代数学の基本定理

平成 21 年 2 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

複素数全体の成す体 (field)$\mathbb{C}$ **が代数的に閉じている**と云う命題を**代数学の基本定理**と謂う。(ガウスの定理と呼ぶ事も多いがフランスではダランベールの定理と称する)。ここでは代数学の基本定理を先ず**コンパクト集合上の連続函数の性質**に基づいて考察し、次に**複素解析**的立場から論じる。

1. 複素係数多項式に関する基礎事項

代数学の基本定理を同値な形で言い換える為に次の条件を考える：

(F) **(因数分解表示)**　定数でない任意の複素係数多項式は一次式の積に分解される。即ち

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1$$

に対して $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ が存在して

$$P(z) = a_n \prod_{j=0}^{n} (z - \alpha_j)$$

と因数分解される。

(R) **(冪根の存在)**　零でない任意の複素数は任意乗の冪根を持つ。即ち任意の $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して $z^n = w$ を満たす。

(Z) **(零点の存在)**　定数でない任意の複素係数多項式は零点を持つ。即ち

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1$$

に対して $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して $P(\alpha) = 0$ を満たす。

(GM) **(大域的最小絶対値の存在)**　定数でない任意の複素係数多項式に対してその絶対値は最小値を取る。即ち

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1$$

に対して $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して不等式

$$|P(\alpha)| \leq |P(z)|$$

が成立つ。

(LM) **(局所的最小絶対値の存在)**　定数でない任意の複素係数多項式に対してその絶対値は局所的に最小値を取る。即ち

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1$$

に対して $\alpha \in \mathbb{C}$ 及び $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $z \in B(\alpha;\varepsilon)$ に対して不等式

$$|P(\alpha)| \leq |P(z)|$$

が成立つ。

定理 1.　次は同値である。

(1) (F)

(2) (Z) かつ (R)

(3) (GM) かつ (R)

(4) (LM) かつ (R)

(5) (Z)

上の (1) から (5) が成立つ時 (GM) 及び (LM) に於ける α は P の零点となる。

注 1.　次の節で (R) を、次の次の節で (GM) を証明する。

(証明)　(F)⇒(Z)⇒(GM)⇒(LM) に就いては示すべき事は無い。(R) は n 次多項式 $P(z) = z^n - w$(即ち (F) に於いて $a_n = 1,\ a_0 = -w_0,\ a_j = 0,\ 1 \leq j \leq n-1,$ とした多項式) の根の存在と同値なので (F)⇒(R) が従う。

以上より (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) が成立つ。

(4) ⇒ (5) :　(LM) 及び (R) を仮定し $\alpha \in \mathbb{C}$ を複素係数 n 次多項式 P の局所的最小絶対値を与える点であるとする。このとき $P(\alpha) = 0$ である事を示せば良い。そこで「もしそうでないとすると α は P の局所的最小絶対値とはならない」事を示せば良い。即ち「$P(\alpha) \neq 0$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|z-\alpha| < \varepsilon$ なる $z \in \mathbb{C}$ が存在して $|P(z)| < |P(\alpha)|$ となる」事を示せば良い。以下 $P(\alpha) \neq 0$ を仮定する。

二項展開により P を α の回りで展開すると

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = \sum_{j=0}^{n} a_j(\alpha + (z-\alpha))^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \alpha^{j-k}(z-\alpha)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j \alpha^{j-k} \right)(z-\alpha)^k \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k (z-\alpha)^k \end{aligned}$$

となる。ここで全ての $k \geq 1$ に対し $c_k = 0$ なら $P(z)$ は定数 $P(\alpha) = c_0$ となり仮定 $n \geq 1$ に反するので

$$m \equiv \min\{k \geq 1; c_k \neq 0\}$$

が $m \geq 1$ で唯一つ定まる。

そこで

$$Q(\xi) = \sum_{k=m+1}^{n} c_k \xi^k$$

と置くと

$$P(\alpha + \xi) = \sum_{k=0}^{n} c_k \xi^k = c_0 + \sum_{k=m}^{n} c_k \xi^k = P(\alpha) + c_m \xi^m + Q(\xi)$$

