非有界区間に於ける広義リーマン積分の条件収束

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
“But nothing's unconditional,” The Bravery

実数全体 $\mathbb{R}$ または半空間 $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ に於けるディリクレ核及びフェイエ核の積分やフレネル積分は (絶対収束せず) 条件収束する広積リーマン積分の例である。これらの広義リーマン積分の被積分函数には振動因子の存在を共通に見出す事が出来る。ここでは振動因子が条件収束をもたらす事情と上記の具体例に関する幾つかの計算方法に就いて纏めて置こう。簡単の為に以下では主として半空間 $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ の場合を考える。

定理１　f, g を $\mathbb{R}_{>0}$ で定義された実数値函数とし f は $(0, R),\ R > 0$ なる形の任意の有界開区間上広義リーマン可積分でその不定積分は一様に有界であるとする：

$$\sup_{R>0} \left| \int_0^R f(x)dx \right| (\equiv M) < \infty.$$

このとき広義リーマン積分

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

は次の条件のどれか一つの下で収束する。

(i) 或る $R_0 > 0$ に対し g は $[R_0, \infty)$ 上の非負単調減少函数で無限遠で消滅する：$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

(ii) g は無限遠で消滅し或る $R_0 > 0$ に対し (R_0, ∞) 上微分可能で導函数は絶対 (広義リーマン) 可積分である：$\int_0^\infty |g'(x)|dx < \infty$

(証明)　$R' > R \to \infty$ なるとき

$$\int_R^{R'} f(x)g(x)dx \to 0$$

を証明すれば良い。先ず (i) を仮定する。g の非負性と単調減少性より積分の第二平均値を用いると $R < R'' < R'$ なる R'' が在って

$$\int_R^{R'} f(x)g(x)dx = g(R)\int_R^{R''} f(x)dx$$

と出来る。従って

$$
\begin{aligned}
\left|\int_R^{R'} f(x)g(x)dx\right| &\leq g(R)\left|\int_R^{R''} f(x)dx\right| \\
&\leq g(R)\left(\left|\int_0^{R} f(x)dx\right| + \left|\int_0^{R''} f(x)dx\right|\right) \\
&\leq 2Mg(R) \to 0 \quad (R' > R \to \infty)
\end{aligned}
$$

次に (ii) を仮定する。部分積分により

$$
\begin{aligned}
\int_R^{R'} f(x)g(x)dx &= \int_R^{R'} \frac{d}{dx}\left(\int_R^{x} f(y)dy\right)\cdot g(x)dx \\
&= \left[\int_R^{x} f(y)dy\cdot g(x)\right]_R^{R'} - \int_R^{R'}\left(\int_R^{x} f(y)dy\right)g'(x)dx \\
&= \int_R^{R'} f(y)dy\cdot g(R') - \int_R^{R'}\left(\int_R^{x} f(y)dy\right)g'(x)dx
\end{aligned}
$$

となるので、積分は

$$
\begin{aligned}
\left|\int_R^{R'} f(x)g(x)dx\right| &\leq \left|\int_R^{R'} f(y)dy\right| |g(R')| + \sup_{R<x<R'}\left|\int_R^{x} f(y)dy\right|\cdot\int_R^{R'} |g'(x)|dx \\
&\leq 2M\left(|g(R')| + \int_R^{R'} |g'(x)|dx\right)
\end{aligned}
$$

と評価される。最後の不等式の右辺は仮定 (ii) により $R' > R \to \infty$ とするとき 0 に収束する。

註１． 積分の第二平均値の定理はアーベルの変形に基づく。アーベルの変形は部分積分の離散版と見做される。一方振動因子は一様有界な不定積分を持つ。よって定理１は振動因子 f に着目し部分積分により微分を相手方 g に押し付け g' の可積分性により積分の収束を図ったものと考えられる。この原理はフーリエ級数、振動積分作用素、擬微分作用素、フーリエ積分作用素に於ける収束性の議論に共通に用いられているものである。「被積分函数は激しく振動して積分が収束する」と云う直感的な表現は「**振動性**は**部分積分**を通じて積分の収束性に寄与する」或いは「**振動**は**部分積分**により制御される」と数学的に言い換えられる。

