二次曲線に束縛された点の運動

平成 27 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

平面上の双線型形式から定まる二次曲線に束縛された点の運動を微分方程式に依って特徴付け、その運動の軌跡の媒介変数表示を求めよう。

1．平面上の二次曲線に束縛された点の運動

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の対称双線型形式 $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 及び定数 $c \in \mathbb{R}$ に依り定まる集合

$$\{\xi \in \mathbb{R}^2; B(\xi, \xi) = c\}$$

に束縛された点の運動を $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ 即ち一つの独立変数を持つ C^2 曲線として記述せよと云う問題を考える。次の命題は基本的である。

命題 1　$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を対称双線型形式とし $c \in \mathbb{R}$ を実定数とする。$x \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し等式 $B(x(t), x(t)) = c$ を満たしているものとする。このとき次が成立つ。

(1)　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $B(x'(t), x(t)) = B(x(t), x'(t)) = 0$

(2)　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $B(x''(t), x(t)) = B(x(t), x''(t)) = -B(x'(t), x'(t))$

(証明)　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成立つ等式 $B(x, (t), x(t)) = c$ を t で一回微分し

$$0 = \frac{d}{dt}(B(x(t), x(t))) = B(x'(t), x(t)) + B(x(t), x'(t))$$

を得るので B の対称性より (1) が従い、(1) を一回微分すれば (2) が従う。

二次曲線に束縛された点の運動の微分方程式に依る特徴付けは次で与えられる。

定理 1　$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を対称双線型形式として $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ を零でない実定数とする。$x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し等式 $B(x(t), x(t)) = c$ を満たしているものとし更に条件 $B(x'(0), x'(0)) \neq 0$ を仮定する。このとき次の条件 (1)-(4) は同値である。

(1)　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し　$B(x'(t), x'(t)) = B(x'(0), x'(0))$

(2)　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し　$B(x''(t), x'(t)) = 0$

(3)　$\lambda \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ が唯一つ存在し任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し　$x''(t) = \lambda(t)x(t)$

(4)　$\lambda \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ が唯一つ存在し任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し　$x''(t) + \frac{1}{c}B(x'(t), x'(t))x(t) = 0$

以上の同値な条件が成立つ場合 x は微分方程式

$$x''(t)+\frac{1}{c}B(x'(0),x'(0))x(t)=0,\ t\in\mathbb{R} \tag{1.1}$$

(証明)　(1)⇔(2)：等式 $B(x''(t),x'(t))=\frac{d}{dt}B(x'(t),x'(t))$ より直ちに従う。
(1),(2) ⇒(3)：　(1) と (2) を仮定する。まず任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $x(t)$ と $x'(t)$ は一次独立である事を示そう。実際 $a,b\in\mathbb{R}$ に対し $ax(t)+bx'(t)=0$ であったとすると命題 1(1) を用いて

$$\begin{aligned}0=B(x(t),0)&=B(x(t),ax(t)+bx'(t))\\&=aB(x(t),x(t))+bB(x(t),x'(t))=ac\end{aligned}$$

を得るので $c\neq 0$ より $a=0$ を得る。これより $bx'(t)=0$ となり (1) を用いれば

$$\begin{aligned}0=B(x'(t),0)&=B(x'(t),bx'(t))\\&=bB(x'(t),x'(t))=bB(x'(0),x'(0))\neq 0\end{aligned}$$

を得るので $b=0$ が従う。故に任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $x(t)$ と $x'(t)$ は一次独立である事が示された。

$B(x(t),x(t))=c\neq 0$ 及び $B(x'(t),x'(t))=B(x'(0),x'(0))\neq 0$ より $x(t)\neq 0$ 及び $x'(t)\neq 0$ が従うので任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $x(t)$ と $x'(t)$ は $\mathbb{R}^2$ の基底を成す事が分かった。従って任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $\lambda(t),\mu(t)\in\mathbb{R}$ が存在し $x''(t)=\lambda(t)x(t)+\mu(t)x'(t)$ と表され

$$\begin{aligned}0=B(x''(t),x'(t))&=B(\lambda(t)x(t)+\mu(t)x'(t),x'(t))\\&=\mu(t)B(x'(t),x'(t))=\mu(t)B(x'(0),x'(0))\end{aligned}$$

が従い $\mu(t)=0$ が成立するので $x''(t)=\lambda(t)x(t)$ を得る。λ の一意性を示そう。その為には任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $x(t)\neq 0$ である事を示せば充分である。もしそうでないとすると $x(t_0)=0$ なる $t_0\in\mathbb{R}$ が存在する事になるが $c=B(x(t_0),x(t_0))=0$ となり矛盾を生ずる。
λ の連続性は x'' と x の連続性から導かれる。
(3)⇒(4)：仮定 (3) と命題 1(2) より

$$\begin{aligned}c\lambda(t)&=\lambda(t)B(x(t),x(t))=B(\lambda(t)x(t),x(t))=B(x''(t),x(t))\\&=-B(x'(t),x'(t)),\\x''(t)&=\lambda(t)x(t)=-\frac{1}{c}B(x'(t),x'(t))x(t)\end{aligned}$$

を得る。
(4)⇒(1)：仮定 (4) と命題 1(1) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B(x'(t),x'(t))&=2B(x''(t),x'(t))=2B(-\frac{1}{c}B(x'(t),x'(t))x(t),x'(t))\\&=-\frac{2}{c}B(x'(t),x'(t))B(x(t),x'(t))=0\end{aligned}$$

を得るので (1) が従う。

定理 2　定理 1 の仮定の下で x は保存則

$$
\begin{aligned}
&|x'(t)|^2+\frac{1}{c}B(x'(t),x'(t))|x(t)|^2=|x'(t)|^2+\frac{1}{c}B(x'(0),x'(0))|x(t)|^2\\
&=|x'(0)|^2+\frac{1}{c}B(x'(0),x'(0))|x(0)|^2 \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

を満たす。ここに $|\xi|^2=\xi\cdot\xi=\xi_1\xi_1+\xi_2\xi_2$ は $\mathbb{R}^2$ のユークリッド距離の自乗である。

