コンパクト集合上の連続函数の成す空間の稠密部分集合

平成 26 年 8 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

コンパクト集合上の連続函数が多項式の一様収束極限として特徴付けられる状況について纏めて置こう。

１．有界閉区間上の実数値連続函数

定理１（ワイエルストラス）　有界閉区間 $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ 上の実数値函数 $f : I \to \mathbb{R}$ に対し次は同値である。

(1) f は連続である

(2) f は一様連続である。

(3) f は多項式の列の I 上の一様収束極限である。即ち、多項式の列 $(P_n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$ が存在し $\|f - P_n\|_\infty = \sup\{|f(x) - P_n(x)|; x \in I\} \to 0 (n \to \infty)$ となる。

(4) f は多項式を項とする無限級数の I 上の一様収束極限である。即ち、多項式の列 $(Q_n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$ が存在し $\|f - \sum_{j=1}^{n} Q_j\|_\infty = \sup\{|f(x) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(x)|; x \in I\} \to 0 (n \to \infty)$ となる。

註　(4) は f が I の一つの内点 c を中心とする単項式 $a_n(x-c)^n$ を項とする無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ （の一様収束極限）として表されると主張している訳ではない。もしそうなら f は $\mathrm{Int} I$ 上実解析となり C^∞ となってしまい矛盾である。

（証明）　コンパクトな距離空間上の連続函数は一様連続であるから (1) $\Leftrightarrow$ (2) が従い、多項式は連続であるから (3) $\Rightarrow$ (1) が従い、多項式の有限和は多項式であるから (4) $\Rightarrow$ (3) が従い $Q_1 = P_1, Q_j = P_j - P_{j-1} (j \geq 2)$ とすれば (3) $\Rightarrow$ (4) が従う。故に (2) $\Rightarrow$ (3) を示せば良い。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し $|x-y| < \delta$ なる任意の $x, y \in I$ に対し $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成立つ。さて $0 < |\Delta| \equiv \max_{1 \leq j \leq m} (x_j - x_{j-1}) < \delta$ なる I の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ を一つ取り $I_j = [x_{j-1}, x_j]$,

$$f_m(x) = f(a) + \sum_{j=0}^{m-1} (d_j - d_{j-1}) \max(x - x_j, 0),\ x \in I,$$

$$d_j = (f(x_{j+1}) - f(x_j))/(x_{j+1} - x_j),\ j \geq 0; d_{-1} = 0$$

と置く。このとき $x \in I_k$ に対し等式

$$
\begin{aligned}
f_m(x) &= f(a) + \sum_{j=0}^{k-1}(d_j - d_{j-1})(x - x_j) \\
&= f(a) + \sum_{j=0}^{k-1} d_j(x - x_j) - \sum_{j=0}^{k-2} d_j(x - x_{j+1}) \\
&= f(a) + \sum_{j=0}^{k-2} d_j(x_{j+1} - x_j) + d_{k-1}(x - x_{k-1}) \\
&= f(x_0) + \sum_{j=0}^{k-2}(f(x_{j+1}) - f(x_j)) + d_{k-1}(x - x_{k-1}) \\
&= f(x_{k-1}) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1})
\end{aligned}
$$

が成立つ。これより $x \in I_k$ に対し

$$
\begin{aligned}
f(x) - f_m(x) &= f(x) - \left[\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_k) + \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} f(x_{k-1})\right] \\
= \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}&(f(x) - f(x_k)) + \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}(f(x) - f(x_{k-1}))
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f_m(x)| &\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} (\theta |f(x) - f(x_k)| + (1 - \theta)|f(x) - f(x_{k-1})|) \\
&\leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} (\theta \sup_{\xi, \eta \in I_k} |f(\xi) - f(\eta)| + (1 - \theta) \sup_{\xi, \eta \in I_k} |f(\xi) - f(\eta)|) \\
&= \sup_{\xi, \eta \in I_k} |f(\xi) - f(\eta)|
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\|f - f_m\|_\infty &= \max_{1 \leq k \leq m} \sup_{x \in I_k} |f(x) - f_m(x)| \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq m} \sup_{\xi, \eta \in I_k} |f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

を得る。さて

$$
\max(x - x_j, 0) = \frac{1}{2}((x - x_j) + |x - x_j|)
$$

より各 j に対し $\|\tau_{x_j}|\cdot| - Q_j^n\|_\infty \to 0 (n \to \infty)$ なる多項式の列 $(Q_j^n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$ が存在すれば（但し $\tau_{x_j}|x| = |x - x_j|, x \in I$ とする）

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(a) + \sum_{j=1}^{m-1}(d_j - d_{j-1})\frac{1}{2}((x - x_j) + Q_j^n(x)) \\
&= f_m(x) + \sum_{j=1}^{m-1}(d_j - d_{j-1})(Q_j^n(x) - |x - x_j|)
\end{aligned}
$$

で定まる多項式 P_n は

$$\|f-P_n\|_\infty \leq \|f-f_m\|_\infty + \sum_{j=1}^{m-1} |d_j - d_{j-1}\| Q_j^n - \tau_{x_j}|\cdot|\|_\infty$$

より

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-P_n\|_\infty \leq \|f-f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

を満たすので (2) $\Rightarrow$ (3) が示される事となる。そこで次の補題を取り上げる。

補題 1　絶対値に付随する函数 $x \mapsto |x|$ は有界閉区間 $[-1,1]$ 上で多項式の一様収束極限として表される。即ち多項式の列 $(P_n; n\in\mathbb{Z}_{>0})$ が存在し $\||\cdot| - P_n\|_\infty = \sup\{||x| - P_n(x)|\,;|x|\leq 1\} \to 0 (n\to\infty)$ となる。

補題 1 を示せば充分であること：　上の P_n に対し $Q_j^n(x) = (b-a)P_n\left(\frac{x-x_j}{b-a}\right)$ 及び $\xi = \frac{x-x_j}{b-a}$ と置けば $|\xi| \leq 1$ で $x = x_j + (b-a)\xi$ となり

$$\begin{aligned}\|\tau_{x_j}|\cdot| - Q_j^n\|_\infty =& \sup\{||x-x_j| - Q_j^n(x)|;\ a\leq x\leq b\}\\ &\leq \sup\{||(b-a)\xi| - Q_j^n(x_j+(b-a)\xi)|; |\xi|\leq 1\}\\ &= (b-a)\sup\{\||\xi| - P_n(\xi)|; |\xi|\leq 1\} \to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が従う。

補題 1 の証明（その 1）：　$|t|\leq 1$ なる t に対し $(1-t)^{1/2}$ のマクローリン展開を考える：

$$(1-t)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n-3}{2}\right)\frac{t^n}{n!}$$