となる。$w_0 = -P(\alpha)/c_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し (R) を適用すると $\xi_0^m = w_0$ なる $\xi_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の存在が従う。このとき $c_m \xi_0^m = c_m w_0 = -P(\alpha)$ が成立つ。$r = |w_0| > 0$ と置く。$0 < \rho \leq 1/r^{1/m}$ なる任意の ρ に対し $|\rho\xi_0| = \rho|\xi_0| = \rho|w_0|^{1/m} = \rho r^{1/m} \leq 1$ であるから

$$\begin{aligned}
|Q(\rho\xi_0)| &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |c_k||\rho\xi_0|^k \leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|\right) |\rho\xi_0|^{m+1} \\
&= \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|\right) \frac{|\xi_0|}{|c_m|} \rho^{m+1} |c_m \xi_0^m| \\
&= \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|\right) \frac{|\xi_0|}{|c_m|} \rho^{m+1} |P(\alpha)|
\end{aligned}$$

が成立つ。よって与えられた $\varepsilon > 0$ に対し

$$\rho_0 = \min\left(\varepsilon/r^{1/m}, 1 \middle/ \left(\frac{2|\xi_0|}{|c_m|} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|\right)\right)$$

と置くと $0 < \rho < \rho_0$ なる任意の ρ に対し $|\rho\xi_0| < \rho_0|\xi_0| = \rho_0 r^{1/m} \leq \varepsilon$ となり等式

$$\begin{aligned}
P(\alpha + \rho\xi_0) &= P(\alpha) + c_m(\rho\xi_0)^m + Q(\rho\xi_0) \\
&= P(\alpha) - \rho^m P(\alpha) + Q(\rho\xi_0)
\end{aligned}$$

より次の評価が従う：

$$\begin{aligned}
|P(\alpha + \rho\xi_0)| &\leq (1 - \rho^m)|P(\alpha)| + |Q(\rho\xi_0)| \\
&\leq (1 - \rho^m)|P(\alpha)| + \left[\rho \left(\sum_{k=m+1}^{n} |c_k|\right) \frac{|\xi_0|}{|c_m|}\right] \rho^m |P(\alpha)| \\
&\leq (1 - \rho^m)|P(\alpha)| + \frac{1}{2}\rho^m |P(\alpha)| < |P(\alpha)|
\end{aligned}$$

よって $z = \alpha + \rho\xi_0$ が求めるものである。

(5) ⇒ (1) : $n \geq 1$ に関する帰納法を用いる。$n = 1$ の場合は $P(z) = a_0 + a_1 z$ に対して $\alpha_1 = -a_0/a_1$ とすれば良い。$n \geq 2$ とし任意の $(n-1)$ 次多項式は $(n-1)$ 個の一次式からなる因数分解表示を持つと仮定する。(5) により $P(\alpha) = 0$ なる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在する。このとき

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(\alpha) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j z^j - \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = \sum_{j=1}^{n} a_j (z^j - \alpha^j) \\ &= (z-\alpha) \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=0}^{j-1} z^k \alpha^{j-k-1} \end{aligned}$$

となるので $Q(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_j \alpha^{j-k-1} \right) z^k$ と置くと Q は

$$P(z) = (z-\alpha) Q(z)$$

を満たす $(n-1)$ 次多項式であり最高次 z^{n-1} の係数は $a_n \neq 0$ である事が従う。帰納法の仮定により $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ が存在して

$$Q(z) = a_n \prod_{j=1}^{n-1} (z - \alpha_j)$$

となる。よって帰納法は完結した。

2. 冪根の存在に就いて
この節では条件 (R) を考える。

定理 2. (R) は成立つ。即ち任意の $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $z^n = w$ なる $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する。

(証明その 1) $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を $w = re^{i\theta},\ r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ と表し $z = r^{1/n} e^{i\theta/n}$ と置けば良い。

(証明その 2) n に対し次の命題を考える：

$(R)_n$ 任意の $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $z^n = w$ なる $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する。

$n = 1$ の場合は $z = w$ とすれば良い。$n = 2$ の場合は $w = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対し $z = \pm\xi$,

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} + i(\mathrm{sgn} b)\sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

とすれば良い。n が 2 の冪で表される場合は $n=2$ の方法をその冪乗回繰り回せば良い。以上より $(R)_n$ は $\{2^k; k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 上で成立つ事が従う。そこで $(R)_n$ が成立しない n が存在するものとして矛盾を導こう。そのような n のうち最小のものを改めて n とする：

$$n=\min\{\ell\in\mathbb{Z}_{>0}; (R)_\ell \text{は成立しない}\}$$

この n は $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び奇数 $m\geq 3$ によって $n=2^k m$ の形に表される。$(R)_n$ は成立しないので、この n に対し $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在し次の条件

