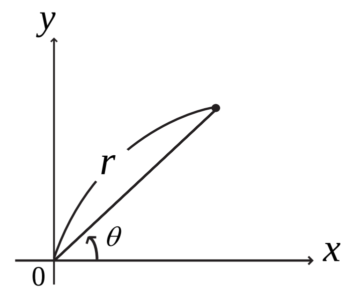
極座標系に於ける微分作用素

平成 20 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

1. 二次元の場合



　$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 Φ が $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ で定まる。$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は C^∞ 写像となる。Φ の定義域を $(0,\infty)\times[0,2\pi)$ に制限したものは $(0,\infty)\times[0,2\pi)$ から $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ への全単射となり、その逆写像は

$$(x,y) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{Tan}^{-1}\ \frac{y}{x})$$

で与えられる。C^∞ 函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ に対して $\Phi^* f = f\circ\Phi$ と定めると $\Phi^* f$ は C^∞ 写像の合成として C^∞ となる。その偏導函数は合成函数の微分法により

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}(\Phi^* f)(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(f\circ\Phi)(r,\theta) = f'(\Phi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,\theta) \\
&= (\partial_1 f)(\Phi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) + (\partial_2 f)(\Phi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) \\
&= (\partial_1 f)(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + (\partial_2 f)(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta, \\
\frac{\partial}{\partial\theta}(\Phi^* f)(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}(f\circ\Phi)(r,\theta) = f'(\Phi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(r,\theta) \\
&= (\partial_1 f)(\Phi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) + (\partial_2 f)(\Phi(r,\theta))\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) \\
&= (\partial_1 f)(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) + (\partial_2 f)(\Phi(r,\theta))r\cos\theta
\end{aligned}$$

を得る。これらを古典的記法で

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

と表す。

　微分作用素にのみ注目して以下これらを

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

の様に表す事にする。(2) の両辺を r で割って (1) と共に行列表示すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。(3) の右辺に現れる行列は回転行列特に直交行列であるからその逆行列は転置行列である。よって

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{6}$$

を得る。

伸張の生成作用素　函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$ に対し $D(t)f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を $(D(t)f)(x, y) = f(e^t x, e^t y)$ で定める。定義より

- $D(0)f = f$
- $D(t+s)f = D(t)D(s)f,\ t, s \in \mathbb{R}$

となり $\{D(t); t \in \mathbb{R}\}$ は一径数群を成す。その生成作用素 D は

$$Df = \lim_{t\to 0} t^{-1}(D(t)f - f) = \frac{d}{dt}D(t)f\Big|_{t=0} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

より $D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ である。D の極座標表示は (1) より

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = r\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) = r\frac{\partial}{\partial r}$$

となる (勿論 (5),(6) の両辺に夫々 x, y を掛けた結果の和を取っても良い)。

回転の生成作用素　函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},\ \theta \in \mathbb{R}$ に対し $L(\theta)f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を $(L(\theta)f)(x) = f(R(\theta)x)$ で定める。定義より

- $L(0)f = f$
- $L(\theta+\varphi)f = L(\theta)L(\varphi)f,\ \theta,\ \varphi \in \mathbb{R}$

となり $\{L(\theta); \theta \in \mathbb{R}\}$ は一径数群を成す。その生成作用素 L は

$$Lf = \lim_{\theta\to 0} \theta^{-1}(L(\theta)f - f) = \frac{d}{d\theta}L(\theta)f\Big|_{\theta=0} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

より $L = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ である。L の極座標表示は (2) より

$$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = r\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

となる。(勿論 (5),(6) の両辺に夫々y, x を掛けた結果のの差を取っても良い)。

以上を纏めると次の様になる。

$$\begin{pmatrix} D \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = rR(-\theta)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = r^{-1}R(\theta)\begin{pmatrix} D \\ L \end{pmatrix}$$

これらの関係式は二次元の場合勾配作用素 (並進の生成作用素を並べたもの) と伸張・回転の生成作用素を並べたものとは回転 $R(\pm\theta)$ 及び相似変換 $r^{\mp 1}$ で繋がっている事を示している。

二階の微分作用素 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は極座標表示では夫々

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos\theta\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad + \frac{\sin\theta}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin\theta\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&\quad + \frac{\cos\theta}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}
\end{aligned}$$

となるのでラプラシアンは

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^1}
\end{aligned}$$

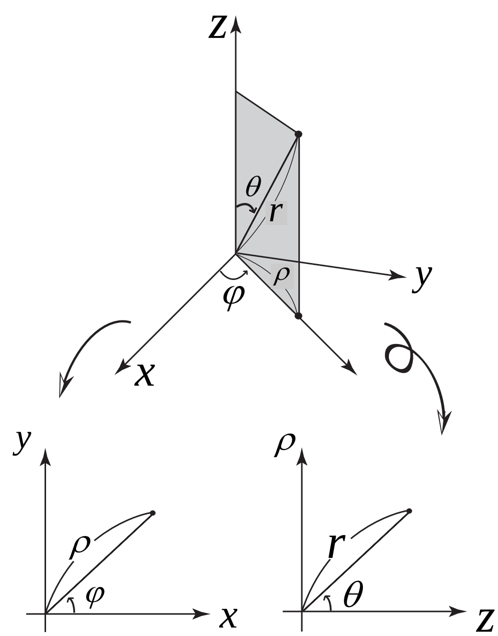
と表される。ここに $\Delta_{S^1} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ は単位円 S^1 上のラプラシアンである。

