順序構造に基づく不動点定理

平成 28 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

不動点定理の代表的な例として**距離と完備性**に基づくもの (バナハの不動点定理等) や**コンパクト性**に基づくもの (ブラウワーの不動点定理やシャウダーの不動点定理等) の外に**順序構造と単調性**に基づくものが在る。ここでは主に Amann と Zeidler に従って、順序集合に於ける不動点定理を纏めて置こう。尚、ツォルンの補題 (及び同値な一連の命題) は用いず、「空でない任意の全順序部分集合が上限を持つ順序集合」の枠組で議論を進める。

１．順序集合

空でない集合 X は次の性質 (O1)-(O3) を満たす二項関係 $\le$ を持つとき **(半) 順序集合** ((partially) orderd set) であると謂い、二項関係 $\le$ を X 上の**順序** (order on X) と謂う

(O1) 任意の $x \in X$ に対し $x \le x$

(O2) $x, y \in X$ は $x \le y$ 且つ $y \le x$ なるとき $x = y$

(O3) $x, y, z \in X$ は $x \le y$ 且つ $y \le z$ なるとき $x \le z$

夫々(O1)、(O2)、(O3) の性質を順序 $\le$ が**反射的** (reflexive)、**反対称的** (antisymmetric)、**推移的** (transitive) であると謂う。$x < y$ とは $x \le y$ 且つ $x \ne y$ である事と定義する。$x \le y$ を $y \ge x$ と表したり $x < y$ を $y > x$ と表す事もある。X の任意の二つの元 x, y に対し $x \le y$ 又は $y \le x$ の何れかが常に成立つとき順序 $\le$ は X に於ける**全順序** (total order) 或は**線型順序** (linear order) であると謂い全順序を持つ順序集合を**全順序集合** (totally ordered set) 或は**線型順序集合** (linearly ordered set) と謂う。

定義　順序集合 X の元 x に対し

(1) x は X の**最大元** (greatest element) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $y \in X$ に対し $y \le x$

(2) x は X の**極大元** (maximal element) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $x < y$ なる $y \in X$ は存在しない

(3) x は X の**最小元** (least element) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $y \in X$ に対し $x \le y$

(4) x は X の**極小元** (minimal element) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $y < x$ なる $y \in X$ は存在しない

命題　順序集合 X に対し次が成立つ

(1) X の最大元 (が存在する場合) には一意的に定まる。

(2) X の最小元 (が存在する場合) には一意的に定まる。

(3) X の極大元 (が存在する場合) には一意的に定まる。

(4) X の極小元 (が存在する場合) には一意的に定まる。

(5) X の最大元 (が存在する場合) は唯一の極大元である。

(6) X の最小元 (が存在する場合) は唯一の極小元である。

(7) x が X の極大元である為の必要充分条件は
「$x \leq y$ なる $y \in X$ が存在したとすれば $y = x$」である。

(8) x が X の極小元である為の必要充分条件は
「$y \leq x$ なる $y \in X$ が存在したとすれば $y = x$」である。

(9) X が全順序集合ならば、最大元と極大元の概念及び最小元と極小元の概念は一致する。

(証明) (1) 最大元が二つあったとしてそれらを x と x' とする。x は X の最大元だから $x' \in X$ に対して $x' \leq x$ となる。同様に x' は X の最大元だから $x \in X$ に対して $x \leq x'$ となる。反対称律 (O2) より $x = x'$ が従う。

(2) (1) と同様である。

(3) x を極大元とし任意の $x' \in X \setminus \{x\}$ を取ると $x < x'$ では有り得ないので $x' < x$ となる。これは x' が極大元である事に反する。故に x は唯一の極大元である。

(4) (3) と同様である。

(5) x を最大元とすると任意の $y \in X$ に対し $y \leq x$ となるから (そうでない)$x < y$ なる元 $y \in X$ は存在しない。即ち x は極大元である。

(6) (5) と同様である。

(7) x は X の極大元

$\Longleftrightarrow$ $x < y$ なる $y \in X$ は存在しない

$\Longleftrightarrow$ $x \leq y$ なる $y \in X$ は存在したとすれば $x = y$ である。

(8) (7) と同様である。

定義　順序集合 X の空でない部分集合 A と一点 $x \in X$ に対し

(1) x は A の一つの**上界** (an upper bound for A) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $a \leq x$

(2) x は A の一つの**下界** (an lower bound for A) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $x \leq a$

(3) A は**上に有界** (bound from above) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A に対する上界が少なくとも一つ存在する

(4) A は**下に有界** (bound from below) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A に対する下界が少なくとも一つ存在する

