指数函数の定義と基本的性質

平成19年10月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

$z \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ と置く。このとき次が成立つ。

命題

(1) $\exp : \mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(z) \in \mathbb{C}$ は解析的である。

(2) $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z'),\ z, z' \in \mathbb{C}$　　(指数法則)
$\exp(0) = 1$

(3) $\exp' = \exp$

(4) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(5) $\theta \in \mathbb{R}$ に対し $\cos(\theta) = \mathrm{Re}\exp(i\theta),\ \sin(\theta) = \mathrm{Im}\exp(i\theta)$ と置く。このとき

 (i) $(\cos|[0,\infty))^{-1}(\{0\})$ は最小元を持つ。この値の 2 倍を π とする:
 $\pi/2 = \min\{\theta \geq 0; \cos\theta = 0\}$.

 (ii) $\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i$

 (iii) $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$

(6) $\exp : \mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in (0, \infty)$ は狭義増加で全単射。

(7) $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \exp(i\theta) \in \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ は全射。

(8) $\mathbb{T}$ を $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ の成す乗法群とする。単位元は 1 である。写像 $x \mapsto \exp(ix)$ は加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{T}$ への準同型写像で、その核 ($\mathbb{T}$ の単位元 1 の逆像) は $2\pi\mathbb{Z}$ となる。よって準同型写像 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(ix) \in \mathbb{T}$ は同型写像 $\varphi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ を引き起こす。ここで $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ を $2\pi\mathbb{Z}$ で割った商群を表し、$\mathbb{R}$ から引き起こされる商位相を与える。このとき $\varphi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ は位相同型となる。$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $\arg z = \varphi^{-1}(z/|z|)$ と置き z の偏角と謂う。$\mathbb{C}^*$ を $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の成す乗法群とすると $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は連続な準同型写像となる。

(証明)　(1),(2),(3) に就いては多くの教科書に証明が記載されているので省略。

(6) の証明：　定義により $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ であるから $x \in \mathbb{R}$ に対し $\overline{\exp(x)} = \exp(\bar{x}) = \exp(x)$ となり $\exp(x) \in \mathbb{R}$ が従う。$x \geq 0$ とすれば定義により $\exp(x) \geq 1 + x > 0$ であり (2) により $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$ であるので $\exp(-x) > 0.$ よって $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ が従う。(3) より $\exp' = \exp$ であり、$\mathbb{R}$ 上 exp は正値なので exp は狭義増加、特に単射である。更に、$\exp(x) \geq 1+x \to \infty (x \to \infty)$ 及び $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} \leq (1+x)^{-1} \to 0 (x \to \infty)$ より $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ となる。

(5) の証明：　定義により $\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$(*) \qquad \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

であり (3) により $\dfrac{d}{d\theta}(\exp(i\theta)) = i\exp'(i\theta) = i\exp(i\theta)$ であるので再び定義により

$$\frac{d}{d\theta}(\exp(i\theta)) = i\exp(i\theta) = i(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta$$

となるので実部と虚部を比較する事により

$$\cos' = -\sin', \quad \sin' = \cos$$

を得る。

さて、$(*)$,(2) と関係式 $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ により

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = \exp(i\theta)\overline{\exp(i\theta)} = \exp(i\theta)\exp(-i\theta) = 1$$

が従うので $\cos(\mathbb{R}),\ \sin(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$ を得る。また (2) と定義により $\cos(0) = \mathrm{Re}\ \exp(0) = 1,\ \sin(0) = \mathrm{Im}\exp(0) = 0$ が従う。さて cos と exp の定義により

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= (\exp(i\theta) + \overline{\exp(i\theta)})/2 \\
&= (\exp(i\theta) + \exp(-i\theta))/2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1 + (-1)^n)\frac{(i\theta)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\theta^{4\ell}}{(4\ell)!} - \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\theta^{4\ell-2}}{(4\ell-2)!} \\
&= 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{\theta^2}{4\ell(4\ell-1)} - 1\right)\frac{\theta^{4\ell-2}}{(4\ell-2)!}
\end{aligned}$$

となり $0 \le \theta \le 2$ に対し $\dfrac{\theta^2}{4\ell(4\ell-1)} \le \dfrac{1}{\ell(4\ell-1)} < 1 (\ell \ge 1)$ なので $\cos(2) \le 1 + \left(\dfrac{4}{4\cdot 3} - 1\right)\dfrac{2^2}{2!} = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3} < 0$ となる。連続函数 $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\cos(0) = 1,\ \cos(2) \le -\dfrac{1}{3}$ を満たすので $\mathbb{R}$ に於ける区間 $\cos[0,2]$ は $0 \in \left[-\dfrac{1}{3}, 1\right] \subset \cos[0,2]$ なる包含関係を持ち、閉集合 $\cos^{-1}(\{0\})$ と有界閉区間 $[0,2]$ との交わり $\cos^{-1}(\{0\}) \cap [0,2]$ は有界閉集合となるので、その下限は最小値となる。それを $\pi/2$ と表す事にすると

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \inf\{\varphi \in [0,2]; \forall\theta \in [0,\varphi],\ \cos\theta > 0\} \\
&= \min\{\theta \in [0,2]; \cos(\theta) = 0\} = \min(\cos|[0,\infty))^{-1}(\{0\})
\end{aligned}
$$

なる関係式が従う。さて $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるので $\cos^2 + \sin^2 = 1$ により $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ となるが、区間 $[0,\pi/2)$ 上 $\sin' = \cos > 0$ かつ $\sin(0) = 0$ であるので $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ を得る。以上より $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上 $\sin$ は狭義単調増加、$\sin(0) = 0,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上 $\sin > 0$ である事が従う。これより $\cos' = -\sin$ なる関係を用いて $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上 $\cos$ は狭義単調減少、$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上 $\cos > 0$ である事が従う。また $(*)$ より $\exp\left(\dfrac{\pi}{2}i\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$、指数法則より $\exp(\pi i) = \left(\exp\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)\right)^2 = i^2 = -1,\ \exp\left(\dfrac{3\pi}{2}i\right) = \exp(\pi i)\exp\left(\dfrac{\pi}{2}i\right) = -i,\ \exp(2\pi i) = (\exp(\pi i))^2 = 1$ が従う。これより $z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z} : z - z' = 2m\pi i \Rightarrow \exp(z) = \exp(z')\exp(2m\pi i) = \exp(z')(\exp(2\pi i))^m = \exp(z')$.

