二項係数

平成 19 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

実数 a, b に対して、その和 $a+b$ の n 乗は二項展開 binomial expansion

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

によって表される。ここに現れる $\binom{n}{j}$ が二項係数 binomial coefficient で

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

で定義される。但し

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j = n(n-1)\cdots 1$$

は n の階乗 factorial で $0! = 1$ と約束する。

定義により

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j},$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

は直ちに従う。n に関する帰納法による二項展開の標準的な証明は次の通りである：先ず $n=1$ の場合は両辺 $a+b$ となり成立する。$n \geq 2$ とし $n-1$ に対する二項展開

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^{n-1-j} b^j$$

が成立つと仮定して、n に対する二項展開を導こう。仮定より

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} \\
&= a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1} \\
&= a\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^{n-1-j}b^j + b\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^{n-1-j}b^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^{n-j}b^j + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^{n-1-j}b^{j+1} \\
&= a^n + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}a^{n-1}b^j + \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^k \\
&= a^n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}\right)a^{n-j}b^j + b^n \\
&= a^n + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j + b^n \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j
\end{aligned}
$$

となるから帰納法が完結する。ここに次の等式を用いた：

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} &= \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} + \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{j!(n-j)!}((n-j)+j) = \frac{n(n-1)}{j!(n-j)!} = \binom{n}{j}
\end{aligned}
$$

二項展開の別証明： a または b が 0 でない場合は夫々b/a または a/b を考える事により、問題は $x \in \mathbb{R}$ についての等式 $(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$ と同値となる。この等式を示す事が問題となる。

(1) 微分を用いる方法

$n \geq 1$ に対し

$$f_n(x) = (1+x)^n - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$$

により函数 f_n を定める。帰納法により全ての n に対し $f_n = 0$ である事を示そう。定義により

$$
\begin{aligned}
&f_n(0) = 0, \quad n \geq 1, \\
&f_1(x) = (1+x) - \sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}x^j = 0, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

は直ちに従う。$k \geq 2$ に対し f_k を微分とすると

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= k(1+x)^{k-1} - \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} j x^{j-1} \\ &= k\left[(1+x)^{k-1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} x^{j-1}\right] \\ &= k f_{k-1}(x) \end{aligned}$$

となる。よって $k=2$ の場合

$$f_2'(x) = 2f_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

となり、$f_2(0)=0$ と合せて $f_2 = 0$ を得る。$k \geq 3$ とし $f_{k-1}=0$ と仮定すると

$$f_k'(x) = k f_{k-1}(x) = 0 \text{ かつ } f_k(0) = 0$$

となるので $f_k = 0$ となり帰納法は完結する。

(2) 積分を用いる方法

$n \geq 2$ に対し $(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j,\ x \in \mathbb{R},$ なる等式を仮定する。

微分積分の基本公式と帰納法の仮定を用いて

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + n\int_0^x (1+t)^{n-1} dt \\ &= 1 + n\int_0^x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j dt \\ &= 1 + n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \int_0^x t^j dt \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{n}{j+1} x^{j+1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} x^{j+1} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \end{aligned}$$

を得て帰納法は完結する。

二項係数は、函数の積の微分法であるライプニッツ則

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)}$$

にも現れる。ここに f, g は一変数函数で必要な滑らかさを持つもので $f^{(k)}$ は f の k 階導函数とする。ライプニッツ則の標準的な証明は n に関する帰納法に基づくもので、二項展開の標準的な証明と多くの共通部分をもつ。そこでこの二つの関係について考えよう。先ずライプニッツ則を $f(x) = e^{ax},\ g(x) = e^{bx}$ に適用すると、左辺は $(fg)(x) = e^{(a+b)x}$ より

$$(fg)^{(n)}(x) = (a+b)^n e^{(a+b)x}$$

となり、右辺は

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \right) e^{(a+b)x}$$

となるので二項展開の式が導かれる。

　次に、二項展開からライプニッツ則を導く為にフーリエ変換

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

を用いてみよう。合成積 $*$ を用いて

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= (2\pi)^{1/2} (\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} * \hat{g}))^{(n)}(x) \\ &= (2\pi)^{1/2} (\mathcal{F}^{-1}(i\xi)^n (\hat{f} * \hat{g}))(x) \end{aligned}$$

と表し、フーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を取る対象 $(i\xi)^n(\hat{f} * \hat{g})$ 、特に $\xi^n = ((\xi - \eta) + \eta)^n$ に二項展開を用いると

$$\begin{aligned} (i\xi)^n (\hat{f} * \hat{g})(\xi) &= i^n \xi^n \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi - \eta) \hat{g}(\eta) d\eta \\ &= i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \eta)^{n-j} \hat{f}(\xi - \eta) \cdot \eta^j \hat{g}(\eta) d\eta \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{\mathbb{R}} (i(\xi - \eta))^{n-j} \hat{f}(\xi - \eta) \cdot (i\eta)^j \hat{g}(\eta) d\eta \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f^{(n-j)}}(\xi - \eta) \cdot \widehat{g^{(j)}}(\eta) d\eta \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \widehat{f^{(n-j)}} * \widehat{g^{(j)}} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f^{(n-j)}} * \widehat{g^j}) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)} \end{aligned}$$

を得る。