(5) x は A の**上限** (the supremum of A) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ x は A の最小上界 (上界の成す集合の最小元)

(6) x は A の**下限** (the infimum of A) $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ x は A の最小下界 (下界の成す集合の最大元)

A の上限が存在するとき、その元を $\sup A$ と表し、下限が存在するときその元を $\inf A$ と表す。

命題　順序集合 X の空でない部分集合 A と $x \in X$ に対し次が成立つ。

(1) $x = \sup A$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) 任意の } a \in A \text{ に対し} \quad a \leq x \\ \text{(ii) } x' \in X \text{ は任意の } a \in A \text{ に対し } a \leq x' \text{を満たしているものとすると} \\ \qquad x \leq x' \end{cases}$$

(2) $x = \inf A$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) 任意の } a \in A \text{ に対し} \quad x \leq a \\ \text{(ii) } x' \in X \text{ は任意の } a \in A \text{ に対し } x' \leq a \text{ を満たしているものとすると} \\ \qquad x' \leq x \end{cases}$$

(証明) (1) (i) は x が一つの上界である事を意味し (ii) は x が全ての上界の成す集合の最小元である事を意味する。

(2) (1) と同様である。

定義　順序集合 X 及び $x_0 \in X$ に対し

$$X_+(x_0) = \{x \in X; x \geq x_0\}$$

を x_0 の**右切片** (the right section at x_0)

$$X_-(x_0) = \{x \in X; x \leq x_0\}$$

を x_0 の**左切片** (the left section at x_0) と謂い $a, b \in X$ に対し

$$[a, b] = X_+(a) \cap X_-(b) = \{x \in X; a \leq x \leq b\}$$

を a, b を端点とする**順序区間** (order interval between a and b) と謂う。

註． $[a,b] \neq \emptyset \Longleftrightarrow a \leq b$

定義 順序集合 X から順序集合 Y への写像 $f: X \longrightarrow Y$ は

$$x \leq y \text{ なる任意の } x, y \in X \text{ に対し } f(x) \leq f(y)$$

であるとき**単調** (monotone) 或は**単調増加** (monotone increasing) であると謂う。

註． 順序集合 X からそれ自身への単調写像 $f: X \longrightarrow X$ は

- $x_0 \leq f(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在すれば $f(X_+(x_0)) \subset X_+(x_0)$
- $f(x_0) \leq x_0$ なる $x_0 \in X$ が存在すれば $f(X_-(x_0)) \subset X_-(x_0)$

を満たす。実際

- $x_0 \leq f(x_0),\ x \in X_+(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow x_0 \leq f(x_0),\ x_0 \leq x \\
&\Longrightarrow x_0 \leq f(x_0),\ f(x_0) \leq f(x) \\
&\Longrightarrow x_0 \leq f(x) \\
&\Longleftrightarrow f(x) \in X_+(x_0)
\end{aligned}$$

- $f(x_0) \leq x_0,\ x \in X_-(x_0)$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow f(x_0) \leq x_0,\ x \leq x_0 \\
&\Longrightarrow f(x_0) \leq x_0,\ f(x) \leq f(x_0) \\
&\Longrightarrow f(x) \leq x_0 \\
&\Longleftrightarrow f(x) \in X_-(x_0)
\end{aligned}$$

従って $a \leq f(a)$ 且つ $f(b) \leq b$ ならば $f([a,b]) \subset [a,b]$ が成立つ。

定義 順序集合 X は任意の二点 $x, y \in X$ に対し二点集合 $\{x, y\}$ の上限 $\sup\{x, y\}$ 及び下限 $\sup\{x, y\}$ が (X の元として) 存在するとき**束** (lattice) と謂う。束 X はその任意の空でない部分集合が上限及び下限を (X の元として) 持つとき**完備** (complete) であると謂う。

註． 完備束は最大元及び最小元を持つ。実際 X の上限及び下限が X の元として存在し、それらが夫々最大元及び最小元となる。

２．ブルバキ・クネーザーの不動点定理

定理 (ブルバキ・クネーザーの不動点定理) X を順序集合で次の条件を満たすものとする：

(i)X の任意の空でない全順序部分集合は上限を持つ。

X からそれ自身への写像 f は次の条件を満たすものとする：

(ii) 任意の $x \in X$ に対し $x \leq f(x)$

このとき f は不動点を持つ。その不動点は次で与えられる。$x \in X$ に対し $\psi(x) = \sup \bigcap \mathscr{F}(x)$ と置く。ここに

$$\mathscr{F}(x) = \{M \subset X; M \text{ は } x \text{ を含み } f \text{ で不変で} \\ M \text{ の任意の空でない全順序部分集合は } M \text{ に上限を持つ}\}$$