$a_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ とすれば $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-5)!!}\frac{(2n-2)!!}{(2n)!!} = \frac{2n-3}{2n} = 1 - \frac{3}{2n}$ であるからガウスの判定法に拠り右辺の無限級数は $[-1,1]$ 上一様に絶対収束する。$t = 1-x^2$ とすれば $[-1,1]$ 上

$$|x| = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n$$

が成立ち右辺の無限級数は $[-1,1]$ 上一様に絶対収束する。

補題 1 の証明（その 2）：　多項式の列 $(p_n; n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を $p_0(x) = 0, n\geq 1$ に対し $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{1}{2}(x - p_{n-1}(x)^2)$ と帰納的に定義する。このとき任意の $x\in[-1,1]$ 及び任意の $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し不等式

$$0 \leq |x| - p_n(x^2) \leq \frac{2|x|}{2+n|x|}$$

が成立つ事を n に関する帰納法で示そう。$n=0$ の場合は後半の不等式は等式として成立つ。$n-1$ の場合、即ち不等式

$$0 \leq |x| - p_{n-1}(x^2) \leq \frac{2|x|}{2+(n-1)|x|}$$

を仮定する。さて

$$
\begin{aligned}
|x| - p_n(x^2) &= |x| - p_{n-1}(x^2) - \frac{1}{2}(x^2 - p_{n-1}(x^2)^2) \\
&= (|x| - p_{n-1}(x^2))(1 - \frac{1}{2}(|x| + p_{n-1}(x^2))) \\
&= (|x| - p_{n-1}(x^2))(1 - |x| + \frac{1}{2}(|x| - p_{n-1}(x^2)))
\end{aligned}
$$

の最後の等式の右辺の各項は帰納法の仮定の前半の不等式より全て非負となるので $|x| - p_n(x^2) \geq 0$ が従う。一方、帰納法の仮定の後半の不等式より

$$
\begin{aligned}
|x| - p_n(x^2) &\leq \frac{2|x|}{2+(n-1)|x|} \cdot \left(1 - |x| + \frac{|x|}{2+(n-1)|x|}\right) \\
&= \frac{2|x|}{2+(n-1)|x|} \cdot \frac{2+(n-2)|x| - (n-1)x^2}{2+(n-1)|x|} \\
&\leq \frac{2|x|(2+(n-2)|x|)}{(2+(n-1)|x|)^2} \leq \frac{2|x|(2+(n-2)|x|)}{(2+(n-1)|x|)^2 - |x|^2} = \frac{2|x|}{2+n|x|}
\end{aligned}
$$

が従うので帰納法は完結する。そこで $P_n(x) = p_n(x^2)$ と置けば $\||\cdot| - P_n\|_\infty \leq 2/n$ となり補題 1 が従う。

註： 多項式の列 $(p_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は平方根 $[0,1] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ の近似列であり $(\Phi(p))(x) = p(x) + \frac{1}{2}(x - p(x)^2)$ で定まる写像

$$
\Phi : C([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})
$$

の不動点 $x \mapsto \sqrt{x}$ に収束するピカルの逐次近似列である。

補題 1 の証明（その３）： Kuhn に従って $P_n(x) = x\left(1 - 2(1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2^n}\right)$ とすれば良い事を示そう。以下、ベルヌイの不等式 $(1+x)^n \geq 1 + nx (x \geq -1, n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を用いる。簡単の為 $Q_n(x) = (1-x^n)^{2^n}$ と置く。$x \in (0,1]$ に対し

$$
|x| - P_n(x) = x - P_n(x) = x\left(1 - \left(1 - 2Q_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right) = 2xQ_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \geq 0
$$

であるから、等式

$$
||x| - P_n(x)| = 2xQ_n\left(\frac{x+1}{2}\right)
$$

が従う。$x \in [-1,0)$ に対し

$$
|x| - P_n(x) = -x - P_n(x) = -x\left(1 + \left(1 - 2Q_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\right) = 2|x|\left(1 - Q_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \geq 0
$$

であるから、等式

$$||x| - P_n(x)| = 2|x|\left(1 - 2Q_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

が従う。$0 < \delta < 1$ なる任意の δ を取る。$x \in [-1, -\delta]$ に対し $0 \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^n$ であるから

$$1 \geq Q_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = \left(1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right)^{2^n} \geq 1 - 2^n\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \geq 1 - (1-\delta)^n$$

となり

$$\sup\{||x| - P_n(x)|; x \in [-1, \delta]\} = \sup\{2|x|\left(1 - Q_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right); x \in [-1, -\delta]\}$$
$$\leq 2(1-\delta)^n$$

が従う。$x \in [\delta, 1]$ に対し

$$\begin{aligned}
0 \leq Q_n\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \frac{1}{(1+x)^n}\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right)^{2^n}(1+x)^n \\
&\leq \frac{1}{(1+x)^n}\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right)^{2^n}\left(1 + 2^n\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right) \\
&\leq \frac{1}{(1+x)^n}\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right)^{2^n}\left(1 + \left(\frac{1+x}{2}\right)^n\right)^{2^n} \\
&\leq \frac{1}{(1+x)^n}\left(1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}\right)^{2^n} \leq \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{(1+\delta)^n}
\end{aligned}$$

となり

$$\sup\{||x| - P_n(x)|; x \in [\delta, 1]\} = \sup\{2xQ_n\left(\frac{1+x}{2}\right); x \in [\delta, 1]\}$$
$$\leq 2(1+\delta)^{-n}$$

が従う。また

$$\sup\{||x| - P_n(x)|; x \in [0, \delta]\} = \sup\{2xQ_n\left(\frac{1+x}{2}\right); x \in [0, \delta]\} \leq 2\delta,$$
$$\sup\{||x| - P_n(x)|; x \in [-\delta, 0]\} = \sup\{2|x|\left(1 - Q_n\left(\frac{1+x}{2}\right)\right); x \in [-\delta, 0]\} \leq 2\delta$$

となる。従って

$$\||\cdot| - P_n\|_\infty \leq 4\delta + 2(1-\delta)^n + 2(1+\delta)^{-n}$$

を得る。これより

$$\limsup_{n\to\infty} \||\cdot| - P_n\|_\infty \leq 4\delta$$

を得る。$\delta > 0$ は任意故補題 1 が従う。

２．ベルンシュタイン多項式

$f \in C([0,1];\mathbb{R})$ に対する n 次ベルンシュタイン多項式 $B_n(f)$ を

$$(B_n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

で定める。

定理２（ベルシュタイン多項式に依るワイエルストラスの定理）　有界閉区間 $I=[0,1]$ 上の任意の連続函数 $f \in C(I;\mathbb{R})$ はベルンシュタイン多項式の列 $(B_n(f); n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の I 上の一様収束極限として表される：

$$\|f - B_n(f)\|_\infty = \sup\{|f(x) - (B_n(f))(x)|; x \in I\} \to 0 \ (n \to \infty)$$

（証明）　次の補題を用いる。

補題２　次の等式が成立つ：

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx$

補題２の証明（その１）　(1) は x と $1-x$ による二項展開であり $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1$ より従う。(2) は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} = nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} \\
&= nx(x+(1-x))^{n-1} = nx
\end{aligned}$$