註２． $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ **の収束について**

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ なので $[0,\infty)$ 上の連続函数に拡張する事が出来、任意の有界閉区間上リーマン積分可能となる。そこで

$$
f(x) = \chi_{[\pi/2,\infty)}(x)\sin x, \quad g(x) = \chi_{[\pi/2,\infty)}(x)\cdot\frac{1}{x}
$$

として定理１を適用する。

$$\int_0^R f(x)dx = \begin{cases} \cos R, & R \geq \pi/2 \\ 0, & 0 < R \leq \pi/2 \end{cases}$$

なので $M = 1,\ g$ は $R_0 = \pi/2$ として (i) も (ii) も満たす。よって広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する。一方この広義積分は絶対収束しない。

実際

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &\geq \int_\pi^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\
&= \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\
&\geq \sum_{k=2}^{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx = \frac{2}{\pi}\int_1^n \frac{1}{x}dx = \frac{2}{\pi}\log n \to \infty\ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

註３． $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\theta}dx\ (\theta > 0)$ の収束について

被積分函数を $\left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1}{x^{\theta-1}}$ と分解して考えると第一因子は原点の近傍で有界なので第二因子の挙動が原点の近傍での可積分性を決定する。即ち $0 < \theta < 2$ なら収束、$\theta \geq 2$ なら発散する。(R_0, ∞) に於いては $f(x) = \frac{\sin x}{x}, g(x) = \frac{1}{x^{\theta-1}}$ と考えると註２により f の条件が満たされ g は (i) も (ii) も満たす。よって広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\theta}dx$ は $0 < \theta < 2$ なら収束、$\theta \geq 2$ なら発散する。この広義積分は (註１と同様に考えれば)$0 < \theta \leq 1$ なら絶対収束しない。一方 $1 < \theta < 2$ なら (原点の近傍の外で $\left|\frac{\sin x}{x^\theta}\right| \leq \frac{1}{x^\theta}$ と考えれば) 絶対収束する。

註４． $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ の収束について

原点の近傍での可積分性は註２の議論と同様であり原点の近傍の外で $\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 \leq \frac{1}{x^2}$ とすれば絶対収束する事が分かる。

I. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ の計算方法

1. 収束因子のパラメタに関する微分を用いる方法

アーベル・ポワソン型の収束因子を導入し

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx, \quad t > 0$$

を考える。一様収束性により積分記号下の微分を実行すると

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx \\ &= \left[\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(\cos x + t\sin x)\right]_{x=0}^\infty = -\frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

これより任意の $t>0$ に対し

$$\begin{aligned} F(0) &= F(t) - \int_0^t F'(s)ds \\ &= \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx + \int_0^t \frac{1}{1+s^2}ds \\ &= \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx + \mathrm{Tan}^{-1}t \end{aligned}$$

さて $t\to\infty$ とすると最後の積分は 0 に収束し $\mathrm{Tan}^{-1}t \to \frac{\pi}{2}$ となるので標記の結果を得る。

2. 振幅因子の積分表示との積分順序の交換に基づく方法

$\sin x$ を振動因子とすれば $\frac{1}{x}$ は振幅因子と考えられる。この部分をアーベル・ポワソン型の収束因子の重ね合わせで表示する：

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-tx}dt,\ x>0$$

積分順序の交換を実行する為に有界閉区間 $[0,n]$ で考え次の様に計算する：

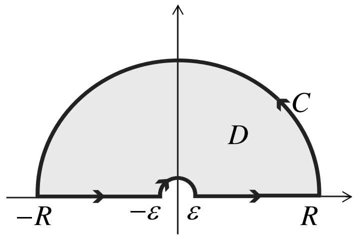
$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{\sin x}{x}dx &= \int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dt\right)dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-tx}\sin x dx\right)dt \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(\cos x + t\sin x)\right]_{x=0}^n dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt - \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{1+t^2}(\cos n + t\sin n)dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{1+t^2}(\cos n + t\sin n)dt \end{aligned}$$

