部分列と対角線論法

平成 26 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

点列の部分列の捉え方について整理し、カントールの対角線論法を論じよう。

1．点列の部分列

空でない集合 X の**点列** sequence とは写像 $a : \mathbb{Z}_{>0} \ni n \mapsto a(n) \in X$ の事である。通常 $a_n = a(n)$ とし a を $(a_n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$, $(a_n)_{n\geq 1}$, (a_n), $\{a_n\}_{n\geq 1}, \{a_n\}$ 等と表す。定義域を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 或いは下に有界で、上に非有界な部分集合 $I \subset \mathbb{Z}$ を取る事が自然な場合もある。また、ここでは有限列は考えない。点列 $a = (a_n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$ の**部分列** sebsequence とは狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ との合成写像 $a \circ \varphi : \mathbb{Z}_{>0} \ni n \mapsto a(\varphi(n)) \in X$ の事である。通常 $n_k = \varphi(k)$ とし、$a \circ \varphi$ を $(a_{n_k} : k \in \mathbb{Z}_{>0})$, $(a_{n_k})_{k\geq 1}$, $(a_{n_k}), \{a_{n_k}\}_{k\geq 1}$, $\{a_{n_k}\}$ 等と表す。φ が恒等写像の場合は部分列は元の列と同じものになる。部分列 $a \circ \varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to X$ は a の定義域 $\mathbb{Z}_{>0}$ を $I \equiv \varphi(\mathbb{Z}_{>0})$ に制限した写像 $a|I = (a \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} : I \to X$ と見做す事も出来る。狭義単調増加写像 φ は単射であるから値域を制限した写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to I$ は全単射となり、上の φ^{-1} はその逆写像の意味である。任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\varphi(n) \geq n$ となるから I は上に非有界な $\mathbb{Z}_{>0}$ の部分集合である。$\mathbb{Z}_{>0}$ の上に非有界な部分集合は $\mathbb{Z}_{>0}$ の可算（無限）部分集合と同値であるから以下では後者の名称を用いる事にする。さて、与えられた可算集合 $I \subset \mathbb{Z}_{>0}$ に対し狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し $\varphi(\mathbb{Z}_{>0}) = I$ を満たすので $a : \mathbb{Z}_{>0} \to X$ を I に制限した写像 $a|I : I \to X$ は a の部分列 $a \circ \varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to X$ と見做す事が出来る。以上より、部分列を捉える方法として狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ に拠るものと可算集合 $I \subset \mathbb{Z}_{>0}$ に拠るものを挙げたが、これらは同値である事が分かった。

2．対角線論法の基礎

カントールの対角線論法 Cantor's diagonal argument とは、一つの点列から部分列を繰り返し取って行く無限回の手続きが与えられている時、新たに一つの部分列を選び、それが元々の（有限回の操作で得られる）どの部分列に対しても（初めの有限個を除いて）その部分列となっている様に出来ると云う主張である。その論法を写像の言葉で定式化しよう。

命題 1　各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\varphi_m : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ は狭義単調増加写像であるとする。このとき狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\ell \geq m$ ならば $\varphi(\ell) \in (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_m)(\mathbb{Z}_{>0})$ を満たす。

（証明）　各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\varphi(n) = (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$ と置く。このとき任意の $j, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成立つ不等式 $\varphi_j(k) \geq k$ 及び $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n$ の狭義単調増加性に因り

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) &= (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n)(\varphi_{n+1}(n+1)) \\ &\geq (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n+1) \\ &> (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n) = \varphi(n)\end{aligned}$$

が従う。これより φ の狭義単調性を得る。一方 $\ell \geq m$ ならば

$$\varphi(\ell) = (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_\ell)(\ell) \in (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_\ell)(\mathbb{Z}_{>0}) \subset (\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_m)(\mathbb{Z}_{>0})$$

となり後半の主張が従う。

命題２　各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I_m \subset \mathbb{Z}_{>0}$ は可算（無限）集合で単調減少列を成しているものとする：$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots$ このとき狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\ell \geq m$ ならば $\varphi(\ell) \in I_m$ を満たす。

（証明）　$\varphi(1) = \min I_1, m \geq 2$ に対しては帰納的に

$$\varphi(m) = \min\{k \in I_m; k \geq \varphi(m-1)+1\}$$

と置く。狭義単調性は $\varphi(m) \geq \varphi(m-1)+1 > \varphi(m-1)$ より従い $\ell \geq m$ ならば

$$\varphi(\ell) \in I_\ell \subset I_m$$

となり後半の主張が従う。

３．対角線論法の応用

前節で定式化した対角線論法を良く知られた定理の証明に用いてみよう。

定理１　ワイエルストラスの公理（実数の空でない有界部分集合に対する上限・下限の存在）からボルツァノ・ワイエルストラスの公理（有界な実数列に対する収束部分列の存在）が導かれる。

