コンパクト性の方法に依る非線型発展方程式の解の構成

平成 22 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ガレルキン法に代表される様なコンパクト性の方法に基づいた非線型発展方程式の初期値問題の解法に就いて纏めて置こう。議論の枠組として空間の三つ組を導入する。

H を内積 $(\cdot|\cdot)$ の定義されたヒルベルト空間、V と W を二つの反射的バナッハ空間とし次の条件 (i)(ii) を仮定する：

(i) $V \subset H \subset W$ であり埋込は連続で稠密である。

(ii) $W \times V$ 上の非退化連続一次半形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : W \times V \to \mathbb{C}$ が存在し任意の $(u,v) \in H \times V$ に対し $\langle u,v \rangle = (u|v)$ が成立つ。

相速度ベクトル場 $f : \mathbb{R} \times H \to W$ 及びその近似列 $\{f_n\}$ に対し次の条件 (I)(II)(III) を仮定する。但し $\|u\|^2 = (u|u), u \in H$ とする。

(I) $f \in C_w(\mathbb{R} \times H; W)$ であり単調増加函数 $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $(t,v) \in \mathbb{R} \times V$ に対し $\mathrm{Re}\langle f(t,v), v \rangle \leq \beta(\|v\|^2)$ が成立つ。

(II) $\{f_n\} \subset C_w(\mathbb{R} \times H; H)$ であり任意の $(t,u) \in \mathbb{R} \times H$ に対し $\mathrm{Re}(f_n(t,u)|u) \leq \beta(\|u\|^2)$ が成立つ。

(III) 次を満たす H の稠密部分集合 D が存在する：

(a) 任意の $T, r > 0$ 及び任意の $v \in D$ に対し $M = M(T,r,v) > 0$ が存在し $\|u_j\| \leq r$ なる任意の列 $\{u_j\} \subset H$ に対し

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{j \geq 1} \sup_{t \in [0,T]} |(f_n(t,u_j)|v)| \leq M$$

(b) 任意の $(t,u) \in \mathbb{R} \times H$ と u に（H で）弱収束する任意の列 $\{u_n\} \subset H$ 及び任意の $v \in D$ に対し $\lim_{n \to \infty} (f_n(t,u_n)|v) = \langle f(t,u), v \rangle$

定理　(V,H,W) を (i)(ii) を満たす三つ組とし $f : \mathbb{R} \times H \to W$ 及び $f_n : \mathbb{R} \times H \to H$ は (I)(II)(III) を満たすものとする。このとき任意の $u_0 \in H$ に対し $T_* \in (0,\infty]$ 及び $u \in C_w([0,T_*);H) \cap C_w^1([0,T_*);W)$ が存在し $u(0) = u_0$ 且つ任意の $t \in [0,T_0)$ に対しその弱導函数 u' は

$$u'(t) = f(t,u(t))$$

を満たす。T_* は次の微分方程式

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2\beta(\rho(t)),\ \ t > 0 \\ \rho(0) = \|u_0\|^2 \end{cases}$$

の（極大）解 ρ の極大存在時刻を T_0 とすると $T_0 \le T_*$ を満たし任意の $t \in [0, T_0)$ に対し不等式

$$\|u(t)\|^2 \le \rho(t)$$

が成立つ。更に

$$\|u(t) - u_0\| \to 0 \ (t \downarrow 0)$$

が成立つ。

註１　$r \ge \|u_0\|^2$ に対し

$$\sigma(r) = \int_{\|u_0\|^2}^{r} \frac{1}{2\beta(s)} ds$$

と置くと $\sigma : [\|u_0\|^2, \infty) \to [0, \infty]$ が単調増加連続函数として定まる。このとき ρ は

$$\rho(t) = \inf\{r \ge \|u_0\|^2; \sigma(r) \ge t\},\ \ t \in [0, T)$$

で与えられる。$\rho(0) = \|u_0\|^2$ であり、任意の $r > \|u_0\|^2$ に対し $\sigma(r) = \infty$ ならば（特に β が $\|u_0\|^2$ の或る近傍で 0 ならば）$\rho(t) \equiv \|u_0\|^2$ である。