「任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し $z^n\neq w$」

が満たされる。この条件は $P(z)=z^n-w$ は零点を持たない事と同値である。先ず P に対する最小絶対値の存在を示そう。$R_0=\max(1,2|w|)$ と置く。$|z|\geq R_0$ なる z に対し

$$|z|^n\geq|z|\geq R_0\geq 2|w|$$

となるから

$$|z^n-w|\geq|z|^n-|w|\geq\max\left(|w|,\frac{1}{2}|z|^n\right)$$

が従う。コンパクト集合 $K=\{z\in\mathbb{C}; |z|\leq R_0\}$ 上の連続函数 $K\ni z\mapsto|z^n-w|\in\mathbb{R}$ は最小値を取る。その最小値を与える点を $\alpha\in K$ とする：

$$|P(\alpha)|=\min\{|z^n-w|; z\in K\}$$

仮定により $|P(\alpha)|>0$ であり $0\in K$ 故 $|P(\alpha)|\leq|P(0)|=|w|$ となる。$|z|\geq R_0$ なら $|z^n-w|\geq|w|$ 即ち $|P(z)|\geq|w|=|P(0)|$ となる。以上より

$$|P(\alpha)|=\min\{|z^n-w|; z\in\mathbb{C}\}$$

とも表される。
さて

$$Q(\xi)=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}\alpha^{n-j}\xi^j$$

と置くと

$$P(\alpha+\xi)=(\alpha+\xi)^n-w=P(\alpha)+\xi^n+Q(\xi)$$

と表される。さて $(R)_{2^k}$ は成立つので次の夫々の方程式

$$\begin{array}{ll}(A)_\pm & \omega^{2^k}=\pm 1\\ (B)_\pm & \omega^{2^k}=\pm i(-1)^{\frac{m-1}{2}}\end{array}$$

の根 $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在する。$(A)_\pm$ の根 ω は

$$\omega^n=(\omega^{2^k})^m=(\pm 1)^m=\pm 1,$$

$(B)_\pm$ の根 ω は

$$\begin{aligned}\omega^n&=(\omega^{2^k})^m=(\pm i(-1)^{\frac{m-1}{2}})^m=(\pm i)^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\\&=(\pm i)^{m-1}(\pm i)(-1)^{\frac{(m-1)^2}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}\\&=(-1)^{\frac{m-1}{2}}(\pm i)(-1)^{\frac{m-1}{2}}=\pm i\end{aligned}$$

を満たす。ここで奇数 m に対し $(m-1)^2/2$ は偶数である事を用いた。

さて $\pm$ Re $P(\alpha) > 0$ の場合 $(A)_\pm$ の根 $\omega_\pm$ と $\rho > 0$ に対し

$$\begin{aligned}|P(\alpha+\rho\omega_\pm)| &\leq (|\mathrm{Re}\ P(\alpha) + (\rho\omega_\pm)^n|^2 + |\mathrm{Im}\ P(\alpha)|^2)^{1/2} + |Q(\rho\omega_\mp)| \\ &= (|\mathrm{Re}\ P(\alpha) \mp \rho^n|^2 + |\mathrm{Im}\ P(\alpha)|^2)^{1/2} + O(\rho)\end{aligned}$$

となり主要項は $|P(\alpha)|$ よりも真に小さくなる。一方 $\pm$ Im $P(\alpha) > 0$ の場合 $(B)_\pm$ の根 $\omega_\pm$ と $\rho > 0$ に対し

$$\begin{aligned}|P(\alpha+\rho\omega_\mp)| &\leq (|\mathrm{Re}\ P(\alpha)|^2 + |\mathrm{Im}\ P(\alpha) + (\rho\omega_\mp)^n|^2)^{1/2} + |Q(\rho\omega_\mp)| \\ &= (|\mathrm{Re}\ P(\alpha)|^2 + |\mathrm{Im}\ P(\alpha) \mp \rho^n|^2)^{1/2} + O(\rho)\end{aligned}$$