より従う。同様に

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-n}(1-x)^{n-k}$$
$$= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-2-(k-2)} = n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}$$
$$= n(n-1)x^2(x+(1-x))^{n-2} = n(n-1)x^2$$

を得るので (2) と辺々足し合せると (3) が従う。

補題２の証明（その２）　$t\in\mathbb{R}$ に対し

$$(xe^t+(1-x))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{kt}x^k(1-x)^{n-k}$$

を考える。t で両辺を微分して

$$nxe^t(xe^t+(1-x))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}e^{kt}x^k(1-x)^{n-k}$$

を得るのでもう一回両辺を微分して

$$n(n-1)x^2e^{2t}(xe^t+(1-x))^{n-2} + nxe^t(xe^t+(1-x))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}e^{kt}x^k(1-x)^{n-k}$$

を得る。これらの等式で $t=0$ と置いたものは補題２の等式に外ならない。

定理２の証明　$0<\delta<1$ なる δ を任意に取り

$$\begin{aligned}|f(x)-(B_n(f))(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \left(\sum_{\substack{0\le k\le n\\ |x-k/n|<\delta}} + \sum_{\substack{0\le k\le n\\ |x-k/n|\ge\delta}}\right)\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

と評価を分割する。最後の等式の右辺の前半を

$$\sum_{|x-k/n|<\delta}\sup\{|f(\xi)-f(\eta)|;\xi,\eta\in I,|\xi-\eta|<\delta\}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\le \sup\{|f(\xi)-f(\eta)|;\xi,\eta\in I,|\xi-\eta|<\delta\}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= \sup\{|f(\xi)-f(\eta)|;\xi,\eta\in I,|\xi-\eta|<\delta\}$$

と評価し、後半を

$$
\begin{aligned}
&2\|f\|_\infty \sum_{|x-k/n|\geq\delta} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{n^2\delta^2} \sum_{|nx-k|\geq n\delta} (nx-k)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}
$$

と評価する。補題 2 より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (nx-x)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
=&n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
=&n^2x^2 - 2n^2x^2 + n(n-1)x^2 + nx = -nx^2 + nx = n\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leq \frac{n}{4}
\end{aligned}
$$

を得る。これより評価

$$
\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \sup\{|f(\xi) - f(\eta)|; \xi, \eta \in I, |\xi - \eta| < \delta\} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}
$$

が従い

$$
\limsup_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty \leq \sup\{|f(\xi) - f(\eta)|; \xi, \eta \in I, |\xi - \eta| < \delta\}
$$

を得る。$\delta \downarrow 0$ とすれば f の一様連続性より定理 2 を得る。

３．ボーマン・コロフキンの定理

ベルシュタイン多項式を定める手続き $f \mapsto B_n(f)$ は次の様に捉える事が出来る：

(B1)　$B_n : C([0,1];\mathbb{R}) \ni f \mapsto B_n(f) \in C([0,1];\mathbb{R})$ は実線型写像である。

(B2)　B_n は正値である。即ち任意の非負値連続函数を非負値連続函数に写す：
$f \in C([0,1];\mathbb{R}),\ f \geq 0 \Rightarrow B_n(f) \geq 0$

(B3)　任意の二次函数 f に対し $\|B_n(f) - f\|_\infty \to 0 (n \to \infty)$

定義及び補題 2 より (B1)(B2) 及び (B3) は直ちに従う。実際補題 3 は $e_k(x) \equiv x^k$ に対する等式

$$
\begin{aligned}
B_n(e_k) &= e_k, \quad k = 0, 1 \\
B_n(e_2) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_2 + \frac{1}{n} e_1
\end{aligned}
$$

を述べたものである。上の三つの性質に着目したものがボーマン・コロフキンの定理である。各 $x \in I = [0,1]$ に対し $d_x(y) = |x - y|$ と置いて定まる函数 $I \ni y \mapsto d_x(y) \in \mathbb{R}$ を $d_x \in C(I;\mathbb{R})$ とする。

定理３（ボーマン・コロフキン）　有界閉区間 $I=[0,1]$ 上の連続函数全体の成すノルム空間 $C(I;\mathbb{R})$ 上の実線型正値写像の列 $(K_n; n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対し次は同値である。

(1) 任意の二次関数 f に対し $\|K_n(f)-f\|_\infty \to 0$ $(n\to\infty)$

(2) $0\leq k\leq 2$ なる任意の整数 k に対し $\|K_n(e_k)-e_k\|_\infty \to 0$ $(n\to\infty)$

(3) $\sup\{|(K_n(d_x^2))(x)|; x\in I\}\to 0$ $(n\to\infty)$ 且つ $\|K_n(e_0)-e_0\|_\infty\to 0$ $(n\to\infty)$

(4) 任意の $f\in C(I;\mathbb{R})$ に対し $\|K_n(f)-f\|_\infty\to 0$ $(n\to\infty)$

（証明）　(4) $\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) は明らかであるから (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) を示そう。

(2) $\Rightarrow$ (3)：　$d_x(y)^2=|x-y|^2=x^2-2xy+y^2$ であるから $d_x^2=x^2e_0-2xe_1+e_2$ が成立つ。K_n の線型性より

$$K_n(d_x^2)=x^2K_n(e_0)-2xK_n(e_1)+K_n(e_2)$$

即ち

$$(K_n(d_x^2))(y)=x^2(K_n(e_0))(y)-2x(K_n(e_1))(y)+(K_n(e_2))(y)$$

を得る。特に

$$\begin{aligned}&(K_n(d_x^2))(x)=x^2(K_n(e_0))(x)-2x(K_n(e_1))(x)+(K_n(e_2))(x)\\&=x^2((K_n(e_0))(x)-1)-2x((K_n(e_1))(x)-x)+((K_n(e_2))(x)-x^2)\\&=x^2(K_n(e_0)-e_0)(x)-2x(K_n(e_1)-e_1)(x)+((K_n(e_2)-e_2)(x)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\sup\{|(K_n(d_x^2))(x)|; x\in I\}\\&\leq \|K_n(e_0)-e_0\|_\infty+2\|K_n(e_1)-e_1\|_\infty+\|K_n(e_2)-e_2\|_\infty\end{aligned}$$

を得るので (3) が従う。

(3) $\Rightarrow$ (4)：　$|x-y|<\delta$ なる任意の $x,y\in I$ に対し

$$|f(x)-f(y)|\leq\sup\{|f(\xi)-f(\eta)|;\xi,\eta\in I,|\xi-\eta|<\delta\}$$

であり $|x-y|\geq\delta$ なる任意の $x,y\in I$ に対し

$$|f(x)-f(y)|\leq 2\|f\|_\infty\leq\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}|x-y|^2$$