(証明)　(1) 及び (1.1) を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(|x'(t)|^2+\frac{1}{c}B(x'(t),x'(t))|x(t)|^2)&=\frac{d}{dt}(|x'(t)|^2+\frac{1}{c}B(x'(0),x'(0))|x(t)|^2)\\
&=2(x''(t)+\frac{1}{c}B(x'(0),x'(0))x(t))\cdot x'(t)=0
\end{aligned}
$$

となるので定理が従う。

2. 対称二次形式の標準化

平面 $\mathbb{R}^2$ の元を縦ベクトル表示し、標準基底を $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ とする：

$$
\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}
$$

また $a_{ij}=B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ と置く。任意の $\xi,\eta\in\mathbb{R}^2$ を成分表示すると

$$
\begin{aligned}
B(\xi,\eta)&=B(\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2,\eta_1\mathbf{e}_1+\eta_2\mathbf{e}_2)\\
&=a_{11}\xi_1\eta_1+a_{12}\xi_1\eta_2+a_{21}\xi_2\eta_1+a_{22}\xi_2\eta_2\\
&=[\xi_1\ \xi_2]\begin{bmatrix}a_{11}\eta_1+a_{12}\eta_2\\a_{21}\eta_1+a_{22}\eta_2\end{bmatrix}=[\xi_1\ \xi_2]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので二次正方行列 A を

$$
A=\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}
$$

と定めると等式

$$
B(\xi,\eta)=[\xi_1\xi_2]A\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{bmatrix} \qquad (2.1)
$$

が得られる。ここに B の対称性を用いて $b=a_{21}=a_{12}$ とした。

さて $\lambda\in\mathbb{R}$ が A の固有値であるとは $\xi\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ が存在して $A\xi=\lambda\xi$ を満たす事であり、このとき ξ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルと謂う。一つの固有値に対する固有ベクトル全体に $0\in\mathbb{R}^2$ を加えた集合 $E(\lambda)$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間を成し

$$
E(\lambda)=\{\xi\in\mathbb{R}^2;A\xi=\lambda\xi\}=\mathrm{Ker}(\lambda I-A)
$$

が成立つ。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} E(\lambda) \neq \{0\} &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \lambda I - A \text{の逆行列は存在しない} \\ &\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - a)(\lambda - d) - b^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

従って A の固有値 λ_+, λ_- は

$$\lambda_\pm = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \tag{2.3}$$

で与えられる。ここで三つの場合に分けて考える。

$b = 0$ 且つ $a = d$ の場合

二次方程式 (2.2) は重根 $\lambda_+ = \lambda_-$ を持ち $A = aI$ は対角型である。

$b = 0$ 且つ $a \neq d$ の場合

二次方程式 (2.2) は二つの相異なる単根 $\lambda_+ = \max(a, d)$ 及び $\lambda_- = \min(a, d)$ を持ち $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ は対角型である。

$b \neq 0$ の場合

二次方程式 (2.2) は (2.3) で与えられる二つの単根 $\lambda_\pm$ を持ち $\lambda_+ > \lambda_-$ を満たし $(\lambda_\pm - a)(\lambda_\pm - d) = b^2$ 故 $\lambda_\pm \neq a$ 且つ $\lambda_\pm \neq d$ を満たす。また

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \lambda_\mp - a \\ -b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a(\lambda_\mp - a) - b^2 \\ b(\lambda_\mp - a) - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\lambda_\mp - a) - (\lambda_\mp - a)(\lambda_\mp - d) \\ -(a + d - \lambda_\mp)b \end{bmatrix} \\ &= (a + d - \lambda_\mp) \begin{bmatrix} \lambda_\mp - a \\ -b \end{bmatrix} = \lambda_\pm \begin{bmatrix} \lambda_\mp - a \\ -b \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

であるから

$$\xi_\pm = \begin{bmatrix} \lambda_\mp - a \\ -b \end{bmatrix}$$

は $\lambda_\pm$ に対する固有ベクトルであり $\lambda_+ \neq \lambda_-$ 故それらは一次独立である。また

$$\eta_\pm = \begin{bmatrix} -b \\ \lambda_\mp - d \end{bmatrix}$$

は $\xi_\pm = -(b/(\lambda_\mp - d))\eta_\pm$ を満たすので $\lambda_\pm$ に対する固有ベクトルとなる。さて二次方程式 (2.2) の左辺は $(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)$ と因数分解されるので

$$\begin{aligned}\lambda_+ + \lambda_- &= a+b = \mathrm{tr}A,\\ \lambda_+\lambda_- &= ad-b^2 = \det A\end{aligned}$$

が成立つ（勿論 (2.3) からも直接確認出来る）。このとき

$$\begin{aligned}(\lambda_+-a)(\lambda_--a)+b^2 &= \lambda_+\lambda_- - (\lambda_++\lambda_-)a + a^2 + b^2\\ &= (ad-b^2)-(a+d)a+a^2+b^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2+(\lambda_+-d)(\lambda_--d) &= \lambda_+\lambda_- - (\lambda_++\lambda_-)d + d^2 + b^2\\ &= (ad-b^2)-(a+d)d+d^2+b^2 = 0\end{aligned}$$

が成立ち ξ_+ と ξ_- 並びに η_+ と η_- は直交する事が分かる：

$$\xi_+\cdot\xi_- = \eta_+\cdot\eta_- = 0$$

以上で $\mathbb{R}^2$ の直交直和分解とその特徴付け

$$\mathbb{R}^2 = E(\lambda_+)\oplus E(\lambda_-),\ E(\lambda_\pm) = \mathrm{span}(\xi_\pm) = \mathrm{span}(\eta_\pm)$$

が与えられた。さて (2.4) より、等式

$$\begin{aligned}A[\xi_+|\xi_-] &= [A\xi_+|A\xi_-] = [\lambda_+\xi_+|\lambda_-\xi_-]\\ &= \begin{bmatrix}\lambda_+(\lambda_--a) & \lambda_-(\lambda_+-a)\\ \lambda_+(-b) & \lambda_-(-b)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_--a & \lambda_+-a\\ -b & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}\\ &= [\xi_+|\xi_-]\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}\end{aligned}$$

が得られ、同時に

$$A = [\eta_+|\eta_-] = [\eta_+|\eta_-]\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}$$