註２　定理１は「解の存在」を述べているもので「解の一意性」について言及しているものではない。

註３　**（ガレルキン法との関係）**　バナッハ空間 V が可分な場合、有限次元部分空間の列 $\{M_n\}$ を選んで $\dim_{\mathbb{C}} M_n = n$,

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots \subset V$$

且つ $\bigcup_{n \ge 1} M_n$ は V で稠密とする事が出来る。M_n は H の部分空間でもあるから正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を選ぶ事が出来 $u \in H$ に対し

$$P_n u = \sum_{k=1}^{n} (u|e_k) e_k$$

とすれば H から M_n への直交射影 P_n が定まる。P_n は W から M_n への線型作用素として

$$P_n w = \sum_{k=1}^{n} \langle w, e_k \rangle e_k,\ w \in W$$

と拡張される。P_n は W から M_n への有界作用素であり $P_n^2 = P_n$ 且つ

$$\langle w', P_n w \rangle = \langle P_n w, w' \rangle,\ \ w, w' \in W$$

が成立つ。実際 P_n の定義より $1 \leq j \leq n$ に対し

$$P_n e_j = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} (e_j | e_k) e_k = e_j$$

となるので任意の $w \in W$ に対し

$$P_n^2 w = \sum_{k=1}^{n} \langle w, e_k \rangle P_j e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle w, e_k \rangle e_k = P_n w$$

が従い任意の $w, w' \in W$ に対し

$$\begin{aligned}\langle w', P_n w \rangle =& \langle w', \sum_{k=1}^{n} \langle w, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle w, e_k \rangle} \langle w', e_k \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle w', e_k \rangle e_k, w \rangle \\ =& \langle P_n w', w \rangle\end{aligned}$$

が成立つ。そこで $f \in C_w(\mathbb{R} \times H; W)$ 及び $(t, u) \in \mathbb{R} \times H$ に対し $f_n(t, u) = P_n f(t, P_n u)$ と置くと $f_n \in C_w(\mathbb{R} \times H; H)$ であり

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(f_n(t,u)|u) &= \mathrm{Re}(P_n f(t, P_n u)|u) \\ &= \mathrm{Re}(P_n f(t, P_n u)|P_n u) \\ &= \mathrm{Re}\langle P_n f(t, P_n u), P_n u \rangle \\ &= \mathrm{Re}\langle f(t, P_n u), P_n u \rangle \\ &\leq \beta(\|P_n u\|^2) \leq \beta(\|u\|^2)\end{aligned}$$

となるので (II) が従う。

さて $D = \bigcup_{n \geq 1} M_n$ とし $T, r > 0$ 及び $\|u_j\| \leq r$ なる任意の列 $\{u_j\} \subset H$ を与える。任意の $n, j \geq 1$ に対し $\|P_n u_j\| \leq \|u_j\| \leq r$ となり $[0, T] \times \{u \in H; \|u\| \leq r\}$ は $\mathbb{R} \times H$ の有界閉集合であるから $[0, T] \times \{P_n u_j \in H; n, j \geq 1\}$ は $\mathbb{R} \times H$ の弱点列コンパクト集合を成す。$f \in C_w(\mathbb{R} \times H; W)$ より $f([0, T] \times \{P_n u_j\})$ は W の弱点列コンパクト集合となり特に有界集合を成す：

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{j \geq 1} \sup_{t \in [0,T]} \|f(t, P_n u_j)\|_W \equiv M_{T,r} < \infty$$

任意の $v \in D$ に対し $n_0 \geq 1$ が存在し任意の $n \geq n_0$ に対し $v \in M_n$ 即ち $P_n v = v$ となるから

$$\sup_{n \geq 1} \|P_n v\|_V = \max(\max_{j \leq n_0} \|P_j v\|_V, \|v\|_V) \equiv M_v < \infty$$