動径変数に関する微分作用素

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

はベッセル型である。

2. 三次元の場合



$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 Φ が
$\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ で定まる。$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は C^∞ 写像となる。z 軸から位置ベクトル (x,y,z) を測った角度 (z 軸と位置ベクトルとの成す角) が θ であり天頂角 (zenith) と謂う。位置ベクトル (x,y,z) と z 軸とを含む ρz 平面と xz 平面の成す角が φ であり方位角 (azimuth) と謂う。

　ここで $\rho = r\sin\theta$ とした。よって Φ は $z\rho$ 平面の (r,θ) 極座標変換

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto (z,\rho,\varphi) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \varphi)$$

と xy 平面の (ρ,φ) による極座標変換

$$(\rho,\varphi,z) \mapsto (x,y,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

の合成として表される。対応する微分作用素の変換は $z\rho$ 平面では

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

xy 平面では

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

となる。従って

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る。最後の三次正方行列は直交行列の積として表されるので直交行列であり逆行列は転置行列であるから

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}
$$

が成立つ (勿論この関係式を合成函数の微分法により直接確かめる事も出来る)。

これらの等式より次を得る。

$$
\begin{aligned}
r\frac{\partial}{\partial r} &= r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial z} \\
&= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y\frac{\partial}{\partial z} & -z\frac{\partial}{\partial y} \\ z\frac{\partial}{\partial x} & -x\frac{\partial}{\partial z} \\ x\frac{\partial}{\partial y} & -y\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -r\cos\theta & r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta & 0 & -r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -r\sin\varphi & -r\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & r\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & 0 & r\sin\varphi \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} & \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$r\frac{\partial}{\partial r}, y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ は夫々
伸張

$$(D(t)f)(x,y,z) = f(e^t x, e^t y, e^t z)$$

yz 平面に於ける回転

$$(L_1(\theta)f)(x,y,z) = f(x, y\cos\theta - z\sin\theta, y\sin\theta + z\cos\theta)$$

zx 平面に於ける回転

$$(L_2(\theta)f)(x,y,z) = f(z\sin\theta + x\cos\theta, y, z\cos\theta - x\sin\theta)$$

xy 平面に於ける回転

$$(L_3(\theta)f)(x,y,z) = f(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

の生成作用素である。$x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ は z 軸の回りの方位角 φ による回転の生成作用素に外ならない。

三つの微分作用素

$$L_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y},\ L_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z},\ L_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

は交換作用素 $[A,B] = AB - BA$ に就いて閉じている：

$$[L_1, L_2] = -L_3,\ [L_2, L_3] = -L_1,\ [L_3, L_1] = -L_2$$

二次元のラプラシアンの極座標表示により

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

となるので

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

を得る。(6) の y を ρ と見做せば

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

となるので三次元のラプラシアンは

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{\rho}\left(\sin\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}
\end{aligned}$$

と表される。ここに

$$\Delta_{S^2}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

は単位球面 S^2 上のラプラシアンである。

動径変数に関する微分作用素

$$\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$

は変換 $f\mapsto r^{\pm 1/2}f$ により

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\sqrt{r}f=\sqrt{r}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{4r^2}\right)f$$

の形でベッセル型に帰着される。

天頂角変数に関する微分作用素

$$\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

は変数変換 $\theta\mapsto\cos\theta=t$ により

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} &= -\sin\theta\frac{d}{dt}, \\
\sin\theta\frac{d}{d\theta} &= -\sin^2\theta\frac{d}{dt}=-(1-t^2)\frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)$$
$$=\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d}{dt}\right)=(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}-2t\frac{d}{dt}$$

と表され t 変数に関してルジャンドル型となる。

単位球面上のラプラシアンは次の様にも表される：

$$\Delta_{S^2}=L_1^2+L_2^2+L_3^2$$

この関係式は「球面上のラプラシアン」命題１の特別な場合であるが、次の様に直接計算する事によっても確かめられる。

$$L_1^2 = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+ \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$= \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}$$

$$+ \sin^2\varphi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\varphi(-\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$- \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$L_2^2 = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$- \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}$$

$$- \cos\varphi\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+ \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$L_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

$$= (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 1\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

参考文献： 杉浦光夫、解析入門 I、東京大学出版会
森毅、現代の古典解析、現代数学社
小澤徹、「球面上のラプラシアン」http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/laplacian.pdf