次に「$\exp(z) = \exp(z') \Rightarrow z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$」を示そう。指数法則により「$\exp(z) = 1 \Rightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$」を示せば良い。$z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ と表すと $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy),\ \exp(\mathbb{R}) = (0,\infty),\ |\exp(iy)| = \sqrt{\exp(iy)\overline{\exp(iy)}} = \sqrt{\exp(iy)\exp(-iy)} = 1$ であるから $1 = |\exp(z)| = \exp(x)$ が従う。$\exp|\mathbb{R}$ は単射で $\exp(0) = 1$ なので $x = 0$ を得る。よって $z = iy$ となるので $y/2\pi \in \mathbb{Z}$ を示せば良い。$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z),\ z \in \mathbb{C}$ なる関係より「$0 < \theta < 2\pi \Rightarrow \exp(i\theta) \ne 1$」なる事を示せば良い。実際これより「$\exp(i\theta) = 1,\ \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \theta = 0$ または 2π」となるからである。さて $0 < \theta/4 < \pi/2$ で $(0,\pi/2)$ 上 $\cos,\ \sin > 0$ なので $\cos(\theta/4),\ \sin(\theta/4) > 0$ であり $\cos^2(\theta/4) + \sin^2(\theta/4) = 1$ であるから $\exp(i\theta/4) = \cos(\theta/4) + i\sin(\theta/4)$ は $\pm 1,\ \pm i$ を取らない。$\exp(i\theta) = (\exp(i\theta/4))^4$ であり $z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$ なる関係から $\exp(i\theta) = 1 \Leftrightarrow \exp(i\theta/4) \in \{\pm 1\} \cup \{\pm i\}$ を得るので $\exp(i\theta) \ne 1$ となる。これが示すべき事であった。

(7) の証明： $|z| = 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(i\theta) = z$ なる $\theta \in \mathbb{R}$ の存在を示せば良い。$z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$ と表すと $x^2 + y^2 = 1$ である。
次の 4 つの場合に分けて考える : (i) $x \ge 0,\ y \ge 0$ (ii) $x \ge 0,\ y < 0$ (iii) $x < 0,\ y \ge 0$ (iv) $x < 0,\ y < 0$

(i) $x \ge 0,\ y \ge 0$ **の場合：** $\cos$ は $[0,\pi/2]$ 上狭義単調減少で $0 = \cos(\pi/2) < \cos(0) = 1$ であるので $\cos(\theta) = x$ なる $\theta \in [0,\pi/2]$ が唯一つ存在する。$[0,\pi/2]$ 上 $\sin \ge 0$ なので

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-x^2} = y$ となり $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = x + iy = z$ を得る。

(ii) $x \geq 0,\ y < 0$ **の場合:** $x+iy$ の代わりに $-y+ix$ を考えると (i) により $\exp(i\varphi) = -y+ix$ なる $\varphi \in [0, \pi/2)$ が唯一つ存在する。このとき $\exp\left(i\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \exp(i\varphi)\exp\left(\frac{3\pi}{2}i\right) = (-y+ix)(-i) = x+iy$ なので $\theta \equiv \varphi + \frac{3\pi}{2}$ が求めるものである。

(iii) $x < 0,\ y \geq 0$ **の場合:** $x+iy$ の代わりに $y-ix$ を考えると (i) により $\exp(i\varphi) = y-ix$ なる $\varphi \in (0, \pi/2]$ が唯一つ存在する。このとき $\exp\left(i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp(i\varphi)\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = (y-ix)i = x+iy$ なので $\theta \equiv \varphi + \frac{\pi}{2}$ が求めるものである。

(iv) $x < 0,\ y < 0$ **の場合:** $x+iy$ の代わりに $-x-iy$ を考えると (i) により $\exp(i\varphi) = -x-iy$ なる $\varphi \in (0, \pi/2)$ が唯一つ存在する。このとき $\exp(i(\varphi+\pi)) = \exp(i\varphi)\exp(\pi i) = (-x-iy)(-1) = x+iy$ なので $\theta \equiv \varphi + \pi$ が求めるものである。

(4) の証明: $z = x+iy \in \mathbb{C}$ に対し $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy),\ (\exp(x), \exp(iy)) \in (0,\infty) \times \{z; |z| = 1\} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ なので $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が成立つ。よって $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \exp(\mathbb{C})$ を示せば良い。任意の $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し $|w| \in (0,\infty) = \exp(\mathbb{R})$ なので $x \in \mathbb{R}$ が存在して $|w| = \exp(x)$ となる。このとき $|w/|w|| = 1$ であるので、(7) により $w/|w| = \exp(iy)$ なる $y \in \mathbb{R}$ が存在する。さて $z = x+iy \in \mathbb{C}$ は $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = |w|(w/|w|) = w$ を満たすのでこれが求めるものである。

参考文献： H. カルタン「複素函数論」、岩波書店
Robert B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis Vol.1*, Pure and Applied Mathematics 82, Academic Press.