+W\end{aligned}$$

（２）任意の $p \in Y$ に対し $Y-p$ は V の部分空間である。ここに

$$\begin{aligned} Y-p &= \{q-p \in V; q \in Y\} \\ &= \{w \in V; \tau_w(p) \in Y\} \end{aligned}$$

同値な (１)(２) が成立つとき任意の $p \in Y$ に対し $Y = p + W$ であり Y は V の部分空間 $W = Y - p$ を基準ベクトル空間とするアフィン空間となる。

(証明)（１）⇒（２）: V の部分空間 W が存在して Y が（１）の様に表されているものとすると

$$q \in Y \Leftrightarrow q-p \in W$$

なる関係により $Y-p$ は V の部分空間となる。
（２）⇒（１）: $Y-p$ が V の部分空間ならば、これを W と表すと

$$q-p \in W \Leftrightarrow q \in Y$$

なる関係により（１）が従う。
さて、上の (１)(２) が成立するとき Y は $W = Y-p$ を基準ベクトル空間とするアフィン空間となることを示そう。任意の $w \in W, q \in Y$ に対し

$$\tau_w(q) = q + w = p + (q-p) + w$$

と表すと $q-p \in W$ 故 $(q-p)+w \in W$ となるので $\tau_w(q) \in Y$ が従い τ_w は Y から Y への写像となる。従って $\{\tau_w; w \in W\}$ が (A1)(A2) を満たすことを示せば良い。$w, w' \in W$ に対し $w + w' \in W$ であり $w, w' \in V$ と見做せば $\tau_w \circ \tau_{w'} = \tau_{w+w'}$ は成立しているので (A1) を得る。任意の $q, r \in Y$ に対し $p-q, r-p \in W$ であり

$$q = (q-p) + p = (q-p) - (r-p) + r = ((q-p)-(r-p)) + r$$

に於いて $(q-p)-(r-p) \in W$ であるので (A2) を得る。

定義　命題７の同値な条件 (１),(２) を満たす Y を X の部分アフィン空間と謂う。

３．アフィン空間の積

(空でない）集合 X, Y を夫々基準ベクトル空間 V, W を持つアフィン空間とし、対応する写像の族を $\{\tau'_v; v \in V\}, \{\tau''_w; w \in W\}$ とする。X と Y の直積空間 $X \times Y$ に於いて

$$\tau_{(v,w)}(p,q) = (\tau'_v(p), \tau''_w(p)), \qquad (p,q) \in X \times Y,\ (v,w) \in V \times W$$

と置くと

$$\begin{aligned} &(\tau_{(v',w')} \circ \tau_{(v,w)})(p,q) = \tau_{(v',w')}(\tau_{(v,w)}(p,q)) \\ &= \tau_{(v',w')}(\tau'_v(p), \tau''_w(q)) = (\tau'_{v'}(\tau'_v(p)), \tau''_{w'}(\tau''_w(q))) \\ &= (\tau'_{v'+v}(p), \tau''_{w'+w}(q)) = \tau_{(v'+v, w'+w)}(p,q) \\ &= \tau_{(v',w')+(v+w)}(p,q) \end{aligned}$$

となる。ここに $(v'+v,w'+w)=(v',w')+(v,w)$ は $V\times W$ にベクトル空間の構造を与えて成立する等式と考えている。また、任意の $p,p'\in X,q,q'\in Y$ に対して唯一つの $(v,w)\in V\times W$ が定まり $\tau'_v(p)=p',\tau''_w(q)=q'$ となることから $\tau_{(v,w)}(p,q)=(p',q')$ が従う。以上より直積空間 $X\times Y$ はベクトル空間 $V\times W$ を基準とするアフィン空間となる。アフィン空間 $X\times Y$ をアフィン空間 X,Y の積と謂う。

４．アフィン写像

定義　X を基準ベクトル空間 V を持つアフィン空間、Y を基準ベクトル空間 W を持つアフィン空間とする。X から Y への写像 f がアフィン写像であるとは線型写像 $T_f:V\to W$ が存在して任意の $p,q\in X$ に対し

$$f(q)-f(p)=T_f(q-p)$$

が成立つ事を謂う。全単射はアフィン写像をアフィン同型写像と謂いアフィン空間 X と Y はアフィン同型であるとは X から Y へのアフィン同型写像が存在する事を謂う。

命題８　X,Y をアフィン空間で基準ベクトル空間を夫々V,W とする。このとき次は同値である。
（１）X と Y はアフィン同型である。
（２）V と W は線型同型である。

（証明）**（１）⇒（２）：**全単射 $f:X\to Y$ と線型写像 $T_f:V\to W$ が存在して任意の $p,q\in X$ に対し $f(q)-f(p)=T_f(q-p)$ が成立つものとする。T_f が全単射である事を示そう。一つの $p\in X$ を取って置く。任意の $w\in W$ に対し $f(p)+w$ は Y の元として定まり $f:X\to Y$ は全射であるから $f(q)=f(p)+w$ なる $q\in X$ が存在する。このとき $q-p\in V$ であり $w=f(q)-f(p)=T_f(q-p)$ が成立つので T_f は全射である。
次に $u\in V$ は $T_f(u)=0$ を満たすものとすると $0=T_f((p+u)-p)=f(p+u)-f(p)$ となり f の単射性より $p+u=p$ が従い $u=0$ を得る。よって T_f は単射である。

（２）⇒（１）：線型同型写像 $T:V\to W$ が与えられているものとし X と Y から一つずつ元を取り $p_0\in X,p'_0\in Y$ とする。X から Y への写像 f を $f(p)=p'_0+T(p-p_0)$ と定める。このとき $p,q\in X$ に対し

$$\begin{aligned}f(q)-f(p)&=(p'_0+T(q-p_0))-(p'_0+T(p-p_0))\\&=T((q-p_0)-(p-p_0))=T(q-p)\end{aligned}$$

が成立つ。$f(q)=f(p)$ なら $T(q-p)=0$ となり T の単射性より $q=p$ が従い f の単射性を得る。任意の $q'\in Y$ に対し $q'-p'_0\in W$ であるから T の全射性により $u\in V$ が在って $T(u)=q'-p'_0$ となる。このとき $p=p_0+u\in X$ は $f(p)=f(p_0+u)=p'_0+T((p_0+u)-p_0)=p'_0+T(u)=p'_0+(q'-p'_0)-q'$ を満たし f の全射性が従う。

参考文献：新井朝雄、物理現象の数学的諸原理－現代数理物理学入門－、共立出版
新井朝雄、物理の中の対称性、日本評論社
佐武一郎、線型代数学、裳華房