さて $n\to\infty$ とすると最後の積分は 0 に収束するので標記の結果を得る。

註５． この方法の優れた点の一つは $[0,n]$ 上の積分値と $\pi/2$ との差を次の様に具体的に評価出来る所に在る：

$$\begin{aligned} \left|\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx - \frac{\pi}{2}\right| &\le \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{1+t^2}|\cos n + t\sin n|dt \le \int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &\le \int_0^\infty e^{-nt}dt = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

3. 複素積分による方法 (その１)



正則函数 $\mathbb{C}\setminus\{0\}\ni z\mapsto \frac{e^{iz}}{z}\in\mathbb{C}$ を領域 $D=\{z\in\mathbb{C};\varepsilon<|z|<R,\ \mathrm{Im}\ z>0\}$ の境界 $C=\partial D$ の正の向きに沿って積分すると

$$0=\int_C\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx-\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

となる。半径 R の半円上の積分は

$$\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz=i\int_0^\pi\exp(iRe^{i\theta})d\theta=i\int_0^\pi\exp(iR\cos\theta-R\sin\theta)d\theta$$

となるので

$$\begin{aligned}\left|\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| &\le \int_0^\pi\exp(-R\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\pi/2}\exp(-R\sin\theta)d\theta\\ &\le 2\int_0^{\pi/2}\exp\left(-\frac{2}{\pi}R\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{R}(1-e^{-R})\end{aligned}$$

と評価される。ここで $\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta,\ \theta\in[0,\pi/2]$ なる不等式を用いた。

半径 ε の半円上の積分は

$$\begin{aligned}\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z} &= \int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{1}{z}dz+\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}-1}{z}dz\\ &= \pi i+i\int_0^\pi(\exp(i\varepsilon e^{i\theta})-1)dz\end{aligned}$$

となるので

$$\left|\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz-\pi i\right| \le \int_0^\pi|\exp(i\varepsilon e^{i\theta})-1|d\theta\le\pi\varepsilon$$

を得る。ここで

$$|\exp(i\varepsilon e^{i\theta})-1| = \left|\int_0^1 i\varepsilon e^{i\theta}\cdot\exp(it\varepsilon e^{i\theta})dt\right| \le |\varepsilon e^{i\theta}|\int_0^1\exp(-t\varepsilon\sin\theta)dt\le\varepsilon$$

を用いた。

実軸上の積分は

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_\varepsilon^R\frac{e^{ix}}{x}dx &= \int_R^\varepsilon\frac{e^{-ix}}{x}dx+\int_\varepsilon^R\frac{e^{ix}}{x}dx\\ &= \int_\varepsilon^R\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=2i\int_\varepsilon^R\frac{\sin x}{x}dx\end{aligned}$$

となる。以上より

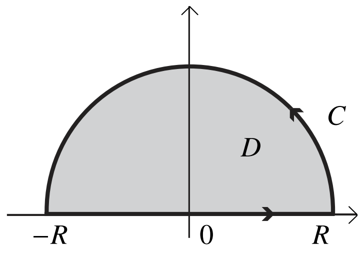
$$\left|\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right|\leq\left(\varepsilon+\frac{1}{R}\right)\frac{\pi}{2}$$

及び

$$\left|\int_{0}^{R}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right|\leq\frac{\pi}{2R}$$

を得る。

4. 複素積分による方法 (その２)



正則函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto\frac{e^{iz}-1}{z}\in\mathbb{C}$ を領域 $D=\{z\in\mathbb{C};|z|<R,\ \mathrm{Im}z>0\}$ の境界 $C=\partial D$ の正の向きに沿って積分すると

$$\begin{aligned}
0=\int_C\frac{e^{iz}-1}{z}dz &= \int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}-1}{z}dz+\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}-1}{x}dx\\
&= \int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>R}}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{1}{z}dz+\int_{-R}^{0}\frac{e^{ix}-1}{x}dx+\int_{0}^{R}\frac{e^{ix}-1}{x}dx\\
&= \int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>R}}\frac{e^{iz}}{z}dz-i\int_0^{\pi}d\theta-\int_{R}^{0}\frac{e^{-ix}-1}{x}dx+\int_{0}^{R}\frac{e^{ix}-1}{x}dx\\
&= \int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz-\pi i+\int_{0}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx
\end{aligned}$$