となり主要項は $|P(\alpha)|$ より真に小さくなる。

何れの場合も $|P(\alpha)|$ の最小性に反する。

注 2. **証明その１**は簡単だが $\mathbb{C}$ 上の指数函数の性質を用いている。
証明その２はコンパクト集合上の連続函数に対する最小値の存在に基づいている。

3. 大域的最小絶対値の存在に就いて

この節では条件 (GM) を考える。

定理 3. (GM) は成立つ。即ち

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a \neq 0, \quad n \geq 1$$

に対して $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して不等式

$$|P(\alpha)| \leq |P(z)|$$

が成立つ。

(証明) 定数項の無い n 次多項式 Q を

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n-j}}{a_n} z^j$$

で定めると

$$\begin{aligned}P(z) = a_n z^n \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{a_n} z^{j-n} &= a_n z^n \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} z^{j-n}\right) \\ &= a_n z^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n} z^{-k}\right) \\ &= a_n z^n \left(1 + Q\left(\frac{1}{z}\right)\right)\end{aligned}$$

が成立つ。$R_0 = \max\left(1, 2\sum_{j=1}^{n} |a_{n-j}/a_n|\right)$ と置くと $|z| \geq R_0$ なる任意の z に対し

$$\left|Q\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_{n-j}}{a_n}\right| \left(\frac{1}{|z|}\right)^j \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_{n-j}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|} \leq \frac{R_0}{2|z|} \leq \frac{1}{2}$$

となるので

$$|P(z)| = \left|a_n z^n \left(1 + Q\left(\frac{1}{z}\right)\right)\right| = |a_n||z|^n \left|1 + Q\left(\frac{1}{z}\right)\right|$$

$$\geq |a_n||z|^n \left(1 - \left|Q\left(\frac{1}{z}\right)\right|\right) \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

が従う。$R_1 = \max(R_0, (2|P(0)|/|a_n|)^{1/n})$ と置くと $|z| \geq R_1$ なる z に対し

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq \frac{1}{2}|a_n|R_1^n \geq |P(0)|$$

が従う。コンパクト集合 $K = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R_1\}$ 上の連続函数 $K \ni z \mapsto |P(z)| \in \mathbb{R}$ は最小値を取る。最小値を与える点を $\alpha \in K$ とする：

$$|P(\alpha)| = \min\{|P(z)|; z \in K\}$$

さて $0 \in K$ であり $\alpha \in K$ は $|P|$ の K 上での最小値を与える点であるから $|P(\alpha)| \leq |P(0)|$ が従う。一方 $\mathbb{C} \setminus K$ 上 $|P(z)| \geq |P(0)|$ であったから $|P(z)| \geq |P(\alpha)|$ が従う。従って $|P(\alpha)|$ は $|P|$ の $\mathbb{C}$ 全体での最小値である。

注 3.　定理 1,2,3 により代数学の基本定理が従う。定理 2 及び定理 3 の証明はコンパクト集合上の連続函数に対する最小値の存在に帰着される事に注意しよう。

4. 回転数を用いた証明

定理 4.　$f \in C(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ は或る $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し次の条件を満たすものとする：

　$z^{-n}f(z)$ の $|z| \to \infty$ に於ける極限が $\mathbb{C}$ 内で存在しその極限値は 0 でない。即ち $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在し

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{-n}f(z) = w$$

が成立つ。

　このとき f は零点を持つ。

注 4.　f が複素係数 n 次多項式

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

の場合 $w = a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とすれば定理 4 より (Z) が導かれる。

(証明)　f は零点を持たないと仮定して矛盾を導く。極限に関する条件より $R > 0$ が存在して $|z| \geq R$ なる任意の z に対し

$$|z^{-n} f(z) - w| < |w|$$

が成立つ。$t \in [0, 2\pi],\ \theta \in [0, 1]$ に対し

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= w(Re^{it})^n = w\exp(nit + n\log R),\\ \gamma_\theta(t) &= H(\theta, t) = f(\theta Re^{it})\end{aligned}$$

と置くと最後の不等式より

$$|\gamma_1(t) - \Gamma(t)| < |\Gamma(t)|$$

が任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して成立つ。さて

$$\gamma(t) = \gamma_1(t)/\Gamma(t)$$

と置くと $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ は閉曲線で $\gamma([0, 2\pi]) \subset B(1; 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| < 1\}$ を満たす。$\mathbb{C} \setminus B(1; 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| \geq 1\}$ は連結であり特に連結成分は唯一つの非有界連結成分のみであり $0 \in \mathbb{C} \setminus B(1, 1)$ であるから