が得られるので $\xi_\pm$ 及び $\eta_\pm$ を規格化して並べて出来る二次正方行列を

$$P = \left[\frac{\xi_+}{|\xi_+|}\middle|\frac{\xi_-}{|\xi_-|}\right],\quad Q = \left[\frac{\eta_+}{|\eta_+|}\middle|\frac{\eta_-}{|\eta_-|}\right]$$

と置けば、共に直交行列

$${}^tPP = P{}^tP = I,\ {}^tQQ = Q{}^tQ = I$$

となり A を対角化する事が分かる：

$${}^tPAP = {}^tQAQ = \begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}$$

3. 運動の軌跡の媒介変数表示

この節では定理 1(4) に現れる微分方程式の解の表示を求める事に拠って二次曲線に束縛された点の運動を記述しよう。その為この節では定理 1 の仮定や記号の下で議論を進める。簡単の為 $x_0 = x(0),\ v_0 = x'(0)$ と置く。幾つかの場合に分けて考える。

(I) $B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0,\ B(v_0, v_0) > 0$ の場合

$b = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ であるから A は対角型の場合である。$c \neq 0$ 故 $c > 0$ 又は $c < 0$ のどちらかに分類される。

(a) $c > 0$ の場合

$\omega = \sqrt{B(v_0, v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3.1}$$

となるので解 $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ は

$$x(t) + (\cos t\omega)x_0 + (\omega^{-1} \sin t\omega)v_0 \tag{3.2}$$

と表示される。さて $x(t)$ を縦ベクトル表示

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2(t) \tag{3.3}$$

すれば定理 1 の仮定 $B(x(t), x(t)) = c$ 及び（(1.1) に同値な）(1) の条件 $B(x'(t), x'(t)) = B(v_0, v_0)$ は夫々等式

$$c = B(x(t), x(t)) = a(x_1(t))^2 + d(x_2(t))^2 \tag{3.4}$$

及び

$$c\omega^2 = B(v_0, v_0) = B(x'(t), x'(t)) = a(x_1'(t))^2 + d(x_2'(t))^2 \tag{3.5}$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成立つ事と書き換えられる。一方、命題 1(1) は

$$0 = B(x(t), x'(t)) = ax_1(t)x_1'(t) + dx_2(t)x_2'(t) \tag{3.6}$$

と書き換えられる。$t = 0$ に於いて (3.4) 及び (3.5) より等式

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{c/a}}\right)^2 + \left(\frac{x_2(0)}{\sqrt{c/d}}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{c/a}}\right)^2 + \left(\frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{c/d}}\right)^2 = 1$$

が得られる。故に $\theta_0, \theta_1 \in [0, 2\pi)$ が唯一組定まり

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{c/a}\ \cos\theta_0 \\ \sqrt{c/d}\ \sin\theta_0, \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\sqrt{c/a}\ \cos\theta_1 \\ \omega\sqrt{c/d}\ \sin\theta_1, \end{bmatrix}$$

を満たす。これより

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\cos t\omega)x_1(0) + (\omega^{-1}\sin t\omega)x_1'(0) \\ &= \mathrm{Re}(x_1(0)e^{it\omega} - i\omega^{-1}x_1'(0)e^{it\omega}) \\ &= \mathrm{Re}((x_1(0) - i\omega^{-1}x_1'(0))e^{it\omega}) \\ &= \sqrt{c/a}\ \mathrm{Re}((\cos\theta_0 - i\cos\theta_1 e)e^{it\omega}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= (\cos t\omega)x_2(0) + (\omega^{-1}\sin t\omega)x_2'(0) \\ &= \mathrm{Re}((x_2(0) - i\omega^{-1}x_2'(0)e^{it\omega}) \\ &= \sqrt{c/d}\ \mathrm{Re}((\sin\theta_0 - i\sin\theta_1)e^{it\omega}) \end{aligned}$$

が従う。$t = 0$ として (3.6) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= ax_1(0)x_1'(0) + dx_2(0)x_2'(0) \\ &= a(\omega c/a)\cos\theta_0\cos\theta_1 + d(\omega c/d)\sin\theta_0\sin\theta_1 \\ &= \omega c\cos(\theta_0 - \theta_1) \end{aligned}$$

より $\cos(\theta_0 - \theta_1) = 0$ を得る。即ち $\theta_0, \theta_1 \in [0, 2\pi)$ は

$$\theta_0 - \theta_1 \in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\}$$

を満たす。$\theta_0 - \theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ ならば

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \cos(\theta_0 \mp \frac{\pi}{2}) = \pm\sin\theta_0, \\ \sin\theta_1 &= \sin(\theta_0 \mp \frac{\pi}{2}) = \mp\cos\theta_0, \\ \sin\theta_0 &- i\sin\theta_1 = \sin\theta_0 \pm i\cos\theta_0 = \pm i(\cos\theta_0 \mp i\sin\theta_0) = \pm ie^{\mp i\theta_0} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sqrt{c/a}\ \mathrm{Re}(e^{\mp i\theta_0}e^{it\omega}) = \sqrt{c/a}\cos(t\omega \mp \theta_0) = \sqrt{c/a}\cos(\mp t\omega + \theta_0), \\ x_2(t) &= \sqrt{c/d}\ \mathrm{Re}(\pm ie^{\mp i\theta_0}e^{it\omega}) = \mp\sqrt{c/d}\sin(t\omega \mp \theta_0) = \sqrt{c/d}\sin(\mp t\omega + \theta_0) \end{aligned}$$

が従う。$\theta_0 - \theta_1 = \pm\frac{3\pi}{2}$ ならば

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \cos(\theta_0 \pm \frac{3\pi}{2}) = \mp\sin\theta_0, \\ \sin\theta_1 &= \sin(\theta_0 \pm \frac{3\pi}{2}) = \pm\cos\theta_0, \\ \sin\theta_0 &- i\sin\theta_1 = \sin\theta_0 \mp i\cos\theta_0 = \mp i(\cos\theta_0 \pm i\sin\theta_0) = \mp ie^{\pm i\theta_0} \end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \sqrt{c/a}\ \mathrm{Re}(e^{\pm i\theta_0}e^{it\omega}) = \sqrt{c/a}\cos(t\omega \pm \theta_0) = \sqrt{c/a}\cos(\pm t\omega + \theta_0),\\
x_2(t) &= \sqrt{c/d}\ \mathrm{Re}(\mp i e^{\pm i\theta_0}e^{it\omega}) = \pm\sqrt{c/d}\sin(t\omega \pm \theta_0) = \sqrt{c/d}\sin(\pm t\omega + \theta_0)
\end{aligned}
$$