となるので

$$\left|\int_{0}^{R}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right|=\left|\frac{1}{2i}\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|$$

を得る。右辺は前と同様に $\frac{\pi}{2R}$ で評価され $R\to\infty$ で 0 に収束する。

5. トーラス上のディリクレ核による方法

トーラス上のディリクレ核を

$$D_n(x)=\sum_{j=-n}^{n}e^{ijx},\quad x\in\mathbb{R}$$

と定めると一方では

$$D_n(x)=1+\sum_{j=1}^{n}(e^{ijx}+e^{-ijx})=1+2\sum_{j=1}^{n}\cos jx$$

もう一方では

$$\begin{aligned}D_n(x) &= e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-i(n+1/2)x}}{e^{-i(1/2)x}}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{e^{-i(1/2)x}-e^{i(1/2)x}} \\ &= \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\end{aligned}$$

と計算される。これより

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}dx &= \int_0^{\pi/2}(1+2\sum_{j=1}^{n}\cos 2jx)dx = \frac{\pi}{2}+2\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\sin 2jx}{2j}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2} &= \int_0^{(2n+1)\pi/2}\sin x\frac{dx}{x}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\sin x dx \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)x)\frac{dx}{x}-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}dx \\ &= \int_0^{\pi/2}f(x)\sin((2n+1)x)dx\end{aligned}$$

となる。ここに

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x - x}{x\sin x},\ x\in(0,\pi/2]$$

とした。$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{-\sin^2 x+x^2\cos x}{x^2\sin^2 x},\ \sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+O(x^5)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4)(x\to 0)$ により $f(0)=0,\ f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ と定義すれば f と f' は $[0,2\pi]$ 上の連続函数として延長される。このとき

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}f(x)\sin((2n+1)x)dx &= \left[-f(x)\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}f'(x)\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}dx \\ &= \int_0^{\pi/2}f'(x)\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}dx\end{aligned}$$

より次の評価を得る:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2}\right| &= \left|\int_0^{\pi/2}f'(x)\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}dx\right| \\ &\leq \left(\sup_{x\in[0,\pi/2]}|f'(x)|\right)\frac{\pi/2}{2n+1}\end{aligned}$$

II. $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$ の計算方法

1. 部分積分によりディリクレ核の積分に帰着させる方法

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}(\sin x)^2 dx &= \left[-\frac{1}{x}(\sin x)^2\right]_{x=0}^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

実は

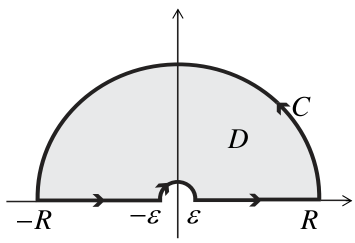
$$\begin{aligned}\int_0^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx &= \left[-\frac{(\sin x)^2}{x}\right]_0^n + \int_0^n \frac{2\sin x\cos x}{x}dx \\ &= -\frac{(\sin n)^2}{n} + \int_0^{2n} \frac{\sin x}{x}dx\end{aligned}$$

であるから $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ と $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$ とは同値であると言える。ここで註５を用いるともう少し精密に積分の収束状況を把握する事が出来る。即ち上の等式を

$$\left|\int_0^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{1}{n} + \left|\int_0^{2n} \frac{\sin x}{x}dx - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{3}{2n}$$

と評価すれば良い。

2. 複素積分による方法（その１）



正則函数 $\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni z \mapsto \frac{1-e^{2iz}}{z^2} \in \mathbb{C}$ を領域 $D = \{z \in \mathbb{C}; \varepsilon < |z| < R,\ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ の境界 $C = \partial D$ の正の向きに沿って積分すると

$$0 = \int_C \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz = \int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx - \int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dx + \int_R^\varepsilon \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx$$