故に

$$\begin{aligned}|(f_n(t, u_j)|v)| &= |(f(t, P_n u_j)|P_n v)| \\ &= |\langle f(t, P_n u_j), P_n v \rangle| \\ &\leq C \|f(t, P_n u_j)\|_W \|P_n v\|_V \\ &\leq C M_{T,r} M_v < \infty\end{aligned}$$

となり (III)(a) が従う。

最後に (III)(b) を示そう。
任意の $(t,u)\in\mathbb{R}\times H$ 及び u に弱収束する任意の列 $\{u_n\}\subset H$ を取る。このとき P_nu_n は u に H で弱収束する。実際任意の $v\in H$ に対し

$$\begin{aligned}(v|P_nu_n-u)&=(v|P_n(u_n-u))+(v|P_nu-u)\\&=(P_nv|u_n-u)+(v|P_nu-u)\end{aligned}$$

と表されるから $\|P_nv-v\|\to 0$ を示せば充分であるが V が H で稠密であり $\bigcup_{n\geq 1}M_n$ が V で稠密である事より任意の $\varepsilon>0$ に対し $v_\varepsilon\in\bigcup_{n\geq 1}M_n$ が存在し $\|v-v_\varepsilon\|<\varepsilon$ となり $v_\varepsilon\in M_j$ なる $j\geq 1$ を取り $n\geq j$ とすると

$$\begin{aligned}\|P_nv-n\|&\leq\|P_n(v-v_\varepsilon)\|+\|P_nv_\varepsilon-v\|\\&\leq\|v-v_\varepsilon\|+\|P_jv_\varepsilon-v\|\leq 2\|v-v_\varepsilon\|<2\varepsilon\end{aligned}$$

となり主張が従う。さて f の弱連続性より各 $t\in\mathbb{R}$ に対し $f(t,P_nu_n)$ は $f(t,u)$ に W で弱収束する。任意の $v\in V$ に対し $\langle\cdot,v\rangle\in W'$ であるから $\lim_{n\to\infty}\langle f(t,P_nu_n)-f(t,u),v\rangle=0$ となる。$\bigcup_{n\geq 1}M_n$ は V で稠密であり $\{f(t,P_nu_n)\}$ は W で有界であるから任意の $v\in V$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\langle P_n(f(t,P_nu_n)-f(t,u)),v\rangle=0$$

が従う。また任意の $w\in W$ に対し W で $P_nw\to w$ となる事が上と同様の議論から従うので任意の $v\in V$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\langle P_nf(t,u)-f(t,u),v\rangle=0$$

を得る。以上より (III)(b) より強い主張（$D=V$ としたもの）が成立つ。

註 4　(二重軟化作用素の方法との関係)　H が $\mathbb{R}^d$ 上の函数空間の場合、例えば $L^2(\mathbb{R}^d)$ の場合 f に対し

$$f_n(t,u)=\rho_n*f(t,\rho_n*u)$$

なる形の近似を考える事がある。ここに ρ_n* はフリートリクスの軟化作用素である。

定理の証明　各 $n\geq 1$ に対し近似方程式

$$\begin{cases}u'(t)=f_n(t,u(t)),\ t>0\\ u(0)=u_0\end{cases}$$

を考える。$f_n\in C_w(\mathbb{R}\times H;H)$ であり H は反射的なのでペアノ型の定理により $u_n\in(C\cap C_w^1)([0,T_n);H)$ なる解が存在する。ここで u_n は

$$\begin{aligned}S_n=\{u_n;{}^{\exists}T>0:u_n\in(C\cap C_w^1)([0,T];H),\\ u_n'(t)=f_n(t,u_n(t)),t\in[0,T],u_n(0)=u_0\}\end{aligned}$$

に属す一つの極大元とする（S_n の元の順序を存在区間 $[0,T]$ の包含関係で導入すると S_n は帰納的順序集合を成しツォルンの補題より極大元が存在する。）このとき $\|u_n\|^2 \in C^1([0,T_n);\mathbb{R})$ であり