となり、何れの場合も複合同順で

$$
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{c/a}\cos(\pm t\omega + \theta_0) \\ \sqrt{c/d}\sin(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix} \tag{3.7}
$$

と表される。(3.7) に於いて $\pm$ は x_0 と v_0 との関係 (同値である θ_0 と θ_1 との関係) に依って一意的に定まり点の運動の向き (時計周りか反時計回りか) に対応する。$\theta(t) = \pm t\omega + \theta_0$ とすると (3.7) より

$$
\frac{c}{a}\cos^2\theta(t) + \frac{c}{d}\sin^2\theta(t) = (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = |x(t)|^2 \tag{3.8}
$$

$$
\frac{c}{a}\sin^2\theta(t) + \frac{c}{d}\cos^2\theta(t) = \frac{1}{\omega^2}((x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2) = \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2 \tag{3.9}
$$

を得る。(3.8) の両辺に $\frac{a}{c}$ を掛け (3.9) の両辺に $\frac{d}{c}$ を掛け辺々引くと

$$
\left(\frac{a}{d} - \frac{d}{a}\right)\sin^2\theta(t) = \frac{a}{c}|x(t)|^2 - \frac{d}{c\omega^2}|x'(t)|^2
$$

を得るので $a \neq d$ ならば

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta(t) &= \frac{ad}{a^2-d^2}\left(\frac{a}{c}|x(t)|^2 - \frac{d}{c\omega^2}|x'(t)|^2\right),\\
\cos^2\theta(t) &= \frac{a}{c}|x(t)|^2 - \frac{a}{d}\sin^2\theta(t)\\
&= \frac{a}{c}|x(t)|^2 - \frac{a^2}{a^2-d^2}\left(\frac{a}{c}|x(t)|^2 - \frac{d}{c\omega^2}|x'(t)|^2\right)\\
&= \frac{ad}{a^2-d^2}\left(-\frac{d}{c}|x(t)|^2 - \frac{a}{c\omega^2}|x'(t)|^2\right),\\
1 &= \sin^2\theta(t) + \cos^2\theta(t) = \frac{ad}{a^2-d^2}\left(\frac{a-d}{c}|x(t)|^2 + \frac{a-d}{c\omega^2}|x'(t)|^2\right)\\
&= \frac{ad}{a+d}\frac{1}{c}\left(|x(t)|^2 + \frac{1}{\omega^2}x'(t)|^2\right),\\
|x(t)|^2 &+ \frac{1}{\omega^2}\ |x'(t)|^2 = c\frac{a+d}{ad}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

が成立つ。$a = d$ なら (3.8) と (3.9) を加えて (3.10) を得る。

定理 2 の保存則 (1.2) は (3.10) を用いると

$$
\begin{aligned}
&|x'(t)|^2 + \frac{1}{c}B(x'(0), x'(0))|x(t)|^2\\
&= \omega^2(|x(t)|^2 + \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2) = \omega^2 c\frac{a+d}{ad}\\
&= B(x'(0), x'(0))\frac{a+d}{ad}
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

と書き換えられる。特に

$$|v_0|^2 + \frac{1}{c}B(v_0, v_0)|x_0|^2 = B(v_0, v_0)\frac{a+d}{ad} \tag{3.12}$$

が成立つ。

(b) $c < 0$ の場合

$\omega = \sqrt{-B(v_0, v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$x''(t) - \omega^2 x(t) = 0 \tag{3.13}$$

となるので解 $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ は

$$x(t) = (\cosh t\omega)x_0 + (\omega^{-1}\sinh t\omega)v_0 \tag{3.14}$$

と表示される。$B(x_0, x_0) = c < 0,\ B(v_0, v_0) > 0,\ B(x_0, v_0) = 0$ より
任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

$$B(\alpha x_0 + \beta v_0, \alpha x_0 + \beta v_0) = \alpha^2 c + \beta^2 B(v_0, v_0)$$

となり $B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ が従う。一方 $\xi = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2$ に対し

$$B(\xi, \xi) = [\xi_1\xi_2]A\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} = a\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2$$

となるから $ad < 0$ が導かれる。従って $a < 0 < d$ 又は $a > 0 > d$ の何れかが成立する。初めに $a < 0 < d$ の場合を考える。

$x(t)$ を (3.3) と同様縦ベクトル表示とすると (3.4) から (3.6) に対応する等式は夫々

$$a(x_1(t))^2 + d(x_2(t))^2 = c < 0, \tag{3.15}$$

$$a(x_1'(t))^2 + d(x_2'(t))^2 = B(v_0, v_0) = -c\omega^2 > 0, \tag{3.16}$$

$$ax_1(t)x_1'(t) + dx_2(t)x_2'(t) = 0, \tag{3.17}$$

と表される。$t = 0$ とすれば (3.15) 及び (3.16) より等式

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}}\right)^2 - \left(\frac{x_2(0)}{\sqrt{|c|/a}}\right)^2 = 1, \tag{3.18}$$

$$\left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{|c/a|}}\right)^2 - \left(\frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}}\right)^2 = -1 \tag{3.19}$$

が従う。(3.18) 及び (3.19) より

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}}\right)^2 \geq 1, \ \left(\frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}}\right)^2 \geq 1$$

となるので

$$\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}} \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad \frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}} \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

が従う。これにより 4 つの場合更には $x_2(0)$ と $x_1'(0)$ の符号に依り 16 の場合に分けて考える。

(1) $\quad x_1(0)/\sqrt{|c/a|} \geq 1, \ x_2'(0)/(\omega\sqrt{|c|/d}) \geq 1$ **の場合**

(3.18) 及び (3.19) に因り $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ が唯一組存在し

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}}, \frac{x_2(0)}{\sqrt{|c|/d}}\right) = (\cosh\theta_0, \sinh\theta_0), \left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{|c/a|}}, \ \frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}}\right) = (\sinh\theta_1, \cosh\theta_1)$$

