双対空間

平成 26 年 10 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ベクトル空間の双対空間に就いて基本的な事項を纏めて置こう。係数体 K は実数体 $\mathbb{R}$ 又は複素数体 $\mathbb{C}$ とする。

1．双対空間の定義

X を K 上のベクトル空間とする。X 上の函数 $\ell : X \to K$ は線型構造を保存する時、即ち任意の $a, b \in K$ 及び任意の $x, y \in X$ に対し等式 $\ell(ax + by) = a\ell(x) + b\ell(y)$ を満たす時、**線型形式** linear form と謂う。X 上の線型形式 ℓ, m 及び $a, b \in K$ に対し各点 $x \in X$ 毎に $(a\ell+bm)(x) = a\ell(x)+bm(x)$ と定める事に拠って函数 $a\ell+bm : X \ni x \mapsto (a\ell+bm)(x) \in K$ が定まり $c, d \in K$ 及び $x, y \in X$ に対し、等式

$$
\begin{aligned}
(a\ell + bm)(cx + dy) &= a\ell(cx + dy) + bm(cx + dy) \\
&= a(c\ell(x) + d\ell(y)) + b(cm(x) + dm(y)) \\
&= c(a\ell(x) + bm(x)) + d(a\ell(x) + bm(y)) \\
&= c(a\ell + bm)(x) + d(a\ell + bm)(y)
\end{aligned}
$$

が成立つので $a\ell + bm$ も線型形式となる。これより X 上の線型形式全体にベクトル空間の構造が入る。このベクトル空間 $L(X; K)$ を X^* と表し X の**双対空間** dual space と謂う。X はベクトル空間であるから基底 $(e_i; i \in I)$ を持つ。各 $i \in I$ に対し $e_i^* \in X^*$ が

$$
e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}
$$

更には $x = \sum_{j\in J} c_j e_j$ ($c_j \in K, J$ は I の有限部分集合) に対し

$$
e_i^*(x) = \begin{cases} c_i, & i \in J \\ 0, & i \in I \setminus J \end{cases}
$$

と定義する事に拠って定まる。この時 $(e_i^*; i \in I)$ はベクトル空間 X^* の独立系を成す。実際 I の有限部分集合 J と $(c_j; j \in J)$ に因って $\sum_{j\in J} c_j e_j^* = 0$ なる関係が在ったとすると任意の $i \in J$ に対し $0 = \left(\sum_{j\in J} c_j e_j^*\right)(e_i) = \sum_{j\in J} c_j e_j^*(e_i) = c_i$ となるからである。I が有限なら、即ち

$\dim X = \sharp I < \infty$ なら $(e_i^*; i \in I)$ は X^* の生成系となる。実際任意の $\ell \in X^*$ を取り任意の $x \in X$ を

$$x = \sum_{i \in I} c_i e_i = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i$$

と表すと

$$\ell(x) = \ell\left(\sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i\right) = \sum_{i \in I} e_i^*(x) \ell(e_i) = \left(\sum_{i \in I} \ell(e_i) e_i^*\right)(x)$$

を得るので等式

$$\ell = \sum_{i \in I} \ell(e_i) e_i^*$$

が成立つからである。従って特に $\dim X^* = \dim X = \sharp I < \infty$ なる関係が従う。

2．二重双対空間と求値写像

ベクトル空間 X^* の双対空間 $(X^*)^* = L(X^*; K) = L(L(X; \mathbb{R}); K)$ を X^{**} と表し X の**二重双対空間** 又は**双双対空間** bidual space と謂う。即ち $\xi \in X^{**}$ とは任意の $a, b \in K$ 及び $\ell, m \in K^*$ に対し $\xi(a\ell + bm) = a\xi(\ell) + b\xi(m)$ を満たす X^* 上の函数 $\xi : X^* \to K$ の事である。X の元 x を一つ取り $\ell \in X^*$ に対し $\xi_x(\ell) = \ell(x)$ と置くと函数 $\xi_x : X^* \ni \ell \mapsto \xi_x(\ell) \in K$ が定まる。任意の $a, b \in K$ 及び $\ell, m \in X^*$ に対し

$$\xi_x(a\ell + bm) = (a\ell + bm)(x) = a\ell(x) + bm(x) = a\xi_x(\ell) + b\xi_x(m)$$

となるので $\xi_x \in X^{**}$ が従う。また任意の $a, b \in K, x, y \in X, \ell \in X^*$ に対し

$$\xi_{ax+by}(\ell) = \ell(ax + by) = a\ell(x) + b\ell(y) = a\xi_x(\ell) + b\xi_x(\ell) = (a\xi_x + b\xi_y)(\ell)$$

が成立つので

$$\xi_{ax+by} = a\xi_x + b\xi_y$$

を得る。そこで $x \in X$ に対し $\mathrm{ev}(x) = \xi_x$ と置くと $\mathrm{ev}(ax + by) = \xi_{ax+by} = a\xi_x + b\xi_y = a\mathrm{ev}(x) + b\mathrm{ev}(y)$ となるので $\mathrm{ev} : X \to X^{**}$ は線型写像となる。ev を**求値写像** evaluation mapping と謂う。

命題 1　$\mathrm{ev} : X \to X^{**}$ は単射であり自然な埋め込み $X \hookrightarrow X^{**}$ を与える。X が有限次元なら ev は全射となり自然な同一視 $X = X^{**}$ を与える。