半径 R の半円上の積分は

$$\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz = i\int_0^\pi \frac{1-\exp(2iRe^{i\theta})}{Re^{i\theta}}d\theta$$

と表されるので

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz\right| &\leq \frac{1}{R}\int_0^{\pi} |1-\exp(2iRe^{i\theta})|d\theta \\
&\leq \frac{1}{R}\int_0^{\pi}(1+\exp(-2R\sin\theta))d\theta \leq \frac{2\pi}{R}
\end{aligned}
$$

と評価される。半径 ε の半円上の積分は

$$
\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz = \int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{-2iz}{z^2}dz - \int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{e^{2iz}1-2iz}{z^2}dz
$$

と表すと右辺第一項は

$$
-2i\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1}{z}dz = 2\int_0^{\pi} d\theta = 2\pi
$$

となり第二項は $\mathrm{Im}z \geq 0$ に対する不等式

$$
\begin{aligned}
|e^{2iz}-1-2iz| &= |2iz\int_0^1 e^{2itz}dx - 2iz| \\
&= |2iz\int_0^1 (e^{2itz}-1)dt| \\
&= |-4z^2\int_0^1\int_0^1 e^{2istz}dsdt| \leq 4|z|^2
\end{aligned}
$$

を用いて

$$
\left|\int_{\substack{|z|=\varepsilon\\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{e^{2iz}-1-2iz}{z^2}dz\right| \leq 4\varepsilon\int_0^{\pi} d\theta = 4\pi\varepsilon
$$

と評価される。実軸上の積分は

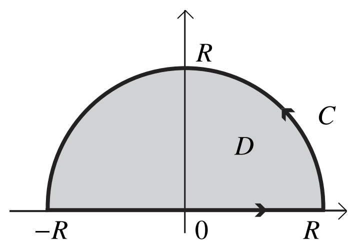
$$
\begin{aligned}
&\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx \\
&= -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{1-e^{-2ix}}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{2-e^{2ix}-e^{2ix}}{x^2}dx = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^2}{x^2}dx = 4\int_{\varepsilon}^{R}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

と表される。以上より

$$
\left|\int_{\varepsilon}^{R}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx - \frac{\pi}{2}\right| \leq \pi\varepsilon + \frac{\pi}{2R}
$$

$$
\left|\int_{0}^{R}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2R}
$$

となり標記の結果を得る。



3. 複素積分による方法 (その２)

正則函数 $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1+2iz-e^{2iz}}{z^2} \in \mathbb{C}$ を領域 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R,\ \mathrm{Im}z > 0\}$ の境界 $C = \partial D$ の正の向きに沿って積分すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_C \frac{1+2iz-e^{2iz}}{z^2}dz \\
&= \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1+2iz-e^{2iz}}{z^2}dz + \int_{-R}^{R} \frac{1+2ix-e^{2ix}}{x^2}dx \\
&= \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz + \ 2i\int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1}{z}dz \ + \int_{-R}^{0} \frac{1+2ix-e^{2ix}}{x^2}dx + \int_{0}^{R} \frac{1+2ix-e^{2ix}}{x^2}dx \\
&= \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz - 2\int_0^\pi d\theta + \int_R^0 \frac{1-2ix-e^{-2ix}}{x^2}dx + \int_0^R \frac{1+2ix-e^{2ix}}{x^2}dx \\
&= \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz - 2\pi + \int_0^R \frac{2-e^{-2ix}-e^{-2ix}}{x^2}dx
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\left| \int_0^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \frac{1}{4}\int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}z>0}} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz \right|
$$

を得る。右辺は前と同様に $\frac{\pi}{2R}$ で評価され $R \to \infty$ で 0 に収束する。

4. $\dfrac{1}{\sin^2 z}$ の部分分数展開を用いる証明

部分分数展開

$$
\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}
$$

に於いて $z = x/\pi,\ x \notin \pi\mathbb{Z}$ と置くと

$$
\frac{\pi^2}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x/\pi - n)^2}
$$

$$
\Longleftrightarrow 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{(x-n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x-n\pi)}{(x-n\pi)^2}
$$