であるから任意の $x,y\in I$ に対し

$$|f(x)-f(y)|\leq\sup\{|f(\xi)-f(\eta)|;\xi,\eta\in I,|\xi-\eta|<\delta\}+\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}|x-y|^2$$

が成立つ。これを y の函数と見做せば、任意の $x \in I$ に対し

$$|f(x)e_0 - f| \leq \sup\{|f(\xi) - f(\eta)|; \xi, \eta \in I, |\xi - \eta| < \delta\}e_0 + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} d_x^2$$

が成立つ。K_n の線型性と正値性を用いると

$$\begin{aligned}
&|(K_n(f))(y) - f(x)(K_n(e_0))(y)| \\
&= |(K_n(f - f(x)e_0))(y)| \\
&\leq (K_n(|f - f(x)e_0|))(y) \\
&\leq \ \sup\{|f(\xi) - f(\eta)|; \xi, \eta \in I, |\xi - \eta| < \delta\}K_n(e_0)(Y) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}(K_n(d_x^2))(y)
\end{aligned}$$

が従う。これより

$$\begin{aligned}
&\|(K_n(f) - f\|_\infty \\
&\leq \ \sup\{|(K_n(f))(x) - f(x)(K_n(e_0))(x)|; x \in I\} \\
&\quad + \sup |f(x)(K_n(e_0))(x) - f(x)e_0(x)|; x \in I\} \\
&\leq \ \sup\{|f(\xi) - f(\eta)|; \xi, \eta \in I, |\xi - \eta| < \delta\}\|K_n(e_0)\|_\infty + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sup\{|(K_n(d_x^2))(x)|; x \in I\} \\
&\quad + \|f\|_\infty \|K_n(e_0) - e_0\|_\infty
\end{aligned}$$

を得るので (3) より

$$\limsup_{n \to \infty} \|K_n(f) - f\|_\infty \leq \sup\{|f(\xi) - f(\eta)|; \xi, \eta \in I, |\xi - \eta| < \delta\}$$

が従う。f は一様連続故 $\delta \downarrow 0$ として (4) を得る。

４．ボーマン・コロフキンの定理の一般化

ボーマン・コロフキンの定理の一般化を Lomelí-García に従って説明する。有界閉区間 $[0, 1]$ をコンパクト空間に一般化し、距離の自乗 d_x^2 に相当する概念を束縛函数 bounding function に一般化して考える。この節では X はコンパクト空間とし $C(X; \mathbb{R})$ を X 上の連続函数の成すノルム空間とする。

定義　$f \in C(X; \mathbb{R})$ に対する**束縛函数**とは直積コンパクト空間 $X \times X$ 上の非負値連続函数 γ で $\gamma^{-1}(\{0\}) \subset \mathrm{Diag}(f)$ なるものとする。ここに

$$\mathrm{Diag}(f) = \{(x, y) \in X \times X; f(x) = f(y)\}$$

とする。f の束縛函数 $\gamma : X \times X \to \mathbb{R}$ 及び $x \in X$ に対し $\gamma_x \in C(X; \mathbb{R})$ が $\gamma_x(y) = \gamma(x, y)$ で定まる。

定理４（ロメリ・ガルシア）　コンパクト空間 X 上の連続函数全体の成すノルム空間 $C(X : \mathbb{R})$ 上の実線型正値写像の列 $(L_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対し、次は同値である。

(1) 任意の $f \in C(X;\mathbb{R})$ に対し束縛函数 $\gamma \in C(X \times X;\mathbb{R})$ が存在し

$$\sup\{|(L_n(\gamma_x))(x)|; x \in X\} \to 0$$

且つ　$\|L_n(1) - 1\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)$

ここに 1 は定数函数を表すものとする。

(2) 任意の $f \in C(X;\mathbb{R})$ に対し $\|L_n(f) - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$

定理 4 の証明には次の補題を用いる。

補題３　Y をコンパクト空間とし α と β を Y 上の非負値連続函数で $\beta^{-1}(\{0\}) \subset \alpha^{-1}(\{0\})$ を満たすものとする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M(\varepsilon) > 0$ が存在し $\alpha \leq \varepsilon + M(\varepsilon)\beta$ を満たす。

（証明）　与えられた $\varepsilon > 0$ に対し $V_\varepsilon \equiv \alpha^{-1}([0,\varepsilon)) = \alpha^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ は Y の開集合であるから $Y \backslash V_\varepsilon$ はコンパクト集合となる。β は $Y \backslash V_\varepsilon$ 上最小値を取る。その点を一つ取り $x_0 \in Y \backslash V_\varepsilon$ とする。このとき $\beta(x_0) = 0$ なら仮定より $\alpha(x_0) = 0$ となり $x_0 \in V_\varepsilon$ が従い矛盾を生じる。従って $\beta(x_0) > 0$ であり任意の $x \in Y \setminus V_\varepsilon$ に対し $\beta(x) \geq \beta(x_0) > 0$ が成立つ。故に任意の $x \in Y \backslash V_\varepsilon$ に対し $\alpha(x) \leq \|\alpha\|_\infty \leq (\|\alpha\|_\infty/\beta(x_0))\beta(x)$ が成立つ。一方、任意の $x \in V_\varepsilon$ に対し $\alpha(x) < \varepsilon \leq \varepsilon + \beta(x)$ が成立つ。従って

$$M(\varepsilon) = \max(\|\alpha\|_\infty/\beta(x_0), 1) = \max(\|\alpha\|_\infty/\min_{x \notin V_\varepsilon}\beta(x), 1)$$

と置けば良い。

定理４の証明　(1) $\Rightarrow$ (2) を示せば充分である。$Y = X \times X$ 上の非負値連続函数 α が $\alpha(x,y) = |f(x) - f(y)|$ で定まる。このとき $\alpha^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Diag}(f)$ であり、定義より $\gamma^{-1}(\{0\}) \subset \mathrm{Diag}(f)$ となっているので、補題 3 より任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M(\varepsilon) > 0$ が存在し
任意の $(x,y) \in X \times X$ に対し不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + M(\varepsilon)\gamma(x,y)$$

が成立つ。これより任意の $x \in X$ に対し (Y の函数としての不等式)

$$|f(x) \cdot 1 - f| \leq \varepsilon \cdot 1 + M(\varepsilon)\gamma_x$$

が従う。L_n は正値線型であるから任意の $y \in X$ に対し不等式

$$|f(x)(L_n(1))(y) - (L_n(f))(y)| \leq \varepsilon(L_n(1))(y) + M(\varepsilon)(L_n(\gamma_x))(y)$$

が成立つ。これより

$$\begin{aligned}\|L_n(f) - f\|_\infty &\leq \sup\{|(L_n(f))(x) - f(x)(L_n(1))(x)|; x \in X\} \\ &\quad + \sup\{|f(x)(L_n(1) - 1)(x)|; x \in X\} \\ &\leq \varepsilon\|L_n(1) - 1\|_\infty + \varepsilon + M(\varepsilon)\sup\{|(L_n(\gamma_x))(x)|; x \in X\} \\ &\quad + \|f\|_\infty\|L_n(1) - 1\|_\infty\end{aligned}$$