とする。$\psi(x)$ は X の元として一意的に定まり f の不動点 $(f(\psi(x)) = \psi(x))$ となる。更に、任意の $x \in X$ に対し $x \leq \psi(x)$ を満たす。

(証明) X は空でないから一つの点を任意に取り x_0 とする。X の部分集合の族 $\mathscr{F}(x_0)$ を上の様に定義する。

即ち $M \in \mathscr{F}(x_0)$ とは次の三つの性質 (a)(b)(c) を満たすものである：

(a) $x_0 \in M$

(b) $f(M) \subset M$

(c) $\emptyset \neq C \subset M$ なる任意の全順序部分集合 C に対し $\sup C \in M$

さて (i) より $X \in \mathscr{F}(x_0)$ であるから $\mathscr{F}(x_0) \neq \emptyset$ が従う。$N = \bigcap \mathscr{F}(x_0) = \bigcap_{M \in \mathscr{F}(x_0)} M$ と置く。$x_0 \in N$ 故 $N \neq \emptyset$ となる。以下、簡単の為 $\mathscr{F}(x_0)$ を $\mathscr{F}$ と表す。

第１段　$N \in \mathscr{F}$ なる事を示そう。

(a) 任意の $M \in \mathscr{F}$ に対し $x_0 \in M$ であるから $x_0 \in N$

(b) $$\begin{aligned} x \in N &\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{F},\ x \in M \\ &\Rightarrow \forall M \in \mathscr{F},\ f(x) \subset f(M) \subset M \\ &\Rightarrow f(x) \in N \end{aligned}$$

(c) $\emptyset \neq C \subset N$ なる全順序部分集合を C とする。任意に $M \in \mathscr{F}$ を取る。$N \subset M$ 故 C は M の全順序部分集合であるから C の上限 $\sup C$ は M の元として存在する。M は任意であったから $\sup C \in N$ が従う。

第２段　$N \subset X_+(x_0)$ なる事を示そう。$X_+(x_0) \in \mathscr{F}$ を示せば充分である。

(a) 定義より $x_0 \in X_+(x_0)$ である。

(b) $x \in X_+(x_0) \Rightarrow x_0 \leq x \leq f(x) \Rightarrow f(x) \in X_+(x_0)$

(c) $\emptyset \neq C \subset X_+(x_0)$ なる全順序部分集合を C とする。C は X の全順序部分集合であるから $\sup C \in X$ が存在する。任意の $x \in C$ に対し $x_0 \leq x \leq \sup C$ であるから $\sup C \in X_+(x_0)$ が従う。

第３段　N の部分集合 O を

$$\begin{aligned} O &= \{x \in N; f(N_-(x) \setminus \{x\}) \subset N_-(x)\} \\ &= \{x \in N; y \in N,\ y < x \Rightarrow f(y) \leq x\} \end{aligned}$$

とし $x \in O$ に対し

$$\begin{aligned} N_x &= N_-(x) \cup N_+(f(x)) \\ &= \{y \in N; y \leq x \text{ 又は } f(x) \leq y\} \end{aligned}$$

と定める。任意の $x \in O$ に対し $N_x = N$ なる事を示そう。$N_x \in \mathscr{F}$ を示せば充分である。

(a) 第 1 段より $x_0 \in N$ である。$x \in O \subset N$ であり第 2 段より $N \subset X_+(x_0)$ であるので $x_0 \leq x$ が従う。故に $x_0 \in N_x$ となる。

(b) $y \in N_x$ を取る。$y \in N_x \subset N$ 及び $f(N) \subset N$ より $f(y) \in N$ となる。故に $f(y) \in N_x$ を示すには

「$f(y) \leq x$ 又は $f(x) \leq f(y)$」

を示せば良い。$y \in N_x$ であるから y は

(i) $y = x$　(ii) $y < x$　(iii) $f(x) \leq y$

の何れかを満たしている。

(i) なら $f(x) = f(y)$ より $f(x) \leq f(y)$ が従う。

(ii) なら $x \in O$ 故 $y < x$ より $f(y) \leq x$ が従う。

(iii) なら f の仮定より $y \leq f(y)$ となるから $f(x) \leq y \leq f(y)$ が従う。

(c) $\emptyset \neq C \subset N_x$ なる全順序部分集合を C とする。C は N の全順序部分集合であり第 1 段より $N \in \mathscr{F}$ であるから C の上限 $\sup C$ は N の元として存在する : $\sup C \in N$ 以下 $\sup C \in N_x$ なる事を示そう。任意の $y \in C \subset N_x$ は

