有限次元ベクトル空間における座標系

平成 23 年 6 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html
“Plot the new coordinates and cast the map aside,” Bad Religion

有限次元ベクトル空間に於いて、座標系の概念を導入し、ベクトルの座標表示及びその変換則、線型写像の行列表現及び表現行列の変換則を求めよう。ここでは係数体を $\mathbb{K}$ とし、(縦ベクトル表示による) 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ 及び $m \times n$ 行列の空間 $M(m,n;\mathbb{K})$ の基礎概念は自由に用いる事にする。

1. 有限ベクトル空間における座標系

X を n 次元ベクトル空間とする。X の順序付けられた基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を取る。このとき X の任意の $x \in X$ に対し n 個のスカラーから成る組 $(x_1, \cdots, x_n)$ が唯一つ定まり

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

と表される。各 i に対し $\lambda_i(x) = x_i$ と置くと函数 $\lambda_i : X \ni x \mapsto x_i \in \mathbb{K}$ が定まる。$x, y \in X$ 及び $a \in \mathbb{K}$ に対し

$$\begin{aligned} \lambda_i(x+y) &= \lambda_i(x) + \lambda_i(y) \\ \lambda_i(ax) &= a\lambda_i(x) \end{aligned}$$

となるから λ_i は線型である。$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ は $(e_1, \cdots, e_n)$ の双対基底 $(e_1^*, \cdots, e_n^*) \in X^* = L(X;\mathbb{K})$ に等しい。ここに X^* は X の双対空間、即ち X から $\mathbb{K}$ への線型写像の全体の成すベクトル空間であり $e_i^* : X \to \mathbb{K}$ は $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) なる唯一つの線型写像（線型形式、線型汎函数）である。実際 $\lambda_i(e_j) = \delta_{ij}$ であり線型写像は基底上での値で一意的に決定されるからである。以上より任意の $x \in X$ に対し

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$$

即ち X 上

$$\mathrm{id} = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(\cdot) e_i$$

が成立つ。$\mathscr{E} = {}^t(e_1^*, \cdots, e_n^*) : X \to \mathbb{K}^n$ 即ち $x \in X$ に対し

$$\mathscr{E}(x) = \begin{bmatrix} e_1^*(x) \\ e_2^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

として定まる線型写像を基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する**座標系**と謂う。X の元 x の座標系 $\mathscr{E}$ に関する**座標表示**とは $\mathbb{K}^n$ の元 $\mathscr{E}(x)$ であると定義する。$\mathscr{E}$ は線型同型写像である。$\mathbb{K}^n$ の標準基底を $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ 即ち

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (i \;, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

とすると $\mathscr{E}(e_i) = \mathbf{e}_i, \mathscr{E}^{-1}(\mathbf{e}_i) = e_i$ が成立つ。

2. (座標変換に関する) ベクトルの座標表示の変換則

n 次元ベクトル空間 X の二組の基底 $(e_1, \cdots, e_n), (e'_1, \cdots, e'_n)$ 及び付随する座標系 $\mathscr{E} = (e^*_1, \cdots, e^*_n), \mathscr{E}' = (e'^*_1, \cdots, e'^*_n)$ に対して一つのベクトルの座標表示がどの様に変換されるのか考えてみよう。先ず前節の議論により $\mathscr{E} : X \to \mathbb{K}^n$ 及び $\mathscr{E}' : X \to \mathbb{K}^n$ は線型同型写像であるから $\mathbb{K}^n$ 上の線型変換

$$\begin{aligned} P &= \mathscr{E} \circ (\mathscr{E}')^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ Q &= \mathscr{E}' \circ \mathscr{E}^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\mathscr{E}'"'] \arrow[dr, "\mathscr{E}"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rr, shift left, "P"] & & \mathbb{K}^n \arrow[ll, shift left, "Q"] \end{tikzcd}$$

を定義する事が出来る。各 i に対し $P(\mathbf{e}_i), Q(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{K}^n$ となるから、これらの縦ベクトルを左から順に並べたものを n 次正方行列と見做し