となるので

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n(f)-f\|_\infty \le \varepsilon$$

が従う。$\varepsilon>0$ は任意であったので (2) が導かれる。

５．ストーン・ワイエルストラスの定理

コンパクト空間 X 上の連続函数全体の成すノルム空間 $C(X;\mathbb{R})$ に於いて其の部分集合が稠密である為の充分条件を与えるストーン・ワイエルストラスの定理を代数 algebra 及び 束 lattice の概念の二つの側面から纏めて置こう。

定義　$C(X;\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathscr{A}$ に対し

・$\mathscr{A}$ は代数である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathscr{A}$ は積の定義されたベクトル空間である
（即ち任意の $f,g\in\mathscr{A}$ に対し $fg\in\mathscr{A}$ が定義されている）

・$\mathscr{A}$ は束である。$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 二つの $\mathscr{A}$ の元に対し各点での大小を取る事に依って出来る
二つの函数は $\mathscr{A}$ に属す（即ち任意の $f,g\in\mathscr{A}$ に対し
$f\vee g, f\wedge g\in\mathscr{A}$ となる。ここに $(f\vee g)(x)=\max(f(x),g(x))$,
$(f\wedge g)(x)=\min(f(x),g(x))$)

・$\mathscr{A}$ は点を分離する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 相異なる任意の二点 $x,y\in X$ に対し
$f\in\mathscr{A}$ が存在して $f(x)\neq f(y)$

・$\mathscr{A}$ は二点を補間する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 相異なる任意の二点 $x,y\in X$ 及び任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対し
$f\in\mathscr{A}$ が存在し $f(x)=\alpha, f(y)=\beta$

・$\mathscr{A}$ は二点を近似補間する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 相異なる任意の二点 $x,y\in X$ 及び任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\varepsilon>0$
に対し $f\in\mathscr{A}$ が存在し $|f(x)-\alpha|<\varepsilon, |f(y)-\beta|<\varepsilon$

定理５（部分束に対するストーン・ワイエルストラスの定理　コンパクト空間 X 上の連続函数全体の成すノルム空間 $C(X;\mathbb{R})$ の部分束 $\mathscr{A}$ に対し次は同値である。

(1)　$\mathscr{A}$ は $C(X;\mathbb{R})$ で稠密である（即ち $\bar{\mathscr{A}}=C(X;\mathbb{R})$)

(2)　$\mathscr{A}$ は任意の $f\in C(X;\mathbb{R})$ に対して生成される二点を近似補間する。即ち任意の $f\in C(X;\mathbb{R})$, 相異なる任意の二点 $x,y\in X$, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $g\in\mathscr{A}$ が存在し $|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\ |f(y)-g(y)|<\varepsilon$

証明　(1) $\Rightarrow$ (2): 仮定より任意の $f\in C(X;\mathbb{R})$ に対し $g\in\mathscr{A}$ が存在し $||f-g||_\infty<\varepsilon$ となるから (2) が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): 任意の $f \in C(X;\mathbb{R})$ 及び $\varepsilon > 0$ を取る。仮定より任意の二点 $x, y \in X$ に対し $g_{x,y} \in \mathscr{A}$ が存在し $|f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon,\ |f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon$ が成立つ。一点 $x \in X$ を固定し $U_{x,y} \equiv \{\xi \in X; f(\xi) - g_{x,y}(\xi) < \varepsilon\}$ を考える。$U_{x,y} = (f - g_{x,y})^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ 故 $U_{x,y}$ は $y \in U_{x,y}$ なる X の開集合であり $(U_{x,y}; y \in X)$ は X の開被覆となる。X のコンパクト性により有限集合 $F(x) \subset X$ が存在し $(U_{x,y}; y \in F(x))$ は X の有限被覆となる。

さて $g_x = \max\{g_{x,y}; y \in F(x)\}$ と置くと $g_x \in \mathscr{A}$ であり任意の $\xi \in X$ に対し $f(\xi) - g_x(\xi) < \varepsilon$ が成立つ。そこで $U_x \equiv \{\xi \in X; f(\xi) - g_x(\xi) > -\varepsilon\} = (f - g_x)^{-1}((-\varepsilon, \infty))$ と置く。$f(x) - g_x(x) = f(x) - \max_{y \in F(x)} g_{x,y}(x) = -\min_{y \in F(x)}(f(x) - g_{x,y}(x)) \geq -\min_{y \in F(x)} |f(x) - g_{x,y}(x)| > -\varepsilon$ より $x \in U_x$ となるので $(U_x; x \in X)$ は X の開被覆となる。X のコンパクト性より有限集合 $F \subset X$ が存在し $(U_x; x \in F)$ は X の有限被覆となる。$g = \min\{g_x; x \in F\}$ と置くと $g \in \mathscr{A}$ であり任意の $\xi \in X$ に対し $-\varepsilon < f(\xi) - g(\xi) = f(\xi) - \min_{x \in F} g_x(\xi) = \max_{x \in F}(f(\xi) - g_x(\xi)) < \varepsilon$ となり $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ が従う。

定理６（束の特徴付け） $C(X;\mathbb{R})$ の部分空間 $\mathscr{A}$ に対し次は同値である。

(1) $\mathscr{A}$ は束である。

(2) $\mathscr{A}$ は絶対値に就いて閉じている。ここに $f \in C(X;\mathbb{R})$ に対し
$|f| = f_+ - f_-, f_+ = f \vee 0, f_- = f \wedge 0$ とする。

（証明） (1) $\Rightarrow$ (2)：任意に $f \in \mathscr{A}$ を取る。$0 \in \mathscr{A}$ であるから (1) より $f_\pm \in \mathscr{A}$ となり $|f| \in \mathscr{A}$ が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1)： $-(f \wedge 0) = (-f) \vee 0$ より $|f| = (f \vee 0) + ((-f) \vee 0)$ が従う。これより $|f| \geq f$ 且つ $|f| \geq -f$ を得るので $|f| \geq f \vee (-f)$ が従う。一方 $f \vee (-f) \geq f, -f, 0$ より $f \vee (-f) \geq f \vee 0, (-f) \vee 0$ を得る。ここで $\mathrm{supp}(f \vee 0) \cap \mathrm{supp}((-f) \vee 0) = \emptyset$ より $f \vee (-f) \geq (f \vee 0) + ((-f) \vee 0)$ が従う。故に $|f| = f \vee (-f)$ を得る。これより $|f - g| = (f - g) \vee (g - f), (f + g) + |f - g| = (f + g) + ((f - g) \vee (g - f)) = 2(f \vee g)$ を得るので $f \vee g = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|) \in \mathscr{A}$ が従う。これより $f \wedge g = -((-f) \vee (-g)) = \frac{1}{2}((-f - g) + |-f + g|) = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|) \in \mathscr{A}$ が従う。

