離散と連続

平成 19 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

数列とは $\mathbb{Z}$ の部分集合を定義域とする函数であるから、函数に対する様々な演算は数列に対する演算に反映される。ここでは大まかな対応を纏めておこう。$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする。

(実) 数列
$f : I \cap \mathbb{Z} \ni n \mapsto f(n) \in \mathbb{R}$

(実一変数) 函数
$f : I \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

差分
$f(n+1) - f(n)$

微分 (係数)
$f'(x) = \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x))/h$

積の差分
$$(fg)(n+1) - (fg)(n)$$
$$= (f(n+1) - f(n))g(n+1)$$
$$+ f(n)(g(n+1) - g(n))$$

Leibniz 則
$$(fg)'$$
$$= f'g + fg'$$

部分和 $(m, n \in I \cap \mathbb{Z})$
$$\sum_{k=n}^{m-1} f(k)$$

定積分 $([a, b] \subset I)$
$$\int_a^b f(x)dx$$

差分の部分和
$$\sum_{k=n}^{m-1} (f(k+1) - f(k)) = f(m) - f(n)$$

微分積分の基本公式
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Abel の変形
$$\sum_{k=n}^{m-1} (f(k+1) - f(k))g(k)$$
$$= f(m)g(m-1) - f(n)g(n)$$
$$- \sum_{k=n+1}^{m-1} f(k)(g(k) - g(k-1))$$

部分積分
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx$$
$$= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Abel の変形は冪級数の収束性を上げるのに良く用いられるが、この点は擬微分作用素、Fourier 積分作用素に於ける振動積分の収束性を上げるのに用いられる技法が部分積分である事を想起させる。級数と積分との関係で有用なのは、正項級数の収束・発散の判定に用いられる積分判定法であろう：

積分判定法　区間 $[1, \infty)$ で定義された非負値単調減少函数 f に対し無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

と広義積分

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)dx$$

とは収束・発散を共にする。

(証明)　$f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$ を重ね合わせた

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$ に依る。

次に部分和とそれに対応する定積分との差に就いて考えよう。部分積分による

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} f(x)dx &= -\int_k^{k+1} \frac{d}{dx}(k+1-x)\cdot f(x)dx \\
&= -\left[(k+1-x)f(x)\right]_k^{k+1} + \int_k^{k-1} (k+1-x)f'(x)dx \\
&= f(k) + \int_k^{k+1} (k+1-x)f'(x)dx
\end{aligned}$$

を重ね合わせた

$$\begin{aligned}
\int_n^{m} f(x)dx &= \sum_{k=n}^{m-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} f(k) + \sum_{k=n}^{m-1} \int_k^{k+1} (k+1-x)f'(x)dx
\end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned}\left|\int_n^m f(x)dx - \sum_{k=n}^{m-1} f(k)\right| &\le \sum_{k=n}^{m-1}\int_k^{k+1}(k+1-x)|f'(x)|dx \\ &\le \sum_{k=n}^{m-1}\int_k^{k+1}|f'(x)|dx \\ &= \int_n^m |f'(x)|dx\end{aligned}$$

を得る。$f' \le 0$ ならば最右辺は $f(n)-f(m)$ となるので、これより積分判定法が従う事になる。

部分和とそれに対応する定積分との関係に就いては所謂オイラー・マクローリンの公式が代表的である：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n}^{m-1} f(k) - \int_n^m f(x)dx \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{N}\frac{B_j}{j!}[f^{(j-1)}(x)]_n^m + (-1)^{N+1}\int_n^m \frac{B_N(x-[x])}{N!}f^{(N)}(x)dx\end{aligned}$$

ここに $\{B_j\}$ は

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j\frac{x^j}{j!}$$

で定まるベルヌイ数であり B_n は

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j x^{n-j}$$

で定まるベルヌイ多項式である。

参考文献： 森毅、現代の古典解析、現代数学社、1970
藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學第一巻、内田老鶴圃、1934