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= [P(\mathbf{e}_1) \mid P(\mathbf{e}_2) \mid \cdots\cdots \mid P(\mathbf{e}_n)] \\ \mathbb{Q} &= [Q(\mathbf{e}_1) \mid Q(\mathbf{e}_2) \mid \cdots\cdots \mid Q(\mathbf{e}_n)] \end{aligned}$$

と表し、その (i, j) 成分を夫々p_{ij}, q_{ij} として $\mathbb{P} = (p_{ij}), \mathbb{Q} = (q_{ij})$ と表す事にする。このとき

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathbf{e}_i &= [P(\mathbf{e}_1) \mid \cdots \mid P(\mathbf{e}_n)]\mathbf{e}_i = P(\mathbf{e}_i) \\ \mathbb{Q}\mathbf{e}_i &= [Q(\mathbf{e}_1) \mid \cdots \mid Q(\mathbf{e}_n)]\mathbf{e}_i = Q(\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

となり、行列としての線型写像 $\mathbb{P} : \mathbb{K}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbb{P}\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ 及び $\mathbb{Q} : \mathbb{K}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbb{Q}\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ は夫々 P 及び Q に $\mathbb{K}^n$ の標準基底上で一致するので任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ に対し $\mathbb{P}\mathbf{x} = P(\mathbf{x})$ 及び $\mathbb{Q}\mathbf{x} = Q(\mathbf{x})$ が成立つ。$\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbf{x} = P(\mathbb{Q}\mathbf{x}) = (P \circ Q)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 及び $\mathbb{Q}\mathbb{P}\mathbf{x} = Q(\mathbb{P}\mathbf{x}) = (Q \circ P)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ となるから $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ は互いに逆行列の関係を持つ事が分かる。

さて任意の $x \in X$ を取り二つの座標系 $\mathscr{E}$ 及び $\mathscr{E}'$ に関して座標表示し次の様に置く：

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$$

$$\mathscr{E}(x) = \begin{bmatrix} e_1^*(x) \\ e_2^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathscr{E}'(x) = \begin{bmatrix} e_1'^*(x) \\ e_2'^*(x) \\ \vdots \\ e_n'^*(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

このとき

$$\mathbb{P} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = P \left(\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \right) = P(\mathscr{E}'(x)) = \mathscr{E}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Q \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = Q(\mathscr{E}(x)) = \mathscr{E}'(x) = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

が成立つ。成分で表すとこれらは夫々

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j,$$
$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j$$

となる。二つの基底の関係は

$$e'_i = (\mathscr{E}')^{-1}(\mathbf{e}_i) = (\mathscr{E}^{-1} \circ P)(\mathbf{e}_i) = \mathscr{E}^{-1}(\mathbb{P}\mathbf{e}_i) = \mathscr{E}^{-1} \left(\begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \mathscr{E}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} \mathscr{E}^{-1}(\mathbf{e}_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j,$$

$$
\begin{aligned}
e_i &= \mathscr{E}^{-1}(\mathbf{e}_i) = ((\mathscr{E}')^{-1} \circ Q)(\mathbf{e}_i) = (\mathscr{E}')^{-1}(\mathbb{Q}\mathbf{e}_i) = (\mathscr{E}')^{-1}\left(\begin{bmatrix} q_{1i} \\ q_{2i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathscr{E}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{ji}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} q_{ji}\mathscr{E}^{-1}(\mathbf{e}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} q_{ji}e'_j
\end{aligned}
$$

となる。これらの関係を夫々

$$
\begin{aligned}
&(e'_1, \cdots, e'_n) = (e_1, \cdots, e_n)\ \mathbb{P}, \\
&(e_1, \cdots, e_n) = (e'_1, \cdots, e'_n)\ \mathbb{Q} = (e'_1, \cdots, e'_n)\mathbb{P}^{-1}
\end{aligned}
$$