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$$

が成立つ。よって等式

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_\gamma(0) + \mathrm{Ind}_\Gamma(0) = \mathrm{Ind}_\Gamma(0) = n$$

が成立つ。最後の等式は回転数及び Γ の定義による。さて $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に於いて γ_0 と γ_1 とのホモトピーを与えるので等式

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0)$$

を得る。$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = n$ であるが γ_0 は定数 $f(0)$ なので $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = 0$ となり矛盾を得る。

5. ルーシェの定理を用いた証明

複素係数 n 次多項式

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

に対して

$$\begin{aligned}Q(z) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{n-j}}{a_n} z^j,\\ R &= \max\left(1, 2\sum_{j=1}^{n} |a_{n-j}|/|a_n|\right)\end{aligned}$$

と置くと定理 3 の証明と同様

$$P(z) = a_n z^n + a_n z^n Q\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$|z| \geq R \ \Rightarrow \ \left|Q\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$$

が従う。よって円周 $|z| = R$ 上

$$|a_n z^n - P(z)| = \left|a_n z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|a_n z^n| < |a_n z^n|$$

なる不等式が成立つ。ルーシェの定理により $B(0;R)$ 内での $P(z)$ と $a_n z^n$ の零点の位数の総和に等しい事が従う。よって $P(z)$ の $B(0;R)$ 内での零点の位数の総和は n となる。

注 5. $|z| \geq R$ なら $|P(z)| \geq |az^n| - |a_n z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n$ となり $P(z)$ は $\mathbb{C} \setminus B(0;R)$ では零点を持たない。

6. 最大絶対値の定理を用いた証明

複素係数 n 次多項式

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

は零点を持たないものと仮定して矛盾を導こう。

仮定より $f : \mathbb{C} \ni z \mapsto 1/P(z) \in \mathbb{C}$ は正則となる。任意の $R > 0$ に対し最大絶対値の定理により

$$\max_{|z| \leq R} |f(z)| = \max_{|z|=R} |f(z)|$$

が成立つ。定理 3 の証明と同様 $R_0 = \max(1, 2\sum_{j=1}^{n} |a_{n-j}/a_n|)$ と置くと $|z| \geq R_0$ なる任意の z に対し

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

が成立つ。以上より $R \geq R_0$ なる任意の R 及び $|z| \leq R$ なる任意の z に対し不等式

$$|P(z)| \geq \min_{|z|=R} |P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

を得る。

よって $R \geq R_0$ なる任意の R に対し

$$|P(0)| \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

となる。右辺は任意に大きく取れる事になり矛盾を生ずる。

7. 開写像の定理を用いた証明

複素係数 n 次多項式

$$P(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

は零点を持たないものと仮定して矛盾を導こう。$R>0$ を任意に取る。コンパクト集合 $K=\{z\in\mathbb{C}; |z|\leq R\}$ 上の連続函数 $|P|: K\ni z\mapsto |P(z)|\in\mathbb{R}$ は最小値を取る。その最小値を与える点を $\alpha\in K$ とする：

$$|P(\alpha)|=\min\{|P(z)|; z\in K\}$$

仮定より $|P(\alpha)|>0$ である。さて $|\alpha|=R$ である事を示そう。そこで $|\alpha|<R$ であると仮定して矛盾を導こう。P は定数でない正則函数故 $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は開写像となる。よって $0<r<|P(\alpha)|$ なる r が存在し

$$B(P(\alpha); r)\subset P(B(\alpha; R-|\alpha|))$$

となる。$P(\alpha)=|P(\alpha)|e^{i\theta},\ 0\leq\theta<2\pi$ と表すと

$$\left|\left(P(\alpha)-\frac{r}{2}e^{i\theta}\right)-P(\alpha)\right|=\left|\frac{r}{2}e^{i\theta}\right|=\frac{r}{2}$$