定理７（定数を含む代数の点分離の特徴付け） $1 \in \mathscr{A}$ なる代数 $\mathscr{A} \subset C(X;\mathbb{R})$ に対し次は同値である。

(1) $\mathscr{A}$ は点を分離する。

(2) $\mathscr{A}$ は二点を補間する。

(3) $\mathscr{A}$ は二点を近似補間する。

（証明）　(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) は明らかであるので (1) $\Rightarrow$ (2) を示せば充分である。$x \neq y$ なる二点 $x, y \in X$ を取る。仮定により $f \in \mathscr{A}$ が存在し $f(x) \neq f(y)$ となる。$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を任意に与える。$g \in C(X;\mathbb{R})$ が

$$g(\xi) = \frac{(\alpha-\beta)f(\xi) - \alpha f(y) + \beta f(x)}{f(x)-f(y)},\ \xi \in X$$

で定まる。$\mathscr{A}$ は 1 を含む代数であるから $g \in \mathscr{A}$ となり $g(x) = \alpha, g(y) = \beta$ を満たす。

定理８（部分代数に対するストーン・ワイエルストラスの定理）　コンパクト空間 X 上の連続函数全体の成すノルム空間 $C(X;\mathbb{R})$ の部分代数 $\mathscr{A}$ に対し次は同値である。

(1)　$\mathscr{A}$ は $C(X;\mathbb{R})$ で稠密である（即ち $\bar{\mathscr{A}} = C(X;\mathbb{R})$）

(2)　$\mathscr{A}$ は任意の $f \in C(X;\mathbb{R})$ に対して生成される二点を近似補間する。即ち任意の $f \in C(X;\mathbb{R})$, 相異なる任意の二点 $x, y \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $g \in \mathscr{A}$ が存在し $|f(x) - g(x)| < \varepsilon,\ |f(y) - g(y)| < \varepsilon$

（証明）　(1) $\Rightarrow$ (2)：定理 5 の (1) $\Rightarrow$ (2) の証明と同じである。

(2) $\Rightarrow$ (1)：(2) は $\mathscr{A}$ を $\bar{\mathscr{A}}$ に置き換えても成立つので $\bar{\mathscr{A}}$ が部分束を示す事を示せば定理 5 より (2) $\Rightarrow$ (1) が従う。$\mathscr{A}$ は $C(X;\mathbb{R})$ の部分代数故 $\bar{\mathscr{A}}$ もそうである。定理 6 より $\bar{\mathscr{A}}$ が絶対値に就いて閉じている事を示せば充分である。任意に $f \in \bar{\mathscr{A}}$ 及び $\varepsilon > 0$ を取る。補題 1 により $\sup\{||x| - P(x)|; |x| \leq 1\} < \varepsilon/(||f||_\infty + 1)$ なる多項式 $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する。このとき $Q(f) \equiv \|f\|_\infty P(f/\|f\|_\infty) \in \bar{\mathscr{A}}$ であり

$$\begin{aligned}\||f| - Q(f)\|_\infty =& \|f\|_\infty \||f/\|f\|_\infty| - P(f/\|f\|_\infty)\|_\infty \\ =& \|f\|_\infty \sup\{\|x| - P(x)|; |x| \leq 1\} < \varepsilon\end{aligned}$$

となるから $|f| \in \bar{\mathscr{A}}$ が従う。これが示すべき事であった。

定理９（定数を含む部分代数に対するストーン・ワイエルストラスの定理）　定数を含み、点を分離する代数 $\mathscr{A} \subset C(X;\mathbb{R})$ は稠密である。

（証明その１）　定理 7 より $\mathscr{A}$ は二点を補間するので定理 8 より $\bar{\mathscr{A}} = C(X;\mathbb{R})$ が従う。

（証明その２）　上記定理 8 の証明では、代数 $\mathscr{A}$ の閉包 $\mathscr{A}$ が再び代数を成す事と、$\mathscr{A}$ が絶対値に就いて閉じている事が本質的であった。これにより、代数の構造が束の構造に移植され、全ては定理 5 に全て帰着されると云う論法を構成したのである。以下では、この論法を用いない Brosowski と Deutsch に依る直接的で初等的な証明を解説しよう。その為に二つの補題を準備する。

補題４　任意の $x_0 \in X$ とその任意の開近傍 U に対し $V \subset U$ なる x_0 の開近傍 V が存在し以下の性質を満たす。任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{A}$ が存在し

(i)　任意の $x \in X$ に対し $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$

(ii)　任意の $x \in V$ に対し $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$

(iii)　任意の $x \in X \backslash U$ に対し $1 - \varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$

（証明）　各 $x \in X \backslash U$ に対し $\mathscr{A}$ の点分離性より $f_x \in \mathscr{A}$ が存在し $f_x(x) \neq f_x(x_0)$ となる。$g_x(\xi) = f_x(\xi) - f_x(x_0), \xi \in X$ で定まる $g_x : X \ni \xi \mapsto g_x(\xi) \in \mathbb{R}$ は $\mathscr{A}$ に属し $g_x(x) \neq g_x(x_0) = 0$ を満たす。このとき $h_x \equiv g_x^2 / \|g_x\|_\infty^2$ は $h_x(x_0) = 0, h_x(x) > 0, 0 \leq h_x \leq 1$ なる $\mathscr{A}$ の元である。さて $U(x) = \{\xi \in X; h_x(\xi) > 0\}$ と置く。$x \in U(x) = h_x^{-1}((0, \infty))$ 故 $(U(x) \cap (X \backslash U); x \in X \backslash U)$ は $X \backslash U$ の開被覆となる。$X \backslash U$ のコンパクト性より有限集合 $\{x_j \in X \backslash U; 1 \leq j \leq m\}$ が存在し $X \backslash U \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} U(x_j)$ とする事が出来る。

さて $h = \frac{1}{m}\displaystyle\sum_{j=1}^{m} h_{x_j}$ と置く。このとき $h \in \mathscr{A}$ であり $0 \leq h \leq 1, h(x_0) = 0$ 且つ任意の $\xi \in X \backslash U$ に対し $h(\xi) > 0$ である事が従う。h はコンパクト集合 $X \backslash U$ 上最小値を取るので $0 < \delta < 1$ が存在し任意の $\xi \in X \backslash U$ に対し $h(\xi) \geq \delta$ となる。さて $V = \{\xi \in X; h(\xi) < \delta/2\}$ と置くと V は $x_0 \in V$ なる開集合で $X \backslash U \subset X \backslash V$ より $V \subset U$ である事が分かる。$k = \min\{\ell \in \mathbb{Z}; 1/\delta < \ell\}$ と置く。このとき $k - 1 \leq 1/\delta < k$ であり $k \leq 1 + 1/\delta < 2/\delta$ より $k\delta/2 < 1 < k\delta$ が従う。そこで $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\psi_n : X \to \mathbb{R}$ を

$$\psi_n(\xi) = (1 - h(\xi)^n)^{k^n}, \xi \in X$$

で定義する。$1, h \in \mathscr{A}$ 故 $\psi_n \in \mathscr{A}$ であり $0 \leq h \leq 1, h(x_0) = 0$ 故 $0 \leq \psi_n \leq 1, \psi_n(x_0) = 1$ である。任意の $\xi \in V$ に対し $0 \leq kh(\xi) \leq k\delta/2 < 1$ となるからベルヌイの不等式より

$$\begin{aligned} &\sup\{|1 - \psi_n(\xi)|; \xi \in V\} = \sup\{1 - \psi_n(\xi); \xi \in V\} \\ \leq &\sup\{(kh(\xi))^n; \xi \in V\} \leq (k\delta/2)^n \to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