「$y \leq x$ 又は $f(x) \leq y$」

を満たす。さて次の二つの場合

(i) $\forall y \in C,\ y \leq x$　(ii) $\exists y \in C : y > x$

の何れか一方が必ず成立している。

(i) なら $\sup C \leq x$ より $\sup C \in N_x$ が従う。

(ii) なら $y > x$ なる $y \in C$ は $f(x) \leq y$ を満たす事となる。このとき $y \in C$ 故 $f(x) \leq y \leq \sup C$ となり $\sup C \in N_x$ が従う。

以上が示すべき事であった。

第４段　$O = N$ なる事を示そう。$O \in \mathscr{F}$ を示せば充分である。

(a) 第 1 段より $x_0 \in N$ であり第 2 段より任意の $x \in N$ に対し $x_0 \leq x$ となる。即ち $x < x_0$ なる $x \in N$ は存在しないので $x_0 \in O$ となる。

(b) $x \in O$ を取る。$O \subset N$ 及び $f(N) \subset N$ より $f(x) \in N$ を得る。さて $y < f(x)$ なる任意の $y \in N$ を取る。このとき $f(y) \leq f(x)$ を示そう。$x \in O,\ y \in N = N_x$(第 3 段) より $y \leq x$ 又は $f(x) \leq y$ が成立する。$y \in N$ は $y < f(x)$ を満たしているので $f(x) \leq y$ が成立せず $y \leq x$ が従う。$y = x$ なら $f(y) = f(x) \leq f(x)$ となる。$y < x$ なら $x \in O,\ y \in N$ 故 O の定義より $f(y) \leq x$ が従う。f の性質より $x \leq f(x)$ となるので $f(y) \leq f(x)$ を得る。以上より $y < f(x)$ なる任意の $y \in N$ に対し $f(y) \leq f(x)$ が示された。これは $f(x) \in O$ を意味する。

(c) $\emptyset \neq C \subset O$ なる全順序部分集合を C とする。C は N の全順序部分集合で $N \in \mathscr{F}$ (第 1 段) であるから C の上限は N の元として定まる：$\sup C \in N$
$\sup C \in O$ なる事を示すには $y < \sup C$ なる任意の $y \in N$ に対し $f(y) \leq \sup C$ である事を示せば良い。その為、次の主張を示そう。

$\boldsymbol{y \leq x_1}$ なる $\boldsymbol{x_1 \in C}$ の存在： 任意に $x \in C \subset O$ を取る。第 3 段より $y \leq x$ 又は $f(x) \leq y$ となっている。全ての $x \in C$ に就いて $f(x) \leq y$ であったとすると $x \leq f(x)$ より $x \leq y$ が従い、これより $\sup C \leq y$ を得るが $y < \sup C$ に反する。従って全ての $x \in C$ に就いて $f(x) \leq y$ となり得ない。即ち $f(x_1) > y$ なる $x_1 \in C$ が存在する。この x_1 は ($f(x_1) \leq y$ を満たさないので)$y \leq x_1$ を満たす。

さて次の二つの場合に分けて議論する。

(i) $y = x_1$　 (ii) $y < x_1$

(i) $y = x_1$ の場合：先ず $y < x_2$ なる $x_2 \in C$ が存在する事を示そう。もしそうでないとすると C は全順序集合であり $y = x_1 \in C$ であるから「任意の $x \in C$ に対し $x \leq y$」である事になる。これより $\sup C \leq y$ を得るが $y < \sup C$ に反する。故に $y < x_2$ なる $x_2 \in C$ が存在する。$x_2 \in C \subset O$ で $y = x_1 \in C \subset N$ であるから (O の定義より)$y < x_2$ より $f(y) \leq x_2$ を得る。一方 $x_2 \leq \sup C$ であるから $f(y) \leq \sup C$ が従う。これが示すべき事であった。

(ii) $y < x_1$ の場合：$x_1 \in C \subset O$ であり $y < x_1$ であるから (O の定義より)$f(y) \leq x_1$ となる。一方 $x_1 \leq \sup C$ であるから $f(y) \leq \sup C$ が従う。これが示すべき事であった。

第 5 段　N は全順序部分集合を成す事を示そう。

$N = O$ であるから任意の $x,\ y \in N$ に対し第 3 段より $y \leq x$ 又は $f(x) \leq y$ となる。$f(x) \leq y$ なら $x \leq f(x)$ より $x \leq y$ が従う。以上より任意の $x,\ y \in N$ に対し $y \leq x$ 又は $x \geq y$ となる。