と表す事がある。

双対基底 $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ 及び $(e_1'^*, \cdots, e_n'^*)$ の変換則も調べて置こう。e_j は

$$
e_j = \sum_{k=1}^{n} q_{kj}e'_k
$$

と表されるので $e_i'^*$ を両辺に作用させると

$$
e_i'^*(e_j) = e_i'^*\left(\sum_{k=1}^{n} q_{kj}e'_k\right) = \sum_{k=1}^{n} q_{kj}e_i'^*(e'_k) = \sum_{k=1}^{n} q_{kj}\delta_{ik} = q_{ij}
$$

となるから

$$
e_i'^*(x) = e_i'^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_je_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_je_i'^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_jq_{ij} = \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}e_j^*\right)(x)
$$

即ち

$$
e_i'^* = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}e_j^*
$$

を得る。同様に e'_j は

$$
e'_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}e_k
$$

と表されるので e_i^* を両辺に作用させると

$$
e_i^*(e'_j) = e_i^*\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}e_i^*(e_k) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\delta_{ik} = p_{ij}
$$

となるから

$$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n x'_j e'_j\right) = \sum_{j=1}^n x'_j e_i^*(e'_j) = \sum_{j=1}^n x'_j p_{ij} = \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} e'^*_j\right)(x)$$

即ち

$$e_i^* = \sum_{j=1}^n p_{ij} e'^*_j$$

を得る。

双対空間 X^* の任意の元 ω を一つ取り二つの基底 $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ 及び $(e'^*_1, \cdots, e'^*_n)$ で表して置く：

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i e_i^* = \sum_{i=1}^n \omega'_i e'^*_i$$

このとき成分の変換則を求めよう。双対基底の変換則より

$$\begin{aligned}
\omega =& \sum_{i=1}^n \omega_i e_i^* = \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} e'^*_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{ij}\omega_i\right) e'^*_j \\
=& \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ji}\omega_j\right) e'^*_i, \\
\omega =& \sum_{i=1}^n \omega'_i e'^*_i = \sum_{i=1}^n \omega'_i \left(\sum_{j=1}^n q_{ij} e^*_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n q_{ij}\omega'_i\right) e^*_j \\
=& \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{ji}\omega'_j\right) e_i
\end{aligned}$$

となるので係数を比較する事により

$$\begin{aligned}
\omega'_i =& \sum_{j=1}^n p_{ji}\omega_j \\
\omega_i =& \sum_{j=1}^n q_{ji}\omega'_j
\end{aligned}$$

を得る。

3. 線型写像の行列表現

X 及び Y を夫々 n 次元及び m 次元のベクトル空間とし、一組ずつ基底を定め夫々 $(e_1, \cdots, e_n)$ 及び $(f_1, \cdots, f_m)$ とする。付随する座標系を夫々 $\mathscr{E} = {}^t(e_1^*, \cdots, e_n^*) : X \to \mathbb{K}^n$, $\mathscr{F} = {}^t(f_1^*, \cdots, f_m^*) : Y \to \mathbb{K}^m$ とする。$\mathbb{K}^n$ の標準基底を前と同様に $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ とし $\mathbb{K}^n$ の標準基底を同様に $(\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_m)$ と表そう。定義により $\mathscr{F}(f_j) = \mathbf{f}_j, \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{f}_j) = f_j$ が従う。T を X から Y への線型写像とする。このとき $\mathscr{F} \circ T \circ \mathscr{E}^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ は線型写像であり各 i

に対し $(\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathbf{e}_i)\in\mathbb{K}^m$ となる。そこでこれらの縦ベクトルを左から順に並べたものを $m\times n$ 行列と見做し

$$\mathbb{T}=[(\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathbf{e}_1)\mid\cdots\cdots\mid(\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathbf{e}_n)]$$

と表し、その (i,j) 成分を t_{ij} として $\mathbb{T}=(t_{ij})$ と表す事にする。このとき

$$\mathbb{T}\mathbf{e}_i=(\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathbf{e}_i)$$