が従う。右辺は $(0,\pi)$ 上広義一様に絶対収束する。実際 $0<\varepsilon<\pi/2$ なる任意の ε に対し

$$\sup_{x\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}\frac{\sin^2(x-n\pi)}{(x-n\pi)^2}\le\begin{cases}\frac{1}{((n-1)\pi+\varepsilon)^2}, & n\ge 1\\ \frac{1}{(n\pi-\varepsilon)^2}, & n\le 0\end{cases}$$

一方

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x-n\pi)}{(x-n\pi)^2}=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\ne 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2(x-n\pi)}{(x-n\pi)^2}=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\ne 1\end{cases}$$

となるので

$$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x-n\pi)}{(x-n\pi)^2}$$

は任意の $x\in[0,\pi]$ に対し成立つ。よって両辺を x に就いて $[0,\pi]$ 上積分すると

$$\pi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(x-n\pi)}{(x-n\pi)^2}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 y}{y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

を得る。

III. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ の計算方法

1. 振動因子のパラメタに関する微分を用いる方法

アーベル・ポワソン型の収束因子を考え振動因子にもパラメタを導入する。少し一般化して $0<p<1,\ \varepsilon>0,\ t>0$ に対し

$$u(t)=\int_0^{\infty}x^{p-1}\exp(-\varepsilon x+itx)dx$$

を考えよう。t で微分し部分積分を用いると

$$\begin{aligned}u'(t)&=i\int_0^{\infty}x^p\exp(-\varepsilon x+itx)dx\\&=i\int_0^{\infty}x^pe^{-\varepsilon x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{it}e^{itx}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{t}x^pe^{-\varepsilon x}e^{itx}\right]_{x=0}^{\infty}-\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}(x^pe^{-\varepsilon x})e^{itx}dx\\&=-\frac{p}{t}\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-\varepsilon x}e^{itx}dx+\frac{\varepsilon}{t}\int_0^{\infty}x^pe^{-\varepsilon x}e^{itx}dx\\&=-\frac{p}{t}u(t)-i\frac{\varepsilon}{t}u'(t)\end{aligned}$$

となるので

$$u'(t) = -\frac{p}{t+i\varepsilon}u(t)$$

を得る。これより

$$\frac{d}{dt}(\exp(p\log(t+i\varepsilon))u(t)) = \exp(p\log(t+i\varepsilon))\left(\frac{p}{t+i\varepsilon}u(t) + u'(t)\right) = 0$$

を積分して

$$\begin{aligned}\exp(p\log(t+i\varepsilon))u(t) &= \exp(p\log(i\varepsilon))u(0) = (i\varepsilon)^p u(0) \\ &= (i\varepsilon)^p \int_0^\infty x^{p-1}e^{-\varepsilon x}dx = i^p\Gamma(p)\end{aligned}$$

即ち

$$u(t) = \Gamma(p)i^p(t+i\varepsilon)^{-p}$$

を得る。特に $p = 1/2$ の場合 $t = 1, \varepsilon \to 0$ として両辺の実部及び虚部を比較し

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を得る。

2. 振動因子の積分表示との積分順序の交換に基づく方法 (その１)

$\sin x$ を振動因子とすれば $\frac{1}{\sqrt{x}}$ は振幅因子と考えられる。この部分をガウス型の収束因子の重ね合わせとして表示する：

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-xt^2}dt,\ x > 0$$

積分順序の交換を実行する為に有界閉区間 $[0, n]$ で考え次の様に計算する：

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-xt^2}\sin x\ dt\right)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-t^2x}\sin x\ dx\right)dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left[-\frac{e^{-t^2x}}{1+t^4}(\cos x + t^4\sin x)\right]_{x=0}^n dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^4}dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-nt^2}}{1+t^4}(\cos n + t^4\sin n)dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-nt^2}}{1+t^4}(\cos n + t^4\sin n)dt\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ とすると最後の積分は 0 に収束するので標記の結果を得る。