が従う。一方、任意の $x \in X \backslash U$ に対し $kh(\xi) \geq k\delta > 1$ となるから再びベルヌイの不等式より

$$\begin{aligned} &\sup\{|\psi_n(\xi)|; \xi \in X \backslash U\} = \sup\{\frac{1}{(kh(\xi))^n}\psi_n(\xi)(kh(\xi))^n; \xi \in X \backslash U\} \\ \leq &\sup\{\frac{1}{(kh(\xi))^n}(1 - h(\xi)^n)^{k^n}(1 + (kh(\xi))^n); \xi \in X \backslash U\} \\ \leq &(k\delta)^{-n} \sup\{(1 - h(\xi)^n)^{k^n}(1 + k(\xi))^n)^{k^n}; \xi \in X \backslash U\} \\ \leq &(k\delta)^{-n} \sup\{(1 - h(\xi)^{2n})^{k^n}; \xi \in X \backslash U\} \leq (k\delta)^{-n} \to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

が従う。与えられた $\varepsilon > 0$ に対し $(k\delta)^{-n} < \varepsilon$ なる n を取り $\varphi_\varepsilon = 1 - \psi_n$ と置けば補題 4 に挙げた性質が全て満たされる。

補題 5　M と N を互いに素な X の閉部分集合とする。このとき $0 < \varepsilon < 1$ なる任意の ε に対し $\psi_\varepsilon \in \mathscr{A}$ が存在し次を満たす。

(i) 任意の $x \in X$ に対し $0 \leq \psi_\varepsilon(x) \leq 1$

(ii) 任意の $x \in M$ に対し $1-\varepsilon < \psi_\varepsilon(x) \leq 1$

(iii) 任意の $x \in N$ に対し $0 \leq \psi_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$

(証明) $U = X\backslash M$ として各 $x \in N \subset X\backslash M = U$ に対して補題4で与えられる x の開近傍 $V(x) \subset U$ を取る。$(V(x); x \in N)$ は N を覆うので有限集合 $\{x_j \in N; 1 \leq j \leq m\}$ が存在し $N \subset \bigcup_{j=1}^{m} V(x_j)$ とする事が出来る。補題4より各 j に対し $\varphi_j \in \mathscr{A}$ が存在し $0 \leq \varepsilon_j \leq 1, V(x_j)$ 上 $0 \leq \varphi_j < \varepsilon/m, M = T\backslash U$ 上 $1-\varepsilon/m < \varphi_j \leq 1$ が成立つ。そこで $\psi_\varepsilon = \prod_{j=1}^{m} \varphi_j$ と置く。このとき $\psi_\varepsilon \in \mathscr{A}$ であり $N(\subset \bigcup_{j=1}^{m} V(x_j))$ 上 $0 \leq \psi_\varepsilon = \prod_{j=1}^{m} \varphi_j = \prod_{j=1}^{m} (\varepsilon/m) = \varepsilon$ 更に M 上 $\psi_\varepsilon = \prod_{j=1}^{m} \varphi_j > (1-\varepsilon/m)^m \geq 1-\varepsilon$ が成立つ。

以上の補題4と5を用いて定理9の証明（その2）を与えよう。初めに任意に $f \in C(X;\mathbb{R})$ と $\varepsilon > 0$ を与えておく。ε は充分小さいものと仮定して良い（以下の議論では $\varepsilon < 1/3$ で充分)。

$f \geq 0$ の場合： $n \geq \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} + 1$ なる整数 n を一つ固定する。各 $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対し M_j, N_j を

$$\begin{aligned} M_j &= \{x \in X; f(x) \geq \left(j+\frac{1}{3}\right)\varepsilon\} = f^{-1}\left([\left(j+\frac{1}{3}\right)\varepsilon,\ \infty)\right), \\ N_j &= \{x \in X; f(x) \leq \left(j-\frac{1}{3}\right)\varepsilon\} = f^{-1}\left((-\infty, \left(j-\frac{1}{3}\right)\varepsilon]\right) \end{aligned}$$

で定める。M_j 及び N_j は X の互いに素な閉部分集合で

$$M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = \emptyset,$$

$$\emptyset = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = X$$

なる関係を満たす。補題5により各 j に対し $\psi_j \in \mathscr{A}$ が存在し X 上 $0 \leq \psi_j \leq 1,\ M_j$ 上 $1-\frac{\varepsilon}{n} < \psi_j \leq 1, N_j$ 上 $0 \leq \psi_j \leq \frac{\varepsilon}{n}$ を満たす。そこで $g = \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \psi_j$ と置く。さて任意に $x \in X$ を取る。$1 \leq j \leq n$ なる j が唯一つ存在し $x_j \in N_j \backslash N_{j-1}$ が成立つ。このとき

$$\left(j-\frac{4}{3}\right)\varepsilon = \left((j-1)-\frac{1}{3}\right)\varepsilon < f(x) \leq \left(j-\frac{1}{3}\right)\varepsilon,$$

$$0 \leq \max_j \psi_j(x) \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

が成立つ。これより

$$g(x) = \varepsilon \sum_{i=0}^{j-1} \psi_j(x) + \varepsilon \sum_{i=j}^{n} \psi_j(x) \leq \varepsilon j + \varepsilon(n-j+1)\frac{\varepsilon}{n} \leq (j+\varepsilon)\varepsilon,$$

$$g(x) - f(x) \leq (j+\varepsilon)\varepsilon - \left(j - \frac{1}{3}\right)\varepsilon = \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right)\varepsilon < \varepsilon$$

が従う。一方 $x \in N_j \backslash N_{j-1}, j \geq 1$ ならば $f(x) > ((j-1) - \frac{1}{3})\varepsilon = (j - \frac{4}{3})\varepsilon$ が従う。
$j \geq 2$ の場合 $x \in \bigcup_{i=0}^{j-2} M_i$ となるので

$$g(x) = \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) \geq \varepsilon \sum_{i=0}^{j-2} \psi_i(x) \geq \varepsilon \sum_{i=0}^{j-2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) = (j-1)\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\varepsilon$$