となり、行列としての線型写像 $\mathbb{T}:\mathbb{K}^n\ni\mathbf{x}\mapsto\mathbb{T}\mathbf{x}\in\mathbb{K}^m$ は $\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1}$ に $\mathbb{K}^n$ の標準基底上で一致するので任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{K}^n$ に対し $\mathbb{T}\mathbf{x}=(\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathbf{x})$ が成立つ。（以下では行列 $\mathbb{T}$ と線型写像 $\mathbf{x}\mapsto\mathbb{T}\mathbf{x}$ とを同一視する。）このとき

$$\begin{aligned}T(e_i)&=(\mathscr{F}^{-1}\circ\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathscr{E}(e_i))\\&=\mathscr{F}^{-1}((\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1})(\mathbf{e}_i))\\&=\mathscr{F}^{-1}(\mathbb{T}\mathbf{e}_i)=\mathscr{F}^{-1}\left(\begin{bmatrix}t_{1i}\\t_{2i}\\\vdots\\t_{mi}\end{bmatrix}\right)=\mathscr{F}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}t_{ji}\mathbf{f}_j\right)\\&=\sum_{j=1}^{m}t_{ji}\mathscr{F}^{-1}(\mathbf{f}_j)=\sum_{j=1}^{m}t_{ji}f_j\end{aligned}$$

が成立つ。この関係を $\mathscr{E}$ 及び $\mathscr{F}$ に依る T の行列表現 ($\mathbb{T}$ をその表現行列) と謂い

$$(T(e_1),\cdots,T(e_n))=(f_1,\cdots,f_m)\ \mathbb{T}$$

と表す事がある。以下では

$$\mathbb{T}=\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(T)=\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1}$$

と表す。$L(X;Y)$ から X を Y への線型写像全体の成すベクトル空間とし $M(m,n;\mathbb{K})$ を $m\times n$ 行列全体の成すベクトル空間とする。

命題　$\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$ は $L(X;Y)$ から $M(m,n;\mathbb{K})$ への線型同型写像である。

（証明）　線型性は $\mathscr{E}$ と $\mathscr{F}$ の線型性により

$$\begin{aligned}\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(aT+bS)&=\mathscr{F}\circ(aT+bS)\circ\mathscr{E}^{-1}\\&=a\mathscr{F}\circ T\circ\mathscr{E}^{-1}+b\ \mathscr{F}\circ S\circ\mathscr{E}^{-1}=a\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(T)+b\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(S)\end{aligned}$$

となる事から従う。単射性は $\mathscr{F}$ と $\mathscr{E}$ の全単射性より

$$\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(T)=0\Leftrightarrow T\circ\mathscr{E}^{-1}=0\Leftrightarrow T=0$$

となる事から従う。全射性は、与えられた $\mathbb{T}\in M(m,n;\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線型写像と見做し $T=\mathscr{F}^{-1}\circ\mathbb{T}\circ\mathscr{E}$ と置けば $T\in L(X;Y)$ であり $\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(T)=\mathbb{T}$ が成立つ事をより従う。

特別な場合として $X=Y, m=n, (e'_1,\cdots,e'_n)=(f_1,\cdots,f_m)$ として前節の座標系 $\mathscr{E}'$ を $\mathscr{F}$ と見做すと $T=\mathrm{id}$ の表現行列 $\mathbb{T}$ は前節の $\mathbb{Q}$ に等しい事が分かる。実際次の等式が成立つ：

$$\mathbb{Q}=\mathscr{E}'\circ\mathscr{E}^{-1}=\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}(\mathrm{id})$$
$$\mathbb{P}=\mathscr{E}\circ(\mathscr{E}')^{-1}=\mu_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{E}}(\mathrm{id})$$

4. 線型写像のディアド分解

X 及び Y を夫々 n 次元及び m 次元ベクトル空間とし、一組ずつ基底を定め夫々 $(e_1,\cdots,e_n)$ 及び $(f_1,\cdots,f_m)$ とする。付随する座標系を夫々 $\mathscr{E}={}^t(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ 及び $\mathscr{F}={}^t(f_1^*,\cdots,f_m^*)$ とする。T を X から Y への線型写像とする。このとき各 i に対し $T(e_i)\in Y$ であるから $\mathscr{F}$ で座標表示すると

$$T(e_i)=\sum_{j=1}^{m}f_j^*(T(e_i))f_j$$

となる。そこで $t_{ji}=f_j^*(T(e_i))$ と置く。$\mathbb{T}=(t_{ij})$ とした $m\times n$ 行列が T の $\mathscr{E},\mathscr{F}$ に関する表現行列であり

$$T(e_i)=\sum_{j=1}^{n}t_{ji}f_j$$
$$(T(e_1),\cdots,T(e_n))=(f_1,\cdots,f_m)\mathbb{T}$$