註６．　この方法の優れた点の一つは $[0,n]$ 上の積分値と $\sqrt{\pi/2}$ との差を次の様に具体的に評価できる所に在る：

$$\begin{aligned}\left|\int_0^n \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right| &\le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-nt^2}}{1+t^4}|\cos n + t^4 \sin n|dt \\ &\le \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-nt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

3. 振幅因子の積分表示との積分順序の交換に基づく方法 (その２)

振幅因子 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ をアーベル・ポワソン型の収束因子の重み付き重ね合わせとして表示する：

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-tx}dt,\ x>0$$

前の方法と同様に次の様に計算する：

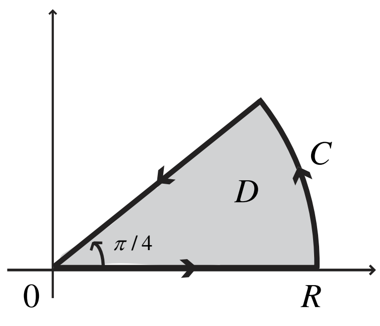
$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^n \left(\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-tx}dt\right)\sin x\ dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^n \left(\int_0^n e^{-tx}\sin x\ dx\right)\frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left[-\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(\cos x + t\sin x)\right]_{x=0}^n \frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{1+t^2}(\cos n + t\sin n)\frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{1+t^2}(\cos n + t\sin n)\frac{1}{\sqrt{t}}dt\end{aligned}$$

ここで $n\to\infty$ とすると最後の積分は 0 に収束するので標記の結果を得る。

註７．　上記２つの方法 (その１とその２) は本質的には同じものである。

4. 複素積分による方法

正則函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto \exp(iz^2)\in\mathbb{C}$ を領域 $D=\{z\in\mathbb{C}; 0<|z|<R,\ 0<\mathrm{Arg}z<\pi/4\}$ の境界 $C=\partial D$ の正の向きに沿って積分する。$C\cap\mathbb{R}=[0,R]$, $C\cap\{z:|z|=R\}=\{Re^{i\theta}; 0\le\theta\le\pi/4\}$, $C\cap\{z;\mathrm{Arg}z=\pi/4\}=\{\frac{1+i}{\sqrt{2}}x; 0\le x\le R\}$ と表示されるので



$$\begin{aligned}0 &= \int_C \exp(iz^2)dz \\ &= \int_0^R \exp(ix^2)dx\ +\ iR\int_0^{\pi/4}\exp(iR^2e^{2i\theta})e^{i\theta}d\theta\ -\ \int_0^R \exp\left(i\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}x\right)^2\right)\frac{1+i}{\sqrt{2}}dx\end{aligned}$$

となる。右辺の二番目の積分は

$$
\begin{aligned}
&\left| iR\int_0^{\pi/4} \exp(iR^2\cos 2\theta - R^2 \sin 2\theta) e^{i\theta} d\theta \right| \\
&\le R\int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \sin 2\theta) d\theta \le R\int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{2}{\pi}R^2(2\theta)\right) d\theta \\
&\qquad\qquad = \left[-\frac{\pi}{4R}\exp\left(-\frac{4R^2}{\pi}\theta\right)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4R}(1-\exp(-R^2))
\end{aligned}
$$

三番目の積分は

$$
-\int_0^R \exp\left(i\frac{2i}{2}x^2\right)\frac{1+i}{\sqrt{2}}dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R \exp(-x^2)dx
$$

となるので

$$
\left|\int_0^R \exp(ix^2)dx - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R \exp(-x^2)dx\right| \le \frac{\pi}{4R}
$$

を得る。$R \to \infty$ として

$$
\int_0^\infty \exp(ix^2)dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

両辺の実部と虚部を比較し

$$
\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}
$$

更に変数変換により

$$
\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}
$$

を得る。

参考文献: Rémi Carles, Duex exercises d'intégration, Notes de cours
http://www.math.univ-montp2.fr/ carles/
藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學 第一巻、内田老鶴圃、1934
杉浦光夫、解析入門 I,II、東京大学出版会