第 6 段　$u := \sup N$ が f の不動点である事を示そう。

$N \in \mathscr{F}$ で全順序部分集合であるから N は上限を N の元として持つ： $u = \sup N \in N$
このことを $f(N) \subset N$ より $f(u) \in N$ であるから $f(u) \leq \sup N = u$ となる。
一方 f の性質より $u \leq f(u)$ である。従って $f(u) = u$ となり u は f の不動点となる。更に $x_0 \in N$ 故 $x_0 \leq u$ が従う。

３．アマンの不動点定理

定理 (アマンの不動点定理)　X を順序集合で次の条件を満たすものとする：

(i) X の任意の空でない全順序部分集合は上限を持つ。

X からそれ自身への写像 f は次の条件を満たすものとする：

(ii) f は単調である (即ち $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$)。

(iii) $x_0 \leq f(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

このとき f は $X_+(x_0)$ の中に最小の不動点を持つ。

(証明) 第１段 (不動点の存在)

$M = \{x \in X;\ x \leq f(x),\ x_0 \leq x\}$ と置く。仮定 (iii) より $x_0 \in M$ であり $M \neq \emptyset$ となる。

$f(M) \subset M$ なる事：任意に $x \in M$ を取る。$x \leq f(x)$ 及び $x_0 \leq x$ が成立つ。

(ii) より $f(x) \leq f(f(x))$ 及び $f(x_0) \leq f(x)$ が従う。後者と (iii) より $x_0 \leq f(x_0) \leq f(x)$ であるから $f(x) \in M$ が成立つ。

M の空でない全順序部分集合は M に上限を持つ事：

$\emptyset \neq C \subset M$ なる全順序部分集合 C を取る。$C \subset X$ 故 (i) より $u := \sup C \in X$ が存在する。このとき任意の $x \in C$ に対し $x \leq u$ となり (ii) より $f(x) \leq f(u)$ が従う。$x \in C \subset M$ より $x \leq f(x)$ となるから $x \leq f(u)$ が従う。x は任意だったので $u \leq f(u)$ が従う。一方 $C \subset M$ より $x_0 \leq x$ であり $x \leq u$ であるから $x_0 \leq u$ が従う。これより $u \in C$ を得る。

以上より $f|M : M \longrightarrow M$ はブルバキ・クネーザーの不動点定理の仮定を満たしている。故に $f|M$ は M の中に不動点を持つ。特に f は不動点を持つ。

第２段 ($X_+(x_0)$ の中の最小不動点の存在)

$$M^* = \{x \in M; f(x) = x,\ x_0 \leq x\},\ N = \{y \in M; \forall x \in M^*,\ y \leq x\}$$

と置く。第 1 段より $M^* \neq \emptyset$ であり $x_0 \in N$ 故 $N \neq \emptyset$ となる。

$f(N) \subset N$ なる事：任意に $y \in N$ を取る。$N \subset M$ 故第 1 段より $f(y) \in f(N) \subset f(M) \subset M$ が従う。$y \in N$ であるから任意の $x \in M^*$ に対し $y \leq x$ である。(ii) より $f(y) \leq f(x)$ となり $x \in M^*$ 故 $f(x) = x$ となる。即ち任意の $x \in M^*$ に対し $f(y) \leq x$ が成立つ。これより $f(y) \in N$ が従う。

$\boldsymbol{N}$ の空でない全順序部分集合は $\boldsymbol{N}$ に上限を持つ事：
$\emptyset \neq C \subset N$ なる全順序部分集合 C を取る。$N \subset M$ 故 C は M の中に上限を持つ：
$u := \sup C \in M$
任意の $y \in C$ を取る。$C \subset N$ であるから任意の $x \in M^*$ に対し $y \leq x$ となり、これより $u \leq x$ が従う。これは $u \in N$ を意味する。

以上より $f|N : N \longrightarrow N$ はブルバキ・クネーザーの不動点定理の仮定を満たしており不動点 $x^* \in N$ を持つ。$N \subset M$ より $x_0 \leq x^*$ となるので $x^* \in M^*$ が従う。一方 $x^* \in N$ であるから任意の $x \in M^*$ に対し $x^* \leq x$ となる。これは x^* が $X_+(x_0)$ の中で最小である事を意味する。

系 (アマンの不動点定理の系)　X を順序集合で次の条件を満たすものとする：

(i) X の任意の空でない全順序部分集合は下限を持つ。

X からそれ自身への写像は次の条件を満たすものとする：

(ii) f は単調である (即ち $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$)。

(iii) $f(x_0) \leq x_0$ なる $x_0 \in X$ が存在する。

このとき f は $X_-(x_0)$ の中に最大の不動点を持つ。

４．応用

この節ではアマンの不動点定理から幾つかの不動点定理を導こう。

４．１　タルスキの不動点定理

定理 (タルスキの不動点定理)