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2 &= 2\mathrm{Re}(u_n'(t)|u_n(t))\\ &= 2\mathrm{Re}\langle f_n(t,u_n(t)),u_n(t)\rangle \le 2\beta(\|u_n(t)\|^2)\end{aligned}$$

が成立つ。このとき任意の $t\in[0,T_n)$ に対し

$$\int_{\|u_0\|^2}^{\|u_n(t)\|^2}\frac{1}{\beta(s)}ds = \int_0^t \frac{1}{\beta(\|u_n(\tau)\|^2)}\left(\frac{d}{d\tau}\|u_n(\tau)\|^2\right)d\tau \le 2t$$

が従う。一方

$$2t = \int_{\|u_0\|^2}^{\rho(t)}\frac{1}{\beta(s)}ds$$

であるから任意の $t\in[0,T_n)$ に対し不等式

$$\|u_n(t)\|^2 \le \rho(t)$$

が成立つ。ρ は単調増加であり $\rho(t)$ が有限である限り u_n は存在し続けるので極大存在時刻 T_n は

$$T_n \ge \frac{1}{2}\int_{\|u_0\|^2}^{\infty}\frac{1}{\beta(s)}ds(\equiv T_0)$$

と下から評価される。ここで T_0 と ρ は n に依らず定まる事に注意する。以上より任意の $n\ge 1$ 及び任意の $t\in[0,T_0)$ に対し不等式

$$\|u_n(t)\|^2 \le \rho(t)$$

が成立つ。以下 $0<T<T_0$ なる任意の T を取り区間 $I=[0,T]$ 上で議論する。特に $\sup_{n\ge1}\sup_{t\in I}\|u_n(t)\|^2 \le \rho(t) \equiv K$ が成立つ事に注意する。各 $t\in I$ に対し $\{u_n(t)\}$ は H の有界列を成すから弱収束する部分列を持つ。可算集合 $I\cap\mathbb{Q}$ 上で対角線論法を用いる事により部分列 $\{u_{n_j}\}\subset(C\cap C_w^1)([0,T];H)$ を選んで任意の $t\in I\cap\mathbb{Q}$ に対し $\{u_{n_j}(t)\}$ は H の弱収束列とする事が出来る。このとき (III)(a) により任意の $v\in D$ に対し $M=M(T,K^{1/2},v)>0$ が存在し任意の $t\in I$ に対し

$$|\frac{d}{dt}(u_{n_j}(t)|v)| = |(f_{n_j}(t,u_{n_j}(t))|v)| \le M$$

が従う。故に任意の $t,s\in I$ に対し不等式

$$|(u_{n_j}(t)|v)-(u_{n_j}(s)|v)| \le M|t-s|$$

が成立つ。任意の $t\in I$ に対し $\{t_\ell\}\subset I\cap\mathbb{Q}$ が存在し $t_\ell\to t(\ell\to\infty)$ となるので j,k に対し

$$\begin{aligned}&|(u_{n_j}(t)|v)-(u_{n_k}(t)|v)|\\ \le\ &|(u_{n_j}(t)|v)-(u_{n_j}(t_\ell)|v)|+|(u_{n_j}(t_\ell)|v)-(u_{n_k}(t_\ell)|v)|+|(u_{n_k}(t_\ell)|v)-(u_{n_k}(t)|v)|\\ \le\ &2M|t-t_\ell|+|(u_{n_j}(t_\ell)|v)-(u_{n_k}(t_\ell)|v)|\end{aligned}$$

と評価し $j,k\to\infty$ の上極限を取った後に $\ell\to\infty$ とする事により任意の $t\in I$ 及び任意の $v\in D$ に対し $\{(u_{n_j}(t)|v)\}$ はコーシー列を成す事が分かる。更に任意の $v\in H$ に対し $\{v_\ell\}\subset D$ が存在し $\|v_\ell - v\|\to 0$ となるので任意の $t\in I$ に対し

$$
\begin{aligned}
&|(u_{n_j}(t)|v)-(u_{n_k}(t)|v)| \\
&\le |(u_{n_j}(t)|v-v_\ell)|+|(u_{n_j}(t)|v_\ell)-(u_{n_k}(t)|v_\ell)|+|(u_{n_k}(t)|v_\ell - v)| \\
&\le 2K^{1/2}\|v-v_\ell\|+|(u_{n_j}(t)|v_\ell)-(u_{n_k}(t)|v_\ell)|
\end{aligned}
$$