証明　任意に $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ev})$ を取る。このとき $\xi_x = \mathrm{ev}(x) = 0$ であり、これは任意の $\ell \in X^*$ に対し $\ell(x) = \xi_x(\ell) = 0$ である事と同値となる。さて、$x \neq 0$ であるとすると X の基底 $(e_i; i \in I)$ の添字集合 I から有限部分集合 $J \subset I$ 及び $c_j \neq 0 (\forall j \in J)$ なる $c_j \in K$ を取り $x = \sum_{j \in J} c_j e_j$ と表す事が出来る。そこで $\ell = \sum_{j \in J} c_j e_j^*$ と置くと $\ell(x) = \sum_{j \in J} c_j^2 \neq 0$ となる $\ell \in X^*$ が存在する事となり矛盾が生じる。従って $x = 0$ となり $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}) = \{0\}$ 即ち ev は単射となる。

さて、$\dim X < \infty$ ならば ev の単射性より

$$\dim \mathrm{Im}(\mathrm{ev}) = \dim X - \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}) = \dim X = \dim X^* = \dim(X^*)^* = \dim X^{**}$$

が従うので ev は全射となる。

3．双対写像と二重双対写像

ベクトル空間 X からベクトル空間 Y への線型写像全体の成すベクトル空間を $L(X;Y)$ と表す。$T \in L(X;Y)$ 及び $\ell \in Y^* = L(Y;K)$ に対し $\ell \circ T \in L(X;\mathbb{K}) = X^*$ が定まる。任意の $a, b \in K, \ell, m \in Y^*, x \in X$ に対し

$$((a\ell + bm) \circ T)(x) = (a\ell + bm)(T(x)) = a\ell(T(x)) + bm(T(x))$$

$$= a(\ell \circ T)(x) + b(m \circ T)(x) = (a(\ell \circ T)) + b(m \circ T))(x)$$

となるので

$$(a\ell + bm) \circ T = a(\ell \circ T) + b(m \circ T)$$

を得る。そこで $T^*(\ell) = \ell \circ T$ と置くと、この関係は

$$T^*(a\ell + bm) = aT^*(\ell) + bT^*(m)$$

と表され $T^* : Y^* \ni \ell \mapsto T^*(\ell) \in X^*$ は線型写像となる。即ち $T^* \in L(Y^*; X^*)$ となる。

任意の $a, b \in K$ 及び $T, S \in L(X;Y), \ell \in Y^*, x \in X$ に対し

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "T^*(\ell)"'] & Y \arrow[d, "\ell"] \\ & K \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(\ell \circ (aT + bS))(x) &= \ell((aT + bS)(x)) \\
&= \ell(aT(x) + bS(x)) \\
&= a\ell(T(x)) + b\ell(S(x)) \\
&= a(\ell \circ T)(x) + b(\ell \circ S)(x) \\
&= (a(\ell \circ T) + b(\ell \circ S))(x)
\end{aligned}$$

となるので

$$\ell \circ (aT + bS) = a(\ell \circ S) + b(\ell \circ T)$$

を得る。この関係は

$$(aT + bS)^*(\ell) = (aT^* + bS^*)(\ell)$$

と表され、これより $(aT + bS)^* = aT^* + bS^*$ を得る。故に $* : L(X;Y) \ni T \mapsto T^* \in L(Y^*; X^*)$ は線型写像となる。即ち $* \in L(L(X;Y); L(Y^*; X^*))$ となる。

さて $T \in L(X;Y)$ に対して $T^* \in L(Y^*; X^*)$ が定まった。この手続きをもう一回繰り返せば $T^* \in L(Y^*; X^*)$ から $T^{**} = (T^*)^* \in L((X^*)^*; (Y^*)^*) = L(X^{**}; Y^{**})$ が定まる事になる。即ち $\xi \in X^{**}$ に対し $T^{**}(\xi) = \xi \circ T^*$ と置いて $T^{**} \in L(X^{**}; Y^{**})$ が定まる。特に $x \in X$ として $\mathrm{ev}(x) = \xi_x \in X^{**}$ に作用させれば任意の $\ell \in Y^*$ に対し

$$(T^{**} \circ \xi_x)(\ell) = (\xi_x \circ T^*)(\ell) = \xi_x(T^*(\ell)) = \xi_x(\ell \circ T) = (\ell \circ T)(x) = \ell(T(x)) = \xi'_{T(x)}(\ell)$$

を得る。ここに最後の ξ'_y は $y \in Y$ に対し $\xi'_y(m) = m(y), m \in Y^*$ として得られる $\xi'_y \in Y^{**}$ を表すものとする。$\mathrm{ev} \in L(X; X^*)$ と同様に $\mathrm{ev}(y) = \xi'_y$ と表す事にすれば、等式 $T^{**} \circ \xi_x = \xi'_{T(x)}$ は $(T^{**} \circ \mathrm{ev})(x) = \mathrm{ev}(T(x))$ と同値となり、これは $T^{**} \circ \mathrm{ev} = \mathrm{ev} \circ T$ と表す事が出来る。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}} \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \end{array}$$

参考文献：

佐武一郎、線型代数学、裳華房
伊藤清三、小松彦三郎、解析学の基礎、岩波書店