（証明）　ワイエルストラスの公理より有界単調列の収束性が従うので有界列の上極限及び下極限の存在が導かれる。$a = (a_n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を有界数列とし $\alpha \in \mathbb{R}$ をその上極限とする：$\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$

各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し
$$I_m = \{n \in \mathbb{Z}_{>0}; a_n > \alpha - 1/m\}$$
と置く。定義より (I_m) は単調減少であり、上極限の性質により I_m は可算（無限）である。命題２により狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\ell \geq m$ ならば $\varphi(\ell) \in I_m$ となる。このとき任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、不等式

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{\ell\to\infty} a_{\varphi(\ell)} \geq \liminf_{\ell\to\infty} a_{(\varphi(\ell))} \geq \liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in I_m}} a_n \geq \alpha - 1/m$$

が成立つので等式
$$\alpha = \limsup_{\ell\to\infty} a_{\varphi(\ell)} = \liminf_{\ell\to\infty} a_{\varphi(\ell)}$$
が従い $(a_{\varphi(\ell)}; \ell \in \mathbb{Z}_{>0})$ は収束部分列となる。

定理２　距離空間 (X, d) は全有界且つ完備ならば点列コンパクトである。

（証明）　$a = (a_n; n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を X の点列とする。X は全有界であるから $\{B(x; 1); x \in X\}$ は有限部分被覆を持つ（ここに $B(x, \rho) = \{y \in X; d(x, y) < \rho\}$ とする）。有限部分被覆の内の一つは a の部分列を含む。即ち $x_1 \in X$ が存在し

$$I_1 = \{n \in \mathbb{Z}_{>0}; a_n \in B(x_1 : 1)\}$$

は可算 $(\sharp I_1 = \infty)$ である。以下帰納的に各 $m \geq 2$ に対し $x_m \in X$ が存在し

$$I_m = \{n \in I_{m-1}; a_n \in B(x_m; 1/m)\}$$

は可算となることが導かれる。これらは単調減少列を成すので、命題２より狭義単調増加写像 $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、各 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\ell \geq m$ ならば $\varphi(\ell) \in I_m$ となる。任意の $m \geq 1$ に対し $k, \ell \geq m$ とすれば

$$d(a_{\varphi(k)}, a_{\varphi(\ell)}) \leq d(a_{\varphi(k)}, x_m) + d(x_m, a_{\varphi(\ell)}) \leq 2/m$$

となるので $(a_{\varphi(\ell)}; \ell \in \mathbb{Z}_{>0})$ はコーシー列を成す。X の完備性より $(a_{\varphi(\ell)}; \ell \in \mathbb{Z}_{>0})$ は a の収束部分列である。

定理３　各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し距離空間 (X_n, d_n) は点列コンパクトならば、その積空間 $X = \prod_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} X_n$ も距離付け可能な空間として点列コンパクトである。

（証明）　X から X_n への射影を p_n と表し X の距離 d を

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(p_n(x), p_n(y))}{1 + d_n(p_n(x), p_n(y))},\ x, y \in X$$

で導入する。$a=(a_j;j\in\mathbb{Z}_{>0})$ を X の点列とする。$p_1(a)=(p_1(a_j);j\in\mathbb{Z}_{>0})$ は点列コンパクト空間 (X_1,d_1) の列であるから狭義単調増加写像 $\varphi_1:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ が存在し $p_1(a\circ\varphi_1)=(p_1(a_{\varphi_1(j)});j\in\mathbb{Z}_{>0})$ は X_1 の収束部分列となる。その極限を $\alpha_1\in X_1$ と表す。以下、帰納的に各 $m\geq 2$ に対し狭義単調増加写像 $\varphi_m:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ 及び $\alpha_m\in X_m$ が存在し $p_m(a\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_m)=(p_m(a_{(\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_m)(j)});j\in\mathbb{Z}_{>0})$ は α_m に収束する事が導かれる。命題 1 により狭義単調増加写像 $\varphi:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、各 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\ell\geq m$ ならば $\varphi(\ell)\in(\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n)(\mathbb{Z}_{>0})$ を満たす。このとき不等式

$$\begin{aligned}d(a_{\varphi(\ell)},(\alpha_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d(p_n(a_{\varphi(\ell)}),\alpha_n)}{1+d(p_n(a_{\varphi(\ell)}),\alpha_n)}\\ &\leq \max_{1\leq n\leq N} d(p_n(a_{\varphi(\ell)}),\alpha_n)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

に於いて $\ell\to\infty$ としてから $N\to\infty$ とすれば $a\circ\varphi:\mathbb{Z}_{>0}\to X$ は $(\alpha_n)\in X$ に収束する a の部分列である事が従う。

参考文献：

松坂和夫，集合・位相入門，岩波書店
齋藤正彦，数学の基礎，東京大学出版会
H. Hanche-Olsen, Diagonals without tears, http://www.math.ntnu.no/~hanche/index-e.html