完備束 X からそれ自身への単調写像は最小及び最大の不動点を持つ。

(証明) 完備束は最小元及び最大元を持つ。夫々$u = \min X = \inf X$ 及び $v = \max X = \sup X$ とすると $f(u),\ f(v) \in X$ 故 $u \leq f(u)$ 及び $f(v) \leq v$ を得る。従ってアマンの不動点定理及びその系より直ちに結論を得る。

４．２　直径縮小写像に関する不動点定理

定義　(空でない) 距離空間 (X, d) からそれ自身への写像 f が**直径縮小写像** (diametric contraction) であるとは $0 \leq k < 1$ なる $k \in \mathbb{R}$ が存在し $f(M) \subset M$ なる任意の $M \subset X$ に対し評価

$$\mathrm{diam}(f(M)) \leq k\ \mathrm{diam}(M)$$

が成立つ事を謂う。ここに diam(M) は $\boldsymbol{M}$ **の直径** (diameter of M) 即ち

$$\mathrm{diam}(M) = \sup\{d(x,y); x, y \in M\}$$

である。

例1．　縮小定数 $k \in [0,1)$ を持つ**縮小写像** (contraction) $f : X \longrightarrow X$ 即ち任意の $x, y \in X$ に対し評価

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$$

を満たす写像は直径縮小写像である。

例2．　縮小定数 $k \in [0,1)$ を持つ**準縮小写像** (quasi-contraction) $f : X \longrightarrow X$ 即ち任意の $x, y \in X$ に対し評価

$$d(f(x), f(y)) \leq k \max(d(x,y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x)))$$

を満たす写像は直径縮小写像である。

定理 (直径縮小写像に対する不動点定理)

(空でない) 有界な完備距離空間上の直径縮小写像は不動点を唯一つ持つ。

(証明) $f : X \longrightarrow X$ を有界な完備距離空間 X からそれ自身への直径縮小写像とし F_f を f の不動点の成す部分集合とする：$F_f = \{x \in X; f(x) = x\}$

一意性　$f(F_f) = F_f$ である。実際 $x \in F_f$ なら $f(f(x)) = f(x)$ 故 $f(x) \in F_f$ となり $x \in f(F_f)$ なら $y \in F_f$ が存在し $x = f(y)$ となり $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ 故 $x \in F_f$ となる。従って

$$\mathrm{diam}(F_f) = \mathrm{diam}(f(F_f)) \leq k\ \mathrm{diam}(F_f)$$

より

$$0 \leq (1-k)\mathrm{diam}(F_f) \leq 0$$

を得るので $\mathrm{diam}(F_f) = 0$ が従う。F_f が異なる二点 x, y を持ったとすると $\mathrm{diam}(F_f) \geq d(x,y) > 0$ となり矛盾を得る。従って F_f は多くとも一点を持つ。

存在　X の部分集合から成る族 $\mathscr{X}$ を

$$\begin{aligned}\mathscr{X} &= \{M \subset X; M \text{ は空でない } f \text{ 不変な閉集合}\} \\ &= \{M \subset X; \emptyset \neq M = \bar{M} \text{ 且つ } f(M) \subset M\}\end{aligned}$$

とし二項関係 $\leq$ を

$$M \leq N \underset{\mathrm{def.}}{\Leftrightarrow} M = N \text{ または } M \subset \overline{f(N)}$$

と定義する。

$(\mathscr{X}, \leq)$ は順序集合を成す事：

反射律：$M = N$ より $M \le M$ が従う。

反対称律：$M \le N$ 且つ $N \le M$ とする。次の 4 つの場合が起こる：

(i) $M = N$ 且つ $N = M$　　(ii) $M = N$ 且つ $N \subset \overline{f(M)}$

(iii) $M \subset \overline{f(N)}$ 且つ $N = M$　　(iv) $M \subset \overline{f(N)}$ 且つ $N \subset \overline{f(M)}$

(i)-(iii) の場合は直ちに $M = N$ となり (iv) の場合は

- $M \subset \overline{f(N)}$ 及び $\overline{f(N)} \subset \bar{N} = N$ 故　$M \subset N$
- $N \subset \overline{f(M)}$ 及び $\overline{f(M)} \subset \bar{M} = M$ 故　$N \subset M$

の双方より $M = N$ が従う。

推移律：$L \le M$ 且つ $M \le N$ とする。次の 4 つの場合が起こる：

(i) $L = M$ 且つ $M = N$　　(ii) $L = M$ 且つ $M \subset \overline{f(N)}$

(iii) $L \subset \overline{f(M)}$ 且つ $M = N$　　(iv) $L \subset \overline{f(M)}$ 且つ $M \subset \overline{f(N)}$

(i) の場合は $L = N$ となる。(ii) と (iii) の場合は $L \subset \overline{f(N)}$ となる。

(iv) の場合は

$$\overline{f(M)} \subset \bar{M} = M \text{ より } L \subset \overline{f(M)} \subset M \subset \overline{f(N)} \text{となる。}$$

以上より $L \le N$ が従う。

$\mathscr{X}$ の空でない全順序部分集合に対する下限の存在：

$\mathscr{C}$ を $\mathscr{X}$ の空でない全順序部分集合とする。$\mathscr{C}$ に最小元が在るとすれば下限となる。そこで $\mathscr{C}$ に最小元が存在しない場合を考える。従って任意の $C \in \mathscr{C}$ に対し $D \in \mathscr{C}$ が存在し $D < C$ となる。$\mathscr{C} \subset \mathscr{X}$ 故 $D \subset \overline{f(C)}$ となる。これより

$$\mathrm{diam}(D) \le \mathrm{diam}\overline{f(C)} = \mathrm{diam} f(C) \le k\ \mathrm{diam}(X)$$

が従う。$D \in \mathscr{X}$ 故 $\emptyset \ne D \subset \overline{f(C)} \subset \bar{C} \subset C$ が成立する。帰納的に $(C_n; n \ge 1) \subset \mathscr{C}$ で

$$\begin{gathered} C_n \ne \emptyset, \\ C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n, \\ \mathrm{diam}(C_n) \le k^n \mathrm{diam}(X) \end{gathered}$$

を満たすものが構成される。帰納的に $(x_n; n \ge 1) \subset X$ で $x_n \in C_n$ なる列を取る。このとき $m > n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$d(x_m, x_n) \le \mathrm{diam}(C_n) \le k^n \mathrm{diam}(X) \to 0$$

となるので X の完備性より (x_n) は極限 x を持つ。x は $x \in \bigcap_{n\geq 1} C_n$ を満たす。C は閉集合であるから $x \in C$ であり C は任意であったから $x \in \bigcap \mathscr{C}$ が従う。更にもう一つ $y \in \bigcap \mathscr{C}$ が在ったとすると $y \in \bigcap_{n\geq 1} C_n$ でもあるから

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \leq 2k^n \mathrm{diam}(X) \to 0$$

となり $x = y$ が従う。故に $\bigcap \mathscr{C} = \{x\}$ を得る。これより

$$\{f(x)\} = f(\bigcap \mathscr{C}) \subset \bigcap \{f(C); C \in \mathscr{C}\} \subset \bigcap \{C; C \in \mathscr{C}\} = \bigcap \mathscr{C} = \{x\}$$

及び

$$f(\bigcap \mathscr{C}) = \bigcap \mathscr{C} \in \mathscr{X}$$

を得る。この $\bigcap \mathscr{C}$ が $\mathscr{C}$ の下限である事を示そう。任意の $C \in \mathscr{C}$ を取る。$D \in \mathscr{C}$ が存在し $D < C$ となる。$\mathscr{C} \subset \mathscr{X}$ 故 $D \subset \overline{f(C)}$ となる。これより

$$\bigcap \mathscr{C} \subset D \subset \overline{f(C)}$$

即ち $\bigcap \mathscr{C} \leq C$ が従う。一方、任意の $C \in \mathscr{C}$ に対し $B \leq C$ なる $B \in \mathscr{X}$ を取ると $B = C$ または $B \subset \overline{f(C)}$ である。特に $B \subset C \cup \overline{f(C)} \subset C$ で $C \in \mathscr{C}$ は任意であったから

$$B \subset \bigcap \mathscr{C} = f(\bigcap \mathscr{C}) \subset \overline{f(\mathscr{C})}$$

となり $B \leq \bigcap \mathscr{C}$ が従う。即ち $\bigcap \mathscr{C} = \inf \mathscr{C}$ である。これが示すべき事であった。

***f* の不動点の存在：**

$M \in \mathscr{X}$ に対し $\varphi(M) = \overline{f(M)}$ と置く。$f(M) \subset M$ より $\overline{f(M)} \subset \bar{M} = M$ となるので

$$f(\varphi(M)) = f(\overline{f(M)}) \subset f(M) \subset \overline{f(M)} = \varphi(M)$$