であるから $P(\alpha)-\frac{r}{2}e^{i\theta}\in B(P(\alpha); r)$ である。よって $\beta\in B(\alpha; R-|\alpha|)$ が存在して
$P(\alpha)-\frac{r}{2}e^{i\theta}=P(\beta)$ となる。$|\beta|\leq|\beta-\alpha|+|\alpha|<(R-|\alpha|)+|\alpha|=R$ より $\beta\in K$ であるが

$$|P(\beta)|=|P(\alpha)-\frac{r}{2}e^{i\theta}|=|(|P(\alpha)|-\frac{r}{2})e^{i\theta}|=|P(\alpha)|-\frac{r}{2}<|P(\alpha)|$$

となって $|P(\alpha)|$ の最小性に反する。従って $|\alpha|=R$ となる。

さて定理 3 の証明と同様に $R\geq\max\left(1, 2\sum_{j=1}^{n}|a_{n-j}/a_n|\right)$ なる任意の R 及び $|z|=R$ なる任意の z に対し

$$|P(z)|\geq\frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

となるから

$$|P(\alpha)|\geq\frac{1}{2}|a_n|R^n$$

が従う。α は $\{z\in\mathbb{C}; |z|\leq R\}$ 上での $|P|$ の最小値を与える点であったから

$$|P(0)|\geq|P(\alpha)|\geq\frac{1}{2}|a_n|R^n$$

となる。R は任意に大きく取れるので矛盾を生じる。

8. リュービルの定理を用いた証明

複素係数 n 次多項式

$$P(z)=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

は零点を持たないものと仮定し矛盾を導こう。仮定より $f : \mathbb{C} \ni z \mapsto 1/P(z) \in \mathbb{C}$ は正則となる。定理 3 の証明と同様 $R_0 = \max\left(1, 2\sum_{j=1}^{n} |a_{n-j}/a_n|\right)$ と置くと $|z| \geq R_0$ なる任意の z に対し

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$$

が成立つ。よって

$$\sup_{|z|\geq R_0} |f(z)| \leq \frac{2}{|a_n|R_0^n}$$

となる一方、コンパクト集合 $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R_0\}$ 上 $|f|$ は最大値を取る。よって f は有界な整函数となる。リュービルの定理により f は定数函数となる。特に任意の z に対し $P(z) = P(0)$ となる。一方、任意の $R \geq R_0$ 及び任意の $|z| = R$ に対し

$$|P(0)| = |P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n = \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

となる。R は任意に大きく取れるので矛盾を生ずる。

9. コーシーの積分公式を用いた証明

複素係数 n 次多項式

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,\ a_n \neq 0,\ n \geq 1$$

は零点を持たないものと仮定し矛盾を導こう。

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} z^j$$

と置くと $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して等式

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n \sum_{j=0}^{n} a_j z^{j-n} = z^n \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^{-k} = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right), \\ Q(z) &= z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

が成立ち $Q(0) = a_n \neq 0$ となる。従って Q も零点を持たない複素多項式となる。原点を中心とする半径 1 の開円板 $B(0;1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ の境界の正の向きに積分路を取ったコーシーの積分公式を正則函数 $1/P : \mathbb{C} \ni z \mapsto 1/P(z) \in \mathbb{C}$ に適用し $|\zeta| = 1$ を $\zeta = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$ と

パラメタ表示すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P(0)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta}\frac{1}{P(\zeta)}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta^{n+1}Q(\frac{1}{\zeta})}d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(e^{i\theta})^{n+1}Q(e^{-i\theta})}e^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{-i\theta})^n}{Q(e^{-i\theta})}d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta})^n}{Q(e^{i\theta})}d\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{n-1}}{Q(\zeta)}d\zeta
\end{aligned}$$

を得る。$n \geq 1$ に対し $\mathbb{C} \ni z \mapsto \dfrac{z^{n-1}}{Q(z)} \in \mathbb{C}$ は正則であるから最後の複素積分はコーシーの積分定理によって零となる。これは $P(0) \neq 0$ に矛盾する。

参考文献： 杉浦光夫、解析入門 I,II、東京大学出版会
高橋礼司、[新版] 複素解析、東京大学出版会
彌永昌吉、小平邦彦、現代数学概説、岩波書店
Robert B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis Vol.1*, Pure and Applied Mathematics 82, Academic Press.
J.E.Littlewood, *Every polynomial has a root*, J. London Math Soc. **16** (1941), 95-98.
J.J.Duistermaat and J.A.C.Kolk, Multidimensional Real Analysis II: Integration, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 87