なる関係式が成立つ。さて任意の $x\in X$ は

$$x=\sum_{i=1}^{n}e_i^*(x)e_i$$

なる座標表示を持ち $T(x)\in Y$ は

$$T(x)=T\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^*(x)e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}e_i^*(x)T(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}t_{ji}e_i^*(x)f_j$$

と表されるから T は

$$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}t_{ij}e_i^*(\cdot)f_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f_j^*(T(e_i))e_i^*(\cdot)f_j$$

と分解される。線型写像

$$e_i^*(\cdot)f_j:\ X\ni x\mapsto e_i^*(x)f_j\in Y$$

を e_i^* と f_j の成すディアド dyad と謂う事にすれば、T に関する上の分解は線型写像 T の $\mathscr{E},\mathscr{F}$ に関するディアド分解と見做す事が出来る。

5. （座標変換に関する）線型写像の表現行列の変換則

n 次元ベクトル空間 X 及び m 次元ベクトル空間 Y に夫々二組の基底 $(e_1, \cdots, e_n), (e'_1, \cdots, e'_n)$ 及び $(f_1, \cdots, f_m), (f'_1, \cdots, f'_m)$ を取り、付随する二つの座標系 $\mathscr{E} = {}^t(e^*_1, \cdots, e^*_n)$, $\mathscr{E}' = {}^t(e'^*_1, \cdots, e'^*_n)$ 及び $\mathscr{F} = {}^t(f^*_1, \cdots, f^*_m), \mathscr{F}' = {}^t(f'^*_1, \cdots, f'^*_m)$ を夫々 X 及び Y に導入する。この節では X から Y への線型写像 T の行列表現が、座標系の組 $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ に関する表現行列 $\mu^{\mathscr{F}}_{\mathscr{E}}(T)$ と、もう一組の座標系の組 $\mathscr{E}', \mathscr{F}'$ に関する表現行列 $\mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{E}'}(T)$ との間でどの様に変換されるのか考えてみよう。成分表示を用いなれければ、その変換則は簡単に記述される：

命題

$$\mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{E}'}(T) = \mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{F}}(\mathrm{id}_Y) \circ \mu^{\mathscr{F}}_{\mathscr{E}}(T) \circ \mu^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_X)$$

（証明）

$$\begin{aligned}
\mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{E}'}(T) &= \mathscr{F}' \circ T \circ (\mathscr{E}')^{-1} \\
&= (\mathscr{F}' \circ \mathscr{F}^{-1}) \circ (\mathscr{F} \circ T \circ \mathscr{E}^{-1}) \circ (\mathscr{E} \circ (\mathscr{E}')^{-1}) \\
&= \mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{F}}(\mathrm{id}_Y) \circ \mu^{\mathscr{F}}_{\mathscr{E}}(T) \circ \mu^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_X)
\end{aligned}$$

上の命題を可換図式を用いて記述すれば右の様になる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mu^{\mathscr{F}}_{\mathscr{E}}(T)"] & & & \mathbb{K}^m \\
& X \arrow[ul, "\mathscr{E}"'] \arrow[r, "T"] \arrow[dl, "\mathscr{E}'"] & Y \arrow[ur, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "\mathscr{F}'"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, "\mu^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_X)"] \arrow[rrr, "\mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{E}'}(T)"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "\mu^{\mathscr{F}}_{\mathscr{F}'}(\mathrm{id}_Y)"']
\end{tikzcd}$$

また

$\mathbb{T}' = \mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{E}'}(T) = (t'_{ij})$

$\mathbb{P} = \mathscr{E} \circ (\mathscr{E}')^{-1} = \mu^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_X) = (p_{ij}) \in M(n, n; \mathbb{K})$

$\mathbb{Q} = \mathscr{E}' \circ \mathscr{E}^{-1} = \mu^{\mathscr{E}'}_{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_X) = (q_{ij}) \in M(n, n; \mathbb{K})$

$\mathbb{R} = \mathscr{F} \circ (\mathscr{F}')^{-1} = \mu^{\mathscr{F}}_{\mathscr{F}'}(\mathrm{id}_Y) = (r_{ij}) \in M(m, m; \mathbb{K})$

$\mathbb{S} = \mathscr{F}' \circ \mathscr{F}^{-1} = \mu^{\mathscr{F}'}_{\mathscr{F}}(\mathrm{id}_Y) = (s_{ij}) \in M(m, m; \mathbb{K})$

と置くと、上の命題の関係式より次の関係式が従う：

I. $\qquad \mathbb{T}' = \mathbb{R}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{P} = \mathbb{S}\mathbb{T}\mathbb{P}$

$$\begin{aligned}
(T(e'_1), \cdots, T(e'_n)) &= (f'_1, \cdots, f'_m)\mathbb{T}' \\
&= (f'_1, \cdots, f'_m)\mathbb{R}^{-1}\mathbb{T}\mathbb{P}
\end{aligned}$$

$$t'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} s_{ik} t_{k\ell} p_{\ell j}$$

II. $\mathbb{T} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{T}'\mathbb{R} = \mathbb{Q}\mathbb{T}\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(T(e_1), \cdots, T(e_n)) &= (f_1, \cdots, f_m)\mathbb{T} \\ &= (f_1, \cdots, f_m)\mathbb{P}^{-1}\mathbb{T}'\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} q_{ik}t'_{k\ell}r_{\ell j}$$

逆に座標変換に関する変換則を満たす行列の全体は線型写像を定める：

命題　X の基底全体の集合を I, Y の基底全体の集合を J とする。$M(m, n; \mathbb{K})$ の族 $(\mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}; \mathscr{E} \in I, \mathscr{F} \in J)$ は任意の $\mathscr{E}, \mathscr{E}' \in I$ 及び $\mathscr{F}, \mathscr{F}' \in J$ に対し変換則

$$\mathbb{T}_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{F}'} = \mu_{\mathscr{F}}^{\mathscr{F}'}(\mathrm{id}_Y)\mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}\mu_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{E}}(\mathrm{id}_X)$$

を満たすとする。このとき唯一つの $T \in L(X; Y)$ が存在し任意の $\mathscr{E} \in I, \mathscr{F} \in J$ に対し

$$\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(T) = \mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$$

を満たす。

（証明）　一組の $(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \in I \times J$ に対し　$T = \mathscr{F}^{-1} \circ \mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} \circ \mathscr{E} \in L(X; Y)$　と置く。
このとき任意の $(\mathscr{E}', \mathscr{F}') \in I \times J$ に対し

$$\begin{aligned}T &= \mathscr{F}^{-1} \circ \mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}} \circ \mathscr{E} = \mathscr{F}^{-1} \circ \mu_{\mathscr{F}'}^{\mathscr{F}}(\mathrm{id}_Y) \circ \mathbb{T}_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{F}'} \circ \mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}(\mathrm{id}_X) \circ \mathscr{E} \\ &= (\mathscr{F}')^{-1} \circ \mathbb{T}_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{F}'} \circ \mathscr{E}'\end{aligned}$$

となるから T は $(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \in I \times J$ の取り方に依らず定まる。更に

$$\mathscr{F} \circ T \circ \mathscr{E}^{-1} = \mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$$

となるから $\mu_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}(T) = \mathbb{T}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$ が従う。

参考文献：

M. Giaquinta and G. Modica, Mathematical Analysis, Linear and Metric Structures and Continuity, Birkhäuser.
佐武一郎，線型代数学，裳華房
岩堀長慶，ベクトル解析，裳華房