が成立つ。これらを (3.17) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= ax_1(0)x_1'(0) + dx_2(0)x_2'(0) = |c|\omega(-\cosh\theta_0 \sinh\theta_1 + \sinh\theta_0 \cosh\theta_1) \\ &= \frac{c\omega}{4}((e^{\theta_0} + e^{-\theta_0})(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}) - (e^{\theta_0} - e^{-\theta_0})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})) \\ &= \frac{c\omega}{2}(e^{-\theta_0+\theta_1} - e^{\theta_0-\theta_1}) \end{aligned}$$

となるので $\theta_0 = \theta_1$ を得る。この条件は次の 4 つの場合

(i) $\quad x_2(0) \geq 0, \ x_1'(0) \geq 0$

(ii) $\quad x_2(0) \geq 0, \ x_1'(0) < 0$

(iii) $\quad x_2(0) < 0, \ x_1'(0) \geq 0$

(iv) $\quad x_2(0) < 0, \ x_1'(0) < 0$

の内 (i) は $\theta_0 = \theta_1 \geq 0$, (iv) は $\theta_0 = \theta_1 < 0$ として実現するが (ii) や (iii) とは両立しない（即ち (ii) と (iii) の場合は起こらない）。(i) または (ii) の場合 x は

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}(\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 + \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\ &= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\frac{1}{4}\left((e^{t\omega} + e^{-t\omega})(e^{\theta_0} + e^{-\theta_0}) + (e^{t\omega} - e^{-t\omega})(e^{\theta_0} - e^{-\theta_0})\right) \\ &= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\frac{1}{2}\left(e^{t\omega+\theta_0} + e^{-t\omega-\theta_0}\right) = \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\cosh(t\omega + \theta_0), \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{d}}(\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 + \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{d}}\frac{1}{4}\left((e^{t\omega}+e^{-t\omega})(e^{\theta_0}+e^{-\theta_0}) + (e^{t\omega}-e^{-t\omega})(e^{\theta_0}+e^{-\theta_0})\right) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{d}}\frac{1}{2}\left(e^{t\omega+\theta_0} - e^{-t\omega-\theta_0}\right) = \sqrt{\frac{|c|}{d}}\sinh(t\omega+\theta_0)
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

と表される。

(2) $x_1(0)/\sqrt{|c/a|} \geq 1,\ x_2'(0)/(\omega\sqrt{|c|/d}) \leq -1$ **の場合**

(3.18) 及び (3.19) に因り $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ が唯一組存在し

$$
\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}}, \frac{x_2(0)}{\sqrt{|c|/d}}\right) = (\cosh\theta_0, \sinh\theta_0), \left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{|c/a|}},\ \frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}}\right) = (-\sinh\theta_1, -\cosh\theta_1),
$$

が成立つ。これらを (3.17) に代入すると (1) と同様にして $\theta_0 = \theta_1$ が得られる。この条件は次の 4 つの場合

(i) $x_2(0) \geq 0,\ x_1'(0) > 0$

(ii) $x_2(0) \geq 0,\ x_1'(0) \leq 0$

(iii) $x_2(0) < 0,\ x_1'(0) > 0$

(iv) $x_2(0) < 0,\ x_1'(0) \leq 0$

の内 (ii) は $\theta_0 = \theta_1 \geq 0$, (iii) は $\theta_0 = \theta_1 < 0$ として実現するが (i) や (iv) とは両立しない。(ii) または (iii) の場合 x は

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}(\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 - \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\frac{1}{4}\left((e^{t\omega}+e^{-t\omega})(e^{\theta_0}+e^{-\theta_0}) - (e^{t\omega}-e^{-t\omega})(e^{\theta_0}-e^{-\theta_0})\right) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\frac{1}{2}\left(e^{t\omega-\theta_0} + e^{-t\omega+\theta_0}\right) = \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\cosh(t\omega-\theta_0),
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{d}}(\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 - \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{d}}\frac{1}{4}\left((e^{t\omega}+e^{-t\omega})(e^{\theta_0}-e^{-\theta_0}) - (e^{t\omega}-e^{-t\omega})(e^{\theta_0}+e^{-\theta_0})\right) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{d}}\frac{1}{2}\left(-e^{t\omega-\theta_0} + e^{-t\omega-\theta_0}\right) = -\sqrt{\frac{|c|}{d}}\sinh(t\omega-\theta_0)
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

と表される。

(3) $x_1(0)/\sqrt{|c/a|} \leq -1,\ x_2'(0)/(\omega\sqrt{|c|/d}) \geq 1$ **の場合**

(3.18) 及び (3.19) に因り $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ が唯一組存在し

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}}, \frac{x_2(0)}{\sqrt{|c|/d}}\right) = (-\cosh\theta_0, -\sinh\theta_0), \left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{|c/a|}},\ \frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}}\right) = (\sinh\theta_1, \cosh\theta_1)$$

が成立つ。これらを (3.17) に代入して $\theta_0 = \theta_1$ を得る。この条件は (2) の 4 つの場合 (i)-(iv) の内 (ii) は $\theta_0 = \theta_1 \leq 0$,(iii) は $\theta_0 = \theta_1 > 0$ として実現するが (i) や (iv) とは両立しない。(ii) または (iii) の場合 x は

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}(\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 + \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\frac{1}{4}\left(-(e^{t\omega} + e^{-t\omega})(e^{\theta_0} + e^{\theta_0}) + (e^{t\omega} - e^{-t\omega})(e^{\theta_0} - e^{-\theta_0})\right) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\frac{1}{2}\left(-e^{t\omega+\theta_0} - e^{-t\omega+\theta_0}\right) = \ -\sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\cosh(t\omega - \theta_0),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{d}}(\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 + \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{d}}\frac{1}{4}\left(-(e^{t\omega} + e^{-t\omega})(e^{\theta_0} - e^{-\theta_0}) + (e^{t\omega} - e^{-t\omega})(e^{\theta_0} + e^{-\theta_0})\right) \\
&= \sqrt{\frac{|c|}{d}}\frac{1}{2}\left(e^{t\omega-\theta_0} - e^{-t\omega+\theta_0}\right) = \ \sqrt{\frac{|c|}{d}}\sinh(t\omega - \theta_0)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

と表される。

(4) $x_1(0)/\sqrt{|c/a|} \leq -1,\ x_2'(0)/(\omega\sqrt{|c|/d}) \leq -1$ **の場合**

(3.18) 及び (3.19) に因り $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ が唯一組存在し

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{|c/a|}}, \frac{x_2(0)}{\sqrt{|c|/d}}\right) = (-\cosh\theta_0, -\sinh\theta_0), \left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{|c/a|}},\ \frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{|c|/d}}\right) = (-\sinh\theta_1, -\cosh\theta_1)$$

が成立つ。これらを (3.17) に代入して $\theta_0 = \theta_1$ を得る。この条件は (1) の 4 つの場合 (i)-(iv) の内 (i) は $\theta_0 = \theta_1 \leq 0$, (iv) は $\theta_0 = \theta_1 > 0$ として実現するが (ii) や (iii) とは両立しない。(i) または (iv) の場合 x は

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}(-\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 - \sinh t\omega \cdot \sinh\theta_0) \\
&= \ -\sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\cosh(t\omega + \theta_0),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) =& \sqrt{\frac{|c|}{d}}(-\cosh t\omega \cdot \cosh\theta_0 - \sinh t\omega \cdot \cosh\theta_0) \\ =& -\sqrt{\frac{|c|}{d}}\sinh(t\omega + \theta_0) \end{aligned} \tag{3.27}$$

と表される。

以上纏めると $x_1(0)/\sqrt{|c/a|} \geq 1$ の場合 (3.20)-(3.23) より x は

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\cosh(\pm t\omega + \theta_0) \\ \sqrt{\frac{|c|}{d}}\sinh(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

と表され $x_1(0)/\sqrt{|c/a|} \leq -1$ の場合 (3.24)-(3.27) より x は

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{|c|}{|a|}}\cosh(\pm t\omega + \theta_0) \\ -\sqrt{\frac{|c|}{d}}\sinh(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

と表される。(3.28) か (3.29) かは $x_1(0)$ の符号により決定され、$\pm t\omega$ の符号は点の運動の向きに対応し $x_2'(0)$ の符号により決定される。$\theta(t) = \pm t\omega + \theta_0$ とすると (3.28) 及び (3.29) より

$$\frac{|c|}{|a|}\cosh^2\theta(t) + \frac{|c|}{d}\sinh^2\theta(t) = |x(t)|^2, \tag{3.30}$$

$$\frac{|c|}{|a|}\sinh^2\theta(t) + \frac{|c|}{d}\cosh^2\theta(t) = \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2 \tag{3.31}$$

を得る。(3.30) の両辺に $\frac{|a|}{|c|}$ を掛け (3.31) の両辺に $\frac{d}{|c|}$ を掛け辺々引くと

$$\left(\frac{|a|}{d} - \frac{d}{|a|}\right)\sinh^2\theta(t) = \frac{|a|}{c}|x(t)|^2 - \frac{d}{|c|\omega^2}|x'(t)|^2$$

を得るので $|a| \neq d$ ならば

$$\begin{aligned} \sinh^2\theta(t) &= \frac{|a|d}{|a|^2 - d^2}\left(\frac{|a|}{|c|}|x(t)|^2 - \frac{d}{|c|\omega^2}|x'(t)|^2\right), \\ \cosh^2\theta(t) &= \frac{|a|}{|c|}|x(t)|^2 - \frac{|a|}{d}\sinh^2\theta(t) \\ &= \frac{|a|}{|c|}|x(t)|^2 - \frac{|a|}{|a|^2 - d^2}\left(\frac{|a|}{|c|}|x(t)|^2 - \frac{d}{|c|\omega^2}|x'(t)|^2\right) \\ &= \frac{|a|d}{|a|^2 - d^2}\left(-\frac{d}{|c|}|x(t)|^2 + \frac{|a|}{|c|\omega^2}|x'(t)|^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 =& \cosh^2\theta(t) - \sinh^2\theta(t) \\ =& \frac{|a|d}{|a|^2 - d^2}\left(-\frac{|a| + d}{|c|}|x(t)|^2 + \frac{|a| + d}{|c|\omega^2}|x'(t)|^2\right) \\ =& -\frac{|a|d}{|a| - d}\frac{1}{|c|}\left(|x(t)|^2 - \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2\right) \\ =& \frac{ad}{a + d}\frac{1}{c}\left(|x(t)|^2 - \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2\right), \end{aligned}$$

$$|x(t)|^2 - \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2 = c\frac{a+d}{d} \tag{3.32}$$

が成立つ。$d=-a$ ならば (3.30) と (3.31) を加えて (3.32) を得る。
定理 2 の保存則 (1.2) は (3.32) を用いると

$$\begin{aligned}
&|x'(t)|^2 + \frac{1}{c}B(x'(0), x'(0))|x(t)|^2 \\
=& -\omega^2(|x(t)|^2 - \frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2) = -\omega^2 c\frac{a+d}{ad} \\
=& B(x'(0), x'(0))\frac{a+d}{ad}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

と書き換えられる。特に

$$|v_0|^2 + \frac{1}{c}B(v_0, v_0)|x_0|^2 = B(v_0, v_0)\frac{a+d}{ad} \tag{3.34}$$

が成立つ。

さて $a > 0 > d$ の場合は x_1 と x_2 を交換し a と d を交換すれば全て同じ議論となり $x_2(0)/\sqrt{|c/d|} \geq 1$ の場合 x は

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{|c|}{a}}\sinh(\pm t\omega + \theta_0) \\ \sqrt{\frac{|c|}{|d|}}\cosh(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix}$$

と表され $x_2(0)/\sqrt{|c/d|} \leq -1$ の場合 x は

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{|c|}{a}}\sinh(\pm t\omega + \theta_0) \\ -\sqrt{\frac{|c|}{|d|}}\cosh(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix}$$

と表される。これらより (3.33) 特に (3.34) が従う。

(II)　$B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0,\ B(v_0, v_0) < 0$ の場合

(a)　$c > 0$ の場合

$\omega = \sqrt{-B(v_0, v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

となるので解 $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ は

$$x(t) = (\cos t\omega)x_0 + (\omega^{-1}\sin t\omega)v_0$$

と表示される。$B(x_0, x_0) = c > 0 = B(x_0, v_0) > B(v_0, v_0)$ より $B(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ が従い $ad < 0$ が導かれる。$a > 0 > d$ の場合

$$\left(\frac{x_1(0)}{\sqrt{c/a}}\right)^2 - \left(\frac{x_2(0)}{\sqrt{c/|d|}}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x_1'(0)}{\omega\sqrt{c/a}}\right)^2-\left(\frac{x_2'(0)}{\omega\sqrt{c/|d|}}\right)^2=-1$$

となるので $x_1(0)/\sqrt{c/a}\geq 1$ の場合 x は

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{c}{a}}\cosh(\pm t\omega+\theta_0)\\\sqrt{\frac{c}{|d|}}\sinh(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}$$

と表され $x_1(0)/\sqrt{c/a}\leq -1$ の場合 x は

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{c}{a}}\cosh(\pm t\omega+\theta_0)\\-\sqrt{\frac{c}{|d|}}\sinh(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}$$

と表される。これらより (3.33) 特に (3.34) が従う。$a<0<d$ の場合は x_1 と x_2 を交換し a と d を交換すれば全て同じ議論となり $x_2(0)/\sqrt{c/d}\geq 1$ の場合 x は

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{c}{|a|}}\sinh(\pm t\omega+\theta_0)\\\sqrt{\frac{c}{d}}\cosh(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}$$

と表され $x_2(0)/\sqrt{c/a}\leq -1$ の場合 x は

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{c}{|a|}}\sinh(\pm t\omega+\theta_0)\\-\sqrt{\frac{c}{d}}\cosh(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}$$

と表される。これらより (3.33) 特に (3.34) が従う。

(b) $c<0$ の場合

$\omega=\sqrt{B(v_0,v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$x''(t)-\omega^2x(t)=0$$

となるので解 $x\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ は

$$x(t)=(\cos t\omega)x_0+(\omega^{-1}\sin t\omega)v_0$$

と表示される。$B(x_0,x_0)=c<0,\ B(v_0,v_0)<0,$ より $B(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)\subset(-\infty,0)$ が従い $a<0,d<0$ が導かれる。(I)(a) と同様な議論で x は

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{c/a}\cos(\pm t\omega+\theta_0)\\\sqrt{c/d}\sin(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}$$

と表され (3.10) 及び (3.11) 特に (3.12) が従う。

(III)$B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\neq 0,\ B(v_0,v_0)>0$ の場合

$b=B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\neq 0$ であるから A は非対角型の場合である。$c\neq 0$ 故 $c>0$ 又は $c<0$ のどちらかに分類される。

(a) $c>0$ の場合

$\omega=\sqrt{B(v_0,v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$x''(t)+\omega^2 x(t)=0$$

となるので解 $x\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ は

$$x(t)=(\cos t\omega)x_0+(\omega^{-1}\sin t\omega)v_0$$

と表示される。定理 1 の証明より x_0 と v_0 は $\mathbb{R}^2$ の基底を成している事が従い任意の $\xi\in\mathbb{R}^2$ は唯一組の $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ に従って $\xi=\alpha x_0+\beta v_0$ と表示される。
このとき

$$B(\xi,\xi)=B(\alpha x_0+\beta v_0,\alpha x_0+\beta v_0)=\alpha^2 B(x_0,x_0)+\beta^2 B(v_0,v_0)$$

より $B(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)\subset(0,\infty)=\mathbb{R}_{>0}$ が従う。特に前節の対角化表示

$${}^tPAP=\begin{bmatrix}\lambda_t & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}$$

に於いて夫々$\xi=P\mathbf{e}_1$ 及び $\xi=P\mathbf{e}_2$ と置くと

$$\begin{aligned}B(P\mathbf{e}_1,P\mathbf{e}_1)&={}^t(P\mathbf{e}_1)A(P\mathbf{e}_1)={}^t\mathbf{e}_1\,{}^tPAP\mathbf{e}_1=\lambda_+,\\ B(P\mathbf{e}_2,P\mathbf{e}_2)&={}^t(P\mathbf{e}_2)A(P\mathbf{e}_2)={}^t\mathbf{e}_2\,{}^tPAP\mathbf{e}_2=\lambda_-\end{aligned}$$

となるので $\lambda_+>\lambda_->0$ が従う。さて $y(t)={}^tPx(t)$ と置くと

$$\begin{aligned}y''(t)&={}^tPx''(t)={}^tP(-\omega^2x(t))=-\omega^2y(t),\\ y(t)&={}^tP((\cos t\omega)x_0+(\omega^{-1}\sin t\omega)v_0)\\ &=(\cos t\omega){}^tPx_0+(\omega^{-1}\sin t\omega){}^tPv_0\end{aligned}$$

となり $y(t)$ を縦ベクトル表示

$$y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=y_1(t)\mathbf{e}_1+y_2(t)\mathbf{e}_2$$

すれば

$$\begin{aligned}\lambda_+(y_1(t))^2+\lambda_-(y_2(t))^2&={}^ty(t)\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}y(t)={}^t({}^tPx(t))\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}{}^tPx(t)\\ &={}^tx(t)P\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}{}^tPx(t)={}^tx(t)Ax(t)\\ &=B(x(t),x(t))=c,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_+(y_1'(t))^2+\lambda_-(y_2'(t))^2 &= {}^t x'(t)P\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}{}^tPx'(t) = {}^tx'(t)Ax'(t)\\
&= B(x'(t),x'(t)) = c\omega^2,\\
\lambda_+y_1(t)y_1'(t)+\lambda_-y_2(t)y_2'(t) &= {}^tx(t)P\begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}{}^t({}^tPx'(t)) = {}^tx(t)Ax'(t)\\
&= B(x(t),x'(t)) = 0
\end{aligned}
$$

が従う。(I)(a) と同様な議論で y は

$$
\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{\frac{c}{\lambda_+}}\cos(\pm t\omega+\theta_0)\\ \sqrt{\frac{c}{\lambda_-}}\sin(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}
$$

と表され x は

$$
\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{c}{\lambda_+}}\cos(\pm t\omega+\theta_0)\\ \sqrt{\frac{c}{\lambda_-}}\sin(\pm t\omega+\theta_0)\end{bmatrix}
$$

と表される。(3.10) と同様な議論に依り

$$
|y(t)|^2+\frac{1}{\omega^2}|y'(t)|^2 = c\frac{\lambda_++\lambda_-}{\lambda_+\lambda_-} = c\frac{\mathrm{tr}A}{\mathrm{det}A}
$$

が成立つ。$|x(t)|=|Py(t)|=|y(t)|$ 及び $|x'(t)|=|Py'(t)|=|y'(t)|$ より

$$
\begin{aligned}
&|x'(t)|^2+\frac{1}{c}B(x'(0),x'(0))|x(t)|^2\\
&= \omega^2(|x(t)|^2+\frac{1}{\omega^2}|x'(t)|^2) = \omega^2 c\frac{\mathrm{tr}A}{\det A}\\
&= B(x'(0),x'(0))\frac{\mathrm{tr}A}{\det A}
\end{aligned}
$$

特に

$$
|v_0|^2+\frac{1}{c}B(v_0,v_0)|x_0|^2 = B(v_0,v_0)\frac{\mathrm{tr}A}{\det A}
$$

が得られる。

(IV) $B(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\neq 0,\ B(v_0,v_0)<0$ の場合

(a) $c>0$ の場合

$\omega=\sqrt{-B(v_0,v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$
x''(t)-\omega^2x(t)=0
$$

となるので解 $x\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ は

$$
x(t) = (\cosh t\omega)x_0+(\omega^{-1}\sinh t\omega)v_0
$$

と表示される。A は直交行列 P に依り $\lambda_+ > 0 > \lambda_-$ なる固有値 $\lambda_\pm$ を並べた対角行列に対角化される。$y(t) = {}^tPx(t)$ と置くと y は $y_1(0) > 0$ の場合

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{|c|}{\lambda_+}} \cosh(\pm t\omega + \theta_0) \\ \sqrt{\frac{|c|}{|\lambda_-|}} \sinh(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix}$$

と表され $y_1(0) < 0$ の場合

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{|c|}{\lambda_+}} \cosh(\pm t\omega + \theta_0) \\ -\sqrt{\frac{|c|}{|\lambda_-|}} \sinh(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix}$$

と表される。(3.32) と同様な議論に依り

$$|y(t)|^2 - \frac{1}{\omega^2}|y'(t)|^2 = c\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{\lambda_+\lambda_-} = c\frac{\mathrm{tr}A}{\mathrm{det}A}$$

が成立つ。$|x(t)| = |y(t)|$ 及び $|x'(t)| = |y'(t)|$ より

$$\begin{aligned} &|x'(t)|^2 + \frac{1}{c}B(x'(0), x'(0))|x(t)|^2 \\ = &-\omega^2 c\frac{\mathrm{tr}A}{\det A} = \ B(x'(0), x'(0))\frac{\mathrm{tr}A}{\det A} \end{aligned}$$

特に

$$|v_0|^2 + \frac{1}{c}B(v_0, v_0)|x_0|^2 = B(v_0, v_0)\frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

が従う。

(b) $c < 0$ の場合

$\omega = \sqrt{B(v_0, v_0)/c}$ と置く。このとき (1.1) は

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

となるので解 $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ は

$$x(t) + (\cos t\omega)x_0 + (\omega^{-1}\sin t\omega)v_0$$

と表示される。A は直交行列 P に依り $0 > \lambda_+ > \lambda_-$ なる固有値 $\lambda_\pm$ を並べた対角行列に対角化される。$y(t) = {}^tPx(t)$ と置くと y は

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{c}{\lambda_+}} \cos(\pm t\omega + \theta_0) \\ \sqrt{\frac{c}{\lambda_-}} \sin(\pm t\omega + \theta_0) \end{bmatrix}$$

と表される。(3.10) と同様な議論に依り

$$|y(t)|^2 + \frac{1}{\omega^2}|y'(t)|^2 = c\frac{\mathrm{tr}A}{\mathrm{det}A}$$

が成立ち

$$|x'(t)|^2 + \frac{1}{c}B(x'(0), x'(0))|x(t)|^2 = B(x'(0), x'(0))\frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

特に

$$|v_0|^2 + \frac{1}{c}B(v_0, v_0)|x_0|^2 = B(v_0, v_0)\frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

が従う。

以上を定理の形に纏めて置こう。

定理 3　$B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を対称双線型形式とし A を対応する二次対称行列とする。$x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し等式 $B(x(t), x(t)) = B(x(0), x(0)) \neq 0$ 及び $B(x'(t), x'(t)) = B(x'(0), x'(0)) \neq 0$ を満たしているものとする。$x_0 = x(0), v_0 = x'(0), B(x_0, x_0) = c$ と置く。$\lambda_\pm \in \mathbb{R}$ を $\lambda_+ \geq \lambda_-$ なる A の固有値とし P を ${}^tPAP = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}$ なる直交行列とする。

(1)　$B(x_0, x_0)B(v_0, v_0) > 0$ の場合 $\omega = \sqrt{B(v_0, v_0)/B(x_0, x_0)}$ と置くと x は微分方程式

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

を満たし、その解は三角函数で媒介変数表示される。x は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\frac{|x'(t)|^2}{B(x'(t), x'(t))} + \frac{|x(t)|^2}{B(x(t), x(t))} = \frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

を満たす。特に x_0, v_0 は拘束条件

$$\frac{|v_0|^2}{B(v_0, v_0)} + \frac{|x_0|^2}{B(x_0, x_0)} = \frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

に支配される。

(2)　$B(x_0, x_0)B(v_0, v_0) < 0$ の場合 $\omega = \sqrt{-B(v_0, v_0)/B(x_0, x_0)}$ と置くと x は微分方程式

$$x''(t) - \omega^2 x(t) = 0$$

を満たし、その解は双曲線函数で媒介変数表示される。x は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\frac{|x'(t)|^2}{B(x'(t), x'(t))} + \frac{|x(t)|^2}{B(x(t), x(t))} = \frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

を満たす。特に x_0, v_0 は拘束条件

$$\frac{|v_0|^2}{B(v_0, v_0)} + \frac{|x_0|^2}{B(x_0, x_0)} = \frac{\mathrm{tr}A}{\det A}$$

に支配される。

参考文献：M. Giaquinta and G. Modica, Mathematical Analysis,
Function of One Variable, Birkhäuser.
M. Giaquinta, G. Modica and J. Souček, Cartesian Currents in the Calculus of Variations II, Springer
小澤徹，三角函数と回転