と評価し $j,k\to\infty$ の上極限を取った後に $\ell\to\infty$ とする事により任意の $t\in I$ 及び任意の $v\in H$ に対し $\{(u_{n_j}(t)|v)\}$ はコーシー列を成す事が分かる。H の弱完備性により $\{u_{n_j}(t)\}$ は弱極限を持つのでそれを $u(t)\in H$ と表すと任意の $t\in I$ に対し

$$
\|u(t)\|\le\liminf_{j\to\infty}\|u_{n_j}(t)\|\le K^{1/2}
$$

更に任意の $t,s\in I,\ v\in D$ に対し

$$
|(u(t)|v)-(u(s)|v)|\le M|t-s|
$$

が成立つ。$\{\|u(t)\|;t\in I\}$ の有界性、各 $v\in D$ に対する $I\ni t\mapsto(u(t)|v)\in\mathbb{C}$ の連続性、D の H に於ける稠密性より各 $v\in H$ に対する $I\ni t\mapsto(u(t)|v)\in\mathbb{C}$ の連続性が従う。$T<T_0$ は任意だったので $u\in C_w([0,T_0);H)$ が従う。

さて u_{n_j} の満たす微分方程式を積分する事により、任意の $t,s\in I$ 及び任意の $v\in D$ に対し等式

$$
(u_{n_j}(t)-u_{n_j}(s)|v)=\int_s^t(f_{n_j}(t',u_{n_j}(t')),v)dt'
$$

を得る。(III) 及び有界収束定理より

$$
(u(t)-u(s)|v)=\int_s^t\langle f(t',u(t')),v\rangle dt'
$$

を得る。D の V に於ける稠密性と $\{\|f(t,u(t))\|_W;t\in I\}$ の有界性よりこの等式は任意の $u\in V$ 及び $t,s\in I$ 更には任意の $t,s\in[0,T_0)$ に対して成立つ。一次半形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の非退化性より

$$
u(t)-u(s)=\int_s^t f(t',u(t'))dt'
$$

特に $s=0$ とすれば $u(0)=u_{n_j}(0)=u_0$ であったので

$$
u(t)-u_0=\int_0^t f(t',u(t'))dt'
$$

が成立つ。$f\in C_w([0,T_0);W)$ より $u\in C^1_w([0,T_0);W)$ を得る。$u\in C_w([0,T_0);H)$ より $t\downarrow 0$ のとき $u(t)$ は u_0 に H で弱収束する。そこで強収束を示すには $\|u(t)\|\to\|u_0\|$ を示せば良い。弱収束性より

$$
\|u_0\|\le\liminf_{t\downarrow 0}\|u(t)\|
$$

が従い

$$\|u(t)\|^2 \le \rho(t),$$
$$\rho(t) - \rho(s) = \int_s^t 2\beta(\rho(\tau))d\tau$$

より

$$\limsup_{t\downarrow 0} \|u(t)\| \le \limsup_{t\downarrow 0} \rho(t)^{1/2} = \rho(0)^{1/2} = \|u_0\|$$

となり

$$\lim_{t\downarrow 0} \|u(t)\| = \|u_0\|$$

が従う。

参考文献：

増田久弥, 非線型数学, 朝倉書店

T. Kato, Weak solutions of infinite-dimensional Hamiltonian systems, Frontiers in pure and applied mathematics, 133-149 North-Holland, 1991.

T. Kato and C.Y. Lai, Nonlinear evolution equations and the Euler flow, J. Funct. Anal. **56**(1984), 15-28.

I.E. Segal, The global Cauchy problem for a relativistic sclalar field with power interaction, Bull. Soc. Math. France **91**(1963), 129-135.