相加・相乗平均の不等式とその応用

平成 19 年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

n 個の正の数 $a_1, \cdots, a_n$ に対し

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

を相加平均 (算術平均 arithmetic mean),

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

を相乗平均 (幾何平均 geometric mean) と謂う。この二種類の平均に関しては単純な関係式

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \tag{1}$$

が成立する。等号は $a_1 = \cdots = a_n$ の場合にのみ実現される。対数函数と指数函数の関係により、(1) は

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \log a_j \leq \log\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \tag{2}$$

と同値である。不等式 (2) は函数 $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が上に凸 (convex) である事の表れである。(1) は n に関する帰納法を用いて初等的に証明する事も出来る。

さて、a を $a \neq 1$ なる正の数とし $(n+1)$ 個の数

$$a_1 = 1, \quad a_j = a \ (1 \leq j \leq n)$$

を考えよう。このときその相加・相乗平均はそれぞれ

$$\frac{1 + na}{n+1}, \quad (a^n)^{1/(n+1)}$$

であるから、(1) により $a > 0,\ a \neq 1$ に対して

$$a^{n/(n+1)} < \frac{1 + na}{n+1} \tag{3}$$

が成立する。このとき $a=1+\frac{1}{n},\ a=1-\frac{1}{n}$ と置く事により、それぞれ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)} < \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}, \tag{4}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)} < \frac{n}{n+1} \tag{5}$$

が得られる。不等式 (4) は

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \tag{6}$$

と同値であり、不等式 (5) は

$$\begin{array}{ccc} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n} & < & \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ \Big\| & & \Big\| \\ \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-n} & & \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \end{array}, \tag{7}$$

即ち

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \tag{8}$$

と同値となる。(6) は $a_n \equiv (1+1/n)^n$ が狭義単調増加数列を成し、(7) は $b_n \equiv (1+1/n)^{n+1}$ が狭義単調減少数列を成す事を示している。一般に $a_n < b_n$ であるから

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_1$$

であり、実数の順序完備性により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束列となる。更に、$b_n/a_n = 1+1/n \to 1$ であるから $\{a_n\}, \{b_n\}$ を両者の収束極限は等しい事が分かる。この共通の値を Napier の数 e と表す：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

尚、$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} (n \geq 2)$ は次の様にして直接証明する事も出来る。これには ($n \geq 2$ についての帰納法で証明される) 不等式

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad x > -1$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Big/ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&> \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Big/ \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \\
&> \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{(n^2+n-1)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1
\end{aligned}
$$

とすれば良い。

さて、$a_n < e < b_n (\forall n)$ を用いると $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} a_k < e^{n-1} < \prod_{k=1}^{n-1} b_k$ が従い

$$
\prod_{k=1}^{n-1} a_k = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!}
$$

$$
\prod_{k=1}^{n-1} b_k = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}} = \frac{n^n}{(n-1)!} = \frac{n^{n+1}}{n!}
$$

であるから $en^n e^{-n} < n! < en^{n+1} e^{-n} (n \geq 2)$ を得る。これはスターリングの公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} (n \to \infty)$ の粗い代用不等式と見做す事が出来る。

最後に (1) の証明を与えて置こう。先ず次の命題を示そう。

命題　n を正の整数とする。次は同値である。

(1)　n 個の正の実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対し次の不等式が成立つ。

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$$

(2)　n 個の正の実数 $b_1, \cdots, b_n$ で $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j = 1$ なるものに対し次の不等式が成立つ。

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \geq n$$

(証明)　(1) $\Rightarrow$ (2)：与えられた $b_1, \cdots, b_n$ に対し $a_j = b_j$ として (1) を適用すれば良い。
(2)⇒(1)：与えられた $a_1, \cdots, a_n$ に対し $b_j = a_j \Bigg/ \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$ とすれば $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j = 1$ であるから (2) を適用し

$$n \leq \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j}{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}}$$

を得る。これは (1) に外ならない。

そこで上の命題の (2) を n に関する帰納法で証明しよう。$n = 1$ の場合は等号で成立つ。$n \geq 2$ とし次を仮定する：
$(n-1)$ 個の正の実数 $b'_1, \cdots, b'_{n-1}$ で $\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} b'_j = 1$ なるものに対し不等式

$$\sum_{j=1}^{n-1} b'_j \geq n-1$$

が成立つ。

さて n 個の正の実数 $b_1, \cdots, b_n$ で $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j = 1$ なるものを取る。全ての j に対し $b_j > 1$ であれば $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} b_j > 1$ となり、仮定に反するので $b_{j_0} \leq 1$ なる j_0 が存在する。このとき $j \neq j_0$

なる任意の j に対し $b_j < 1$ であれば $\prod_{j=1}^{n} b_j < 1$ となり仮定に反するので $b_{k_0} \geq 1$ なる k_0 が存在する。さて $(n-2)$ 個の正の実数 $\{b_j; j \neq j_0, k_0\}$ 及び一つの正の実数 $b_{j_0}b_{k_0}$ を合せた $(n-1)$ 個の正の実数は $(b_{j_0}b_{k_0}) \prod_{j \neq j_0, k_0} b_j = \prod_{j=1}^{n} b_j = 1$ を満たすので帰納法の仮定より不等式

$$b_{j_0}b_{k_0} + \sum_{j \neq j_0, k_0} b_j \geq n-1$$

が成立つ。$1 - b_{j_0} \geq 0$ 及び $1 - b_{k_0} \leq 0$ より

$$(1-b_{j_0})(1-b_{k_0}) \leq 0$$

即ち

$$b_{j_0}b_{k_0} \leq b_{j_0} + b_{k_0} - 1$$

が従うので、これらの不等式より

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \geq n$$

が得られる。以上より帰納法は完結する。

参考文献：中村滋、「エレガントな解答をもとむ」、数学セミナー 2006 年 2 月号
上見練太郎、勝股脩、加藤重雄、久保田幸次、神保秀一、山口佳三、「微分」、共立出版株式会社
S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley