ユークリッド空間に於けるベクトル積

平成 21 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於ける $(n-1)$ 個の元の成すベクトル積 (vector product, cross product) に就いて纏めて置こう。以下 $n \geqslant 3$ とし $\mathbb{R}^n$ の元を

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

の様に縦ベクトル表示する。$(\vec{e}_j; 1 \le j \le n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とすると $u \in \mathbb{R}^n$ は

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j$$

と表される。$\mathbb{R}^n$ に於けるスカラー積を $u \cdot v \left(= \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \right)$ とすると任意の $u \in \mathbb{R}^n$ は

$$u = \sum_{j=1}^{n} (u \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_j$$

と表される。$\mathbb{R}^n$ に於けるノルム（ユークリッド的距離）を $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ と表す。

１．ベクトル積の定義と基本的性質

$u_1, \cdots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ を与えられた $(n-1)$ 個のベクトルとする。$v \in \mathbb{R}^n$ に対し n 個の縦ベクトル $v, u_1, \cdots, u_{n-1}$ を左から順に並べて n 次正方行列 $(v, u_1, \cdots, u_{n-1})$ を考え、その行列式を $\varphi(v)$ とする：

$$\varphi(v) = \det(v, u_1, \cdots, u_{n-1}) = (i_v \det)(u_1, \cdots, u_{n-1})$$

行列式の性質により $\varphi : \mathbb{R}^n \ni v \mapsto \varphi(v) \in \mathbb{R}$ は線型となる。各 j に対し $\varphi(\vec{e}_j) \in \mathbb{R}$ であるから $u = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\vec{e}_j) \vec{e}_j$ が $\mathbb{R}^n$ の元として定まる。このとき任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$u \cdot v = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\vec{e}_j) \vec{e}_j \cdot v = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\vec{e}_j) v_j = \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j \right) = \varphi(v)$$

となる。この様な u は $u_1, \cdots, u_{n-1}$ により一意的に定まる。実際もう一つの $u' \in \mathbb{R}^n$ が任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$u' \cdot v = \varphi(v)$$

を満たしているものとすると $(u-u')\cdot v=0$ となり $v=u-u'$ とする事により $u=u'$ が従う。

　この u を $u_1,\cdots,u_{n-1}$ のベクトル積と謂い $u=u_1\times\cdots\times u_{n-1}$ と表す。
即ち $u_1\times\cdots\times u_{n-1}$ は任意の $v\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$(u_1\times\cdots\times u_{n-1})\cdot v=\det(v,u_1,\cdots,u_{n-1})$$

なる唯一つのベクトルであり $\varphi(\vec{e}_j)=\det(\vec{e}_j,u_1,\cdots,u_{n-1})$ であるから

$$u_1\times\cdots\times u_{n-1}=\sum_{j=1}^{n}\ \det\ (\vec{e}_j,u_1,\cdots,u_{n-1})\ \vec{e}_j$$

と表される。

定理１　$u_1,\cdots,u_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ に対して定まるベクトル積 $u_1\times\cdots\times u_{n-1}$ は次の性質を満たす。

(1) (**交代多重線型性**)　$\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n\ni(u_1,\cdots,u_{n-1})\mapsto u_1\times\cdots\times u_{n-1}\in\mathbb{R}^n$
は 交代 $(n-1)$ 重線型写像である。

(2) (**零ベクトル積の特徴付け**)

$$u_1\times\cdots\times u_{n-1}=0\Leftrightarrow\ u_1,\cdots,u_{n-1}\ \text{は線型従属}$$
$$u_1\times\cdots\times u_{n-1}\neq 0\Leftrightarrow\ u_1,\cdots,u_{n-1}\ \text{は線型独立}$$

(3) (**ベクトル積の直交性**)　$u_1\times\cdots\times u_{n-1}\in(\mathrm{span}(u_1,\cdots u_{n-1}))^{\perp}$
即ち $1\leqslant j\leqslant n-1$ なる任意の j に対し $(u_1\times\cdots\times u_{n-1})\cdot u_j=0$

(4) (**ベクトル積の長さ**)

$$\begin{aligned}|u_1\times\cdots\times u_{n-1}|^2 &= \det(u_1\times\cdots\times u_{n-1},u_1,\cdots,u_{n-1})\\ &= \det\begin{bmatrix} u_1\cdot u_1 & \cdots\cdots & u_1\cdot u_{n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n-1}\cdot u_1 & \cdots\cdots & u_{n-1}\cdot u_{n-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

即ち $(n-1)$ 個のベクトルの成すベクトル積の長さは対応する $(n-1)$ 次グラム行列の行列式の根に等しい。

(5) (**線型変換に関するベクトル積の変換則**)　$A\in M(n;\mathbb{R})$ に対し
${}^{t}A((Au_1)\times\cdots\times(Au_{n-1}))=(\det A)(u_1\times\cdots\times u_{n-1})$
特に $A\in GL(n;\mathbb{R})$ に対し
$(Au_1)\times\cdots\times(Au_{n-1})=(\det A)\ \ {}^{t}A^{-1}(u_1\times\cdots\times u_{n-1})$

特に $A \in O(n;\mathbb{R})$ ならば ${}^tAA = I$ となるので上の等式は

$$(Au_1) \times \cdots \times (Au_{n-1}) = (\det A)\ A(u_1 \times \cdots \times u_{n-1})$$

となり $\det A$ は 1 か -1 のどちらかの値を取る。

証明　(1) と (2) は等式 $u_1 \times \cdots \times u_{n-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \det(\vec{e}_j, u_1, \cdots, u_{n-1})\vec{e}_j$ 及び行列式の性質から従う。

(3)　$(u_1 \times \cdots \times u_{n-1}) \cdot u_j = \det(u_j, u_1, \cdots, u_{n-1})$ より従う。

(4)　$u_0 = u_1 \times \cdots \times u_{n-1},\ A = (u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}) \in M(n;\mathbb{R})$ とすると

$$|u_0|^2 = u_0 \cdot u_0 = \det(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}) = \det A$$

であるから

$$\begin{aligned}
|u_0|^4 &= \det A \cdot \det A = \det {}^tA \cdot \det A = \det {}^tAA \\
&= \det \begin{bmatrix} {}^tu_0 \\ {}^tu_1 \\ \vdots \\ {}^tu_{n-1} \end{bmatrix} [u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}] \\
&= \det \left[\begin{array}{c|ccc} {}^tu_0u_0 & {}^tu_0u_1 & \cdots & {}^tu_0u_{n-1} \\ \hline {}^tu_1u_0 & {}^tu_1u_1 & \cdots & {}^tu_1u_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^tu_{n-1}u_0 & {}^tu_{n-1}u_1 & \cdots & {}^tu_{n-1}u_{n-1} \end{array}\right] \\
&= \det \left[\begin{array}{c|ccc} u_0 \cdot u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & u_1 \cdot u_1 & \cdots & u_1 \cdot u_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & u_{n-1} \cdot u_1 & \cdots & u_{n-1} \cdot u_{n-1} \end{array}\right] = |u_0|^2 \det(u_i \cdot u_j)
\end{aligned}$$

となり (4) が従う。

(5)　n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の転置行列 ${}^tA$ を

$$(Au_1) \times \cdots \times (Au_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} \det(\vec{e}_j, Au_1, \cdots, Au_{n-1})\ \vec{e}_j$$

の両辺に作用させると

$$\begin{aligned}
{}^tA((Au_1) \times \cdots \times (Au_{n-1})) &= \sum_{j=1}^{n} \det(\vec{e}_j, Au_1, \cdots, Au_{n-1}) {}^tA\ \vec{e}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \det(\vec{e}_j, Au_1, \cdots, Au_{n-1}) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(\vec{e}_j, Au_1, \cdots, Au_{n-1}) \right) \vec{e}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \det(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j, Au_1, \cdots, Au_{n-1})\ \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det(A\vec{e}_i, Au_1, \cdots, Au_{n-1})\ \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \det(A(\vec{e}_i, u_1, \cdots, u_{n-1}))\ \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\det A)(\det(\vec{e}_i, u_1, \cdots, u_{n-1}))\ \vec{e}_i \\
&= (\det A) u_1 \times \cdots \times u_{n-1}
\end{aligned}$$

となり (5) が従う。

２．外積代数との関係

V を実ベクトル空間、V^* をその双対空間とする。$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\bigwedge^k V^*$ を $V^k = V \times \cdots \times V$ から $\mathbb{R}$ への交代多重線型写像全体の成すベクトル空間とする：

$$\begin{aligned}
\bigwedge^0 V^* &= \mathbb{R} \\
\bigwedge^1 V^* &= V^* \\
\bigwedge^k V^* &= \{\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R};\ \omega \text{は交代多重線型}\}, \quad k \geqslant 2.
\end{aligned}$$

$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in V^*, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k V^*$ が

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j))$$

で定まる。以下 V は有限次元とする。$n = \dim V$ とし $(e_1, \cdots, e_n)$ を V の一つの基底とする。$1 \leqslant i \leqslant n$ に対し e_i^* を $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ で定まる V^* の元とする。$(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ は V^* の基底を成す。実際、任意の $\alpha \in V^*$ は $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \in V$ に対し

$$\alpha(v) = \alpha(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \alpha(e_j) \in \mathbb{R}$$

なる値を持つが $v_i = e_i^*(v) \in \mathbb{R}$ なので

$$\alpha(v) = \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)\alpha(e_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha(e_j) e_j^*\right)(v)$$

とも表される。v は任意であったので

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha(e_j) e_j^*$$

と表される。即ち $(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ は V^* の生成系である。$(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ が線型独立であることは、その任意の線型結合に対し各 e_j 上での値を取る事によって示される。$1\leqslant k\leqslant n$ なる k を一つ与えるとき $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$ なる組 $(i_1,\cdots,i_k)$ は $\binom{n}{k}$ 個存在する。

$$(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*\ ;\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$$

は $\bigwedge^k V^*$ の基底を成す。実際、任意の $\alpha\in\bigwedge^k V^*$ は $u_1,\cdots,u_k\in V$ を $u_i=\displaystyle\sum_{j=1}^n\left(e_j^*(u_i)\right)e_j$ を表しておくと次の等式

$$\begin{aligned}
\alpha(u_1,\cdots,u_k)=&\ \alpha\left(\sum_{j_1=1}^n e_{j_1}^*(u_1)e_{j_1},\cdots,\sum_{j_k=1}^n e_{j_k}^*(u_k)e_{j_k}\right)\\
=&\ \sum_{j_1=1}^n\cdots\sum_{j_k=1}^n e_{j_1}^*(u_1)\cdots e_{j_k}^*(u_k)\alpha(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})\\
=&\ \sum_{\ell_1<\cdots<\ell_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} e_{\sigma(\ell_1)}^*(u_1)\cdots e_{\sigma(\ell_k)}^*(u_k)\alpha(e_{\sigma(\ell_1)},\cdots,e_{\sigma(\ell_k)})\\
=&\ \sum_{\ell_1<\cdots<\ell_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)e_{\sigma(\ell_1)}^*(u_1)\cdots e_{\sigma(\ell_k)}^*(u_k)\alpha(e_{\ell_1},\cdots,e_{\ell_k})\\
=&\ \sum_{\ell_1<\cdots<\ell_k}\det(e_{\ell_i}^*(u_j))\alpha(e_{\ell_i},\cdots,e_{\ell_k})\\
=&\ \sum_{\ell_1<\cdots<\ell_k}(e_{\ell_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{\ell_k}^*)(u_1,\cdots,u_k)\alpha(e_{\ell_1},\cdots,e_{\ell_k})\\
=&\ \left(\sum_{\ell_1<\cdots<\ell_k}\alpha(e_{\ell_1},\cdots,e_{\ell_k})e_{\ell_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{\ell_k}^*\right)(u_1,\cdots,u_k)
\end{aligned}$$

が得られるので

$$\alpha=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\alpha(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*$$

と表される。即ち $(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*;1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$ は $\bigwedge^k V^*$ の生成系である。更にこれが線型独立であることは、その任意の線型結合に対し $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n$ なる各 $(j_1,\cdots,j_k)$ について $(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})$ 上での値を取る事によって示される。

以上により $0\leqslant k\leqslant n$ なる k に対し

$$\dim\bigwedge^k V^*=\binom{n}{k}$$

であり、その基底は $(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_k}^*\ ;\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$ で与えられる事が証明された。特に $k=n-1$ の場合 $\dim\bigwedge^{n-1}V^*=n$ であり任意の $\alpha\in\bigwedge^{n-1}V^*$ は

$$\alpha=\sum_{j=1}^n\alpha(e_1,\overset{\check{j}}{\cdots},e_n)e_1^*\wedge\overset{\check{j}}{\cdots}\wedge e_n^*$$

と表される。また、$k=n$ の場合

$$\dim\bigwedge^n V^*=1$$

であり任意の $\alpha \in \bigwedge^n V^*$ は

$$\alpha = \alpha(e_1, \cdots, e_n) e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

と表される。

さて $\bigwedge^k V^*$ が V と同じ次元 n を持つ場合は $k=1$ 及び $k=n-1$ 即ち V^* 及び $\bigwedge^{n-1} V^*$ に限られる。そこで V と V^* 及び $\bigwedge^{n-1} V^*$ との関係に就いて考えよう。

先ず n 次元ベクトル空間 V が内積 $\cdot$ を持つ場合を考えよう。$v \in V$ に対し $\flat_1 v \in V^*$ が $(\flat_1 v)u = v \cdot u,\ u \in V$ で定まる。$u, v \in V, a \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}(\flat_1(u+v))w = &\ (u+v)\cdot w = u \cdot w + v \cdot w = (\flat_1 u)w + (\flat_1 v)w \\ = &\ (\flat_1 u + \flat_2 v)w, \\ (\flat_1(au))w = &\ (au)\cdot w = a(u \cdot w) = a((\flat_1 u)w) = (a(\flat_1 u))w\end{aligned}$$

が任意の $w \in V$ に対し成立つので $\flat_1 : V \ni v \mapsto \flat_1 v \in V^*$ は線型写像となる。任意の $\alpha \in V^*$ は V の $\cdot$ に関する正規直交系 $(e_1, \cdots, e_n)$ を取れば

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha(e_j) e_j$$

なる $v \in V$ により $\alpha = \flat_1(v)$ と表されるので $\flat_1$ は全射であり

$$\flat_1(v) = 0 \Leftrightarrow\ v \cdot u = 0\ \forall u \in V \Leftrightarrow\ v = 0$$

より $\flat_1$ は単射である。よって $\flat_1 : V \to V^*$ は線型同型を与える。

さて内積を持つ n 次元ベクトル空間 V として $\mathbb{R}^n$ の場合を考えよう。$v \in \mathbb{R}^n = V$ に対し $\flat_{n-1} v \in \bigwedge^{n-1} V^*$ が $\flat_{n-1} v = i_v \det$ 即ち

$$(\flat_{n-1} v)(u_1, \cdots, u_{n-1}) = (i_v \det)(u_1, \cdots, u_{n-1}) = \det(v, u_1, \cdots, u_{n-1})$$

で定まる。$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ とし $v = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j$ と表すと

$$\begin{aligned}(\flat_{n-1} v)(\vec{e}_1, \overset{\check{j}}{\cdots}, \vec{e}_n) = &\ \det(v, \vec{e}_1 \overset{\check{j}}{\cdots}, \vec{e}_n) \\ = &\ \sum_{j=1}^n v_j \det(\vec{e}_j, \vec{e}_1, \overset{\check{j}}{\cdots}, \vec{e}_n) \\ = &\ v_j \det(\vec{e}_j, \vec{e}_1, \overset{\check{j}}{\cdots}, \vec{e}_n) \\ = &\ (-1)^{j-1} v_j \det(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) = (-1)^{j-1} v_j\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\flat_{n-1} v = &\ \sum_{j=1}^n ((\flat_{n-1} v)(\vec{e}_1, \overset{\check{j}}{\cdots}, \vec{e}_n)) e_1^* \wedge \overset{\check{j}}{\cdots} \wedge e_n^* \\ = &\ \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j (e_1^* \wedge \overset{\check{j}}{\cdots} \wedge e_n^*)\end{aligned}$$

と表される。$(e_1^*\wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge e_n^*\,;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ は $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ の基底なので

$$\flat_{n-1}\colon\ \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$$

は線型同型である事が従う。

定理２（ベクトル積と外積との関係）　任意の $u_1, \cdots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*$ に於ける次の等式が成立つ：

$$\flat_{n-1}(u_1 \times \cdots \times u_{n-1}) = (\flat_1 u_1) \wedge \cdots \wedge (\flat_1 u_{n-1})$$

（証明）

$$\flat_{n-1} v = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j (e_1^*\wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge e_n^*)$$

に於いて $v = u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$ とすると v の第 j 成分は

$$\begin{aligned}
v_j &= \vec{e}_j \cdot v = \vec{e}_j \cdot (u_1 \times \cdots \times u_{n-1}) = \det(\vec{e}_j, u_1, \cdots, u_{n-1}) \\
&= (-1)^{j-1} \det(u_1, \cdots, \vec{e}_j, \cdots, u_{n-1}) \\
&= (-1)^{j-1} \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{n-1,n} \end{bmatrix}_{<j} \\
&= (-1)^{j-1} \det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{u_{n-1,1}} & \phantom{u_{n-1,2}} & \check{j} & \phantom{u_{n-1,n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n} \end{bmatrix} \end{array} \\
&= (-1)^{j-1} \det \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{u_{n-1}\cdot\vec{e}_1} & \phantom{u_{n-1}\cdot\vec{e}_2} & \check{j} & \phantom{u_{n-1}\cdot\vec{e}_n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} u_1\cdot\vec{e}_1 & u_1\cdot\vec{e}_2 & \cdots & u_1\cdot\vec{e}_n \\ u_2\cdot\vec{e}_1 & u_2\cdot\vec{e}_2 & \cdots & u_2\cdot\vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n-1}\cdot\vec{e}_1 & u_{n-1}\cdot\vec{e}_2 & \cdots & u_{n-1}\cdot\vec{e}_n \end{bmatrix} \end{array} \\
&= (-1)^{j-1}((\flat_1 u_1) \wedge \cdots \wedge (\flat_1 u_{n-1}))(\vec{e}_1, \overset{j}{\check{\cdots}}, \vec{e}_n)
\end{aligned}$$

故に

$$
\begin{aligned}
&\flat_{n-1}(u_1 \times \cdots \times u_{n-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}(u_1 \times \cdots \times u_{n-1})_j (e_1^* \wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge e_n^*) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(((\flat_1 u_1) \wedge \cdots \wedge (\flat_1 u_{n-1}))(\vec{e}_1, \overset{j}{\check{\cdots}}, \vec{e}_n) \Big) (e_1^* \wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge e_n^*) \\
&= (\flat_1 u_1) \wedge \cdots \wedge (\flat_1 u_{n-1})
\end{aligned}
$$

３．超平面の面積要素と法線ベクトル

n 次元実ベクトル空間 V の二つの基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ と $(e'_1, \cdots, e'_n)$ は同じ向きにあるとは $(e'_1, \cdots, e'_n) = (e_1, \cdots, e_n)P$ なる $P \in GL(n; \mathbb{R})$ をとるとき $\det P > 0$ である事を謂い、反対の向きにあるとは $\det P < 0$ である事を謂う。これにより V の基底は二つのクラスに分けられる。この二つのクラスの各々を V の向きと謂う。V が向き付けられているとは、その二つのうち一つを指定する事と定義される。$\mathbb{R}^n$ の基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ は標準基底 $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ と同じ向きにあるとき正の向きと謂い、反対の向きにあるとき負の向きであると謂う。

命題　$u_1, \cdots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ は線型独立であるとすると次の (i)-(iii) を満たす $v \in \mathbb{R}^n$ が唯一つ存在する：

(i) $|v| = 1$

(ii) 任意の j に対し $v \cdot u_j = 0$

(iii) $(v, u_1, \cdots, u_{n-1})$ は正の向きの基底を成す。

（証明）　$u_1, \cdots, u_{n-1}$ は線型独立なので $|u_1 \times \cdots \times u_{n-1}| \neq 0$ となる。そこで $v = u_1 \times \cdots \times u_{n-1} / |u_1 \times \cdots \times u_{n-1}|$ とすれば (i),(ii) はベクトル積の基本性質から従い (iii) は $\det(v, u_1, \cdots, u_{n-1}) = |u_1 \times \cdots \times u_{n-1}| > 0$ から従う。
$\dim(\mathrm{span}\{u_j; 1 \leqslant j \leqslant n-1\})^{\perp} = 1$ であるから (i)(ii) を満たす v は $\pm$ の符号を除いて一意的に定まり (iii) によりその符号のどちらかが定まる。これより一意性が従う。

定理３　V を $\mathbb{R}^n$ の向き付けられた $(n-1)$ 次元部分空間とし、それ自身を内積空間と考える。

(1) 次を満たす　$\omega \in \bigwedge^{n-1} V^*$ が唯一つ存在する：
V の任意の正の向きの正規直交基底 $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ に対し $\omega(u_1, \cdots, u_{n-1}) = 1$

(2) 次を満たす $v \in \mathbb{R}^n$ が唯一つ存在する：
V の任意の正の向きの正規直交基底 $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ に対し $(v, u_1, \cdots, u_{n-1})$ は $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交基底となる。

(3) (1) の $\omega \in \bigwedge^{n-1} V^*$ と (2) の $v \in \mathbb{R}^n$ は次の関係を満たす：

$$\omega = i_v \det$$

これにより v と ω とは一対一に対応する。$v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$ に対して ω は

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j (e_1^* \wedge \overset{j}{\check{\cdots}} \wedge e_n^*)$$

と表され $\omega \in \bigwedge^{n-1} V^*$ に対して $v \in \mathbb{R}^n$ は

$$v = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\omega(\vec{e}_1, \overset{j}{\check{\cdots}}, \vec{e}_n))\ \vec{e}_j$$

と表される。

証明 (1) $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ を V の正の向きの正規直交基底の一つとし

$$v = v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \ / \ |v_1 \times \cdots \times v_{n-1}|, \ \omega = i_v \det$$

と置く。このとき $\omega \in \bigwedge^{n-1} V^*$ であり任意の正の向きの正規直交基底 $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ に対し $(u_1, \cdots, u_{n-1}) = (v_1, \cdots, v_{n-1})P$ なる $P \in O(n-1; \mathbb{R})$ を取ると $\det P = 1, \ v \cdot u_j = 0 (1 \leqslant \forall j \leqslant n-1)$ であるから

$$\begin{aligned}(\det(v, u_1, \cdots, u_{n-1}))^2 &= \det \left(\begin{bmatrix} {}^t v \\ {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_{n-1} \end{bmatrix} [v, u_1, \cdots, u_{n-1}] \right) \\ &= |v|^2 \det(u_i \cdot u_j) = 1\end{aligned}$$

となる。$(v, v_1, \cdots, v_{n-1})$ を $(v, u_1, \cdots, u_{n-1})$ に変換する n 次正方行列の行列式は 1 となるから $(v, u_1, \cdots, u_{n-1})$ は正の向きを与える。従って

$$1 = \det(v, u_1, \cdots, u_{n-1}) = (i_v \det)(u_1, \cdots, u_{n-1}) = \omega(u_1, \cdots, u_{n-1})$$

一意性は $\dim \bigwedge^{n-1} V^* = 1$ である事と向きの指定より従う。

(2) $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ を V の正の向きの正規直交系の一つとし

$$v = v_1 \times \cdots \times v_{n-1} / |v_1 \times \cdots \times v_{n-1}|$$

とすれば良い。

(3) これ迄の議論から得られる。

参考文献： 杉浦光夫、解析入門 II、東京大学出版会
スピバック、多変数解析学、東京図書
R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Springer
J. J. Duistermaat and J. A. Kolk, Multidimensional Real Analysis, Cambridge