が従う。最右辺は $j=1$ で 0 となるので結局 $x \in N_j \backslash N_{j-1}$ に対し

$$g(x) \geq (j-1)\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\varepsilon$$

が成立つ。このとき $x \in N_j$ より

$$f(x) - g(x) \leq \left(j - \frac{1}{3}\right)\varepsilon - (j-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\varepsilon = \left(\frac{2}{3} + \frac{j-1}{n}\varepsilon\right)\varepsilon < \left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right)\varepsilon < \varepsilon$$

が従う。故に

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

が成立つ。$x \in X$ は任意であったので

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$$

が従う。これが示すべき事であった。

一般の場合： $f \in C(X;\mathbb{R})$ に対し $f + \|f\|_\infty$ は前段の仮定を満たすので $g \in \mathscr{A}$ が存在し $\|(f + \|f\|_\infty) - g\|_\infty < \varepsilon$ を満たす。このとき $g - \|f\|_\infty \in \mathscr{A}$ が求めるものとなる。

６．ストーン・ワイエルストラスの定理の複素版

この節ではストーン・ワイエルストラスの定理を複素数値連続函数に拡張する事を考えよう。先ず定理 9 で $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に置き換えた命題は成立しない事に注意する。実際、コンパクト集合 $X = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ 上の連続函数 $f : X \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ が複素係数 $(a_{nj}; j \in J_n)$（ここに $J_n \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sharp J_n < \infty, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）を持つ多項式 $p_n(x) = \sum_{j \in J_n} a_{nj} z^j$ の列 $(p_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の一様極限であったとすると f は領域 $D = \mathrm{Int}X = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の正則函数列 $(p_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の広

義一様収束極限として D 上正則となるが、これは矛盾である。次の様な直接的な計算に基づいても矛盾を導く事が出来る：

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 2\pi\int_0^1 r^3dr = \int_X (x^2+y^2)dxdy = \int_X z\bar{z}dxdy = \int_X f\bar{f}\\ &= \int_X (f-p_n)\bar{f} + \int_X p_n\bar{f} = \int_X (f-p_n)\bar{f}\\ &\leq \|f-p_n\|_\infty \int_X |f| = \|f-p_n\|_\infty \int_X rdxdy = \|f-p_n\|_\infty \cdot 2\pi\int_0^1 r^2dr\\ &= \frac{2\pi}{3}\|f-p_n\|_\infty\end{aligned}$$

より $\|f-p_n\|_\infty \geq 3/4$ となり矛盾。ここに

$$\int_X p_n\bar{f} = \int_X p_n(z)zdxdy = \sum_{j\in J_n} a_{nj}\int_0^1 r^{j+1}\int_0^{2\pi} e^{ij\theta}e^{i\theta}d\theta dr = 0$$

を用いた。

定義　コンパクト空間 X 上の複素数値連続函数全体の成すノルム空間 $C(X;\mathbb{C})$ の部分集合 $\mathscr{A}$ に対し

・$\mathscr{A}$ は**代数である** $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\mathscr{A}$ は積の定義されたベクトル空間である

・$\mathscr{A}$ は**点を分離する** $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 相違なる任意の二点 $x, y \in X$ に対し $f \in \mathscr{A}$ が存在して $f(x) \neq f(y)$

・$\mathscr{A}$ は**複素共軛に就いて閉じている** $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $f \in \mathscr{A}$ に対し $\bar{f} \in \mathscr{A}$

定理１０（定数を含む部分代数に対するストーン・ワイエルストラスの定理の複素版）
複素定数を含み、点を分離し、複素共軛に就いて閉じている代数 $\mathscr{A} \subset C(X;\mathbb{C})$ は稠密である。

証明　$k=0,1,2$ に対し $\mathscr{A}_k$ を

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}_0 = \{f\in\mathscr{A}; f(X)\subset\mathbb{R}\},\\ &\mathscr{A}_1 = \{u\in C(X;\mathbb{R}); f\in\mathscr{A} \text{ が存在して } u=\mathrm{Re}f\},\\ &\mathscr{A}_2 = \{u\in C(X;\mathbb{R}); f\in\mathscr{A} \text{ が存在して } v=\mathrm{Im}f\}\end{aligned}$$

と置く。定義より $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1$ となる。$\mathscr{A}$ は複素ベクトル空間であるから $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ が従い、更に $\mathscr{A}$ は複素共軛に就いて閉じているから $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_0$ が従う。故に $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ となる。$\mathscr{A}$ は代数であるから $\mathscr{A}_0$ も代数を成す。相違なる任意の二点 $x, y \in X$ に対し $f \in \mathscr{A}$ が存在し $f(x) \neq f(y)$ となるから $\mathrm{Re}f(x) \neq \mathrm{Re}f(y)$ または $\mathrm{Im}f(x) \neq \mathrm{Imf}(y)$ が成立ち $\mathrm{Re}f$ または Imf によって二点は分離される。$\mathscr{A}$ は複素定数を含むので $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ は実定数を

含む。定理 9 より $\mathscr{A}_0 =$ は $C(X;\mathbb{R})$ で稠密である。これより $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + i\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_0 + i\mathscr{A}_0$ は $C(X;\mathbb{C})$ で稠密である。

定理１１（単位円上の連続函数の三角級数近似）　単位円上の複素数値連続函数は複素係数三角級数列の一様収束極限として表される。

（証明）　単位円 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上の連続函数 $\varphi, \bar{\varphi}$ を $\varphi(z) = z, \bar{\varphi}(z) = \bar{z}$ とし $\mathscr{A}$ を $\varphi, \bar{\varphi}$ で生成される代数とする。定理 10 より $\mathscr{A}$ は $C(\mathbb{T};\mathbb{C})$ で稠密である。$z \in \mathbb{T}$ に対し $\bar{z} = z^{-1}$ であるから $\mathscr{A}$ の元は

$$p_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\ (c_k \in \mathbb{C}, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

の形に表される。

参考文献：

[1]F. Altomare, *Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators*, Surv. Approx. Theory **5**(2010), 92-164.

[2]B. Brosowski and F. Deutsch, *An elementary proof of the Stone-Weierstrass theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **81**(1981), no. 1, 89-92.

[3]G.B. Folland, “Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications,” Second Edition, Wiley-Interscience, 1999.

[4]M. Giaquinta and G. Modica, “Mathematical Analysis, Linear and Metric Structures and Continuity,” Birkhäuser, 2007.

[5]S. Lang, “Analysis I,” Addison-Wesley, 1969.

[6]H. Kuhn, *Ein elementarer Beweis des Weierstrassschen Approximationssatzes*, Arch. Math. **15**(1964), 316-317.

[7]H.E. Lomelí and C.L. García, *Variations on a theorem of Korovkin*, Amer. Math. Monthly 1**13**(2006), 744-750.

[8]A. Pinkus, *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory **107**(2000), 1-66.