が導かれる。また、$\varphi(M)$ は空でない閉集合であるから $\varphi(M) \in \mathscr{X}$ となる。即ち φ は $\mathscr{X}$ からそれ自身への写像である。更に

$$\begin{aligned} M < N &\iff M \subset \overline{f(N)} \\ &\implies \varphi(M) = \overline{f(M)} \subset \overline{f(\overline{f(N)})} = \overline{f(\varphi(N))} \\ &\implies \varphi(M) \leq \varphi(N) \end{aligned}$$

であり $M = N \Longrightarrow \varphi(M) = \varphi(N)$ であるから φ は単調である。また
$\varphi(X) = \overline{f(X)} \subset \overline{f(X)}$ より $\varphi(X) \leq X$ を得る。従って $\varphi : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{X}$ はアマンの不動点定理の系を満たす。故に φ の不動点 $M^* \in \mathscr{X}$ が存在する：$\varphi(M^*) = M^*$ 即ち $\overline{f(M^*)} = M^*$

これより

$$\mathrm{diam}(M^*) = \mathrm{diam}(\overline{f(M^*)}) = \mathrm{diam}(f(M^*)) \leq k\mathrm{diam}(M^*)$$

となり $\mathrm{diam}(M^*) = 0$ が従う。これは M^* が一点集合 $\{x^*\}$ である事を意味し $\{x^*\} = M^* = \overline{f(M^*)} = \overline{f(\{x^*\})} = \overline{\{f(x^*)\}} = \{f(x^*)\}$ より $x^* = f(x^*)$ が従う。即ち $x^* \in X$ は f の不動点である。

４．３　凝縮写像に対する不動点定理

定義　(X, d) を (空でない) 距離空間とする。X の空でない有界部分集合 M に対し

$$\begin{aligned}\kappa(M) &= \inf\{\varepsilon > 0; M \text{ は直径 } \varepsilon \text{ 以下の有限個の部分集合で被覆される }\} \\ &= \inf\{\varepsilon > 0; M \subset \bigcup_{i\in I} M_i,\ \sharp I < \infty,\ \mathrm{diam}(M_i) \le \varepsilon\}\end{aligned}$$

と置き**非コンパクト性 (クラトウスキ) 測度** ((Kuratowski) measure of noncompactness) と謂う。

命題　(X, d) を (空でない) 距離空間とする。X の空でない有界部分集合に対し次が成立つ。

(1) $0 \le \kappa(M) \le \mathrm{diam}(M)$

(2) $\kappa(M) = 0 \Longleftrightarrow M$ は全有界

(3) $M \subset N \Longrightarrow \kappa(M) \le \kappa(N)$

(4) $\kappa(M) = \kappa(\bar{M})$

(5) $\kappa(M \cup N) = \kappa(M) \vee \kappa(N)$

(証明) (1) M は M の一つの被覆である事から従う。

(2) M は全有界
$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists(x_i; i \in I) \subset M : \sharp I < \infty, M \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i; \varepsilon)$
$\Longleftrightarrow \kappa(M) = 0$

(3) N の被覆ならば M の被覆であり、下限を取る対象としては M の方が広い (狭くない) 為 $\kappa(M) \le \kappa(N)$ が従う。

(4) ・$M \subset \bar{M}$ であるから (3) より $\kappa(M) \le \kappa(\bar{M})$
・$M \subset \bigcup_{i\in I} M_i, \sharp I < \infty$ ならば $\bar{M} \subset \bigcup_{i\in I} \overline{M_i}, \mathrm{diam}(\overline{M_i}) = \mathrm{diam}(M_i)$
となるので $\kappa(\bar{M}) \le \kappa(M)$

(5) ・$M, N \subset M \cup N$ であるから (3) より $\kappa(M) \vee \kappa(N) \le \kappa(M \cup N)$
・任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(M_i; i \in I)$ 及び $(N_j; j \in J)$ が在って
$M \subset \bigcup_{i\in I} M_i, N \subset \bigcup_{j\in J} N_j, \sharp I < \infty, \sharp J < \infty,$
$\max_{i\in I} \mathrm{diam}(M_i) < \kappa(M) + \varepsilon,\ \max_{j\in J} \mathrm{diam}(N_j) < \kappa(N) + \varepsilon$

となる。このとき $M \cup N \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (M_i \cup N_j)$ であり

$$\begin{aligned}\kappa(M \cup N) &\le \max_{(i,j)\in I\times J}(\mathrm{diam}(M_i) \vee \mathrm{diam}(N_j)) \\ &\le (\kappa(M) \vee \kappa(N)) + \varepsilon\end{aligned}$$

が従う。$\varepsilon > 0$ は任意であったから $\kappa(M \cup N) \le \kappa(M) \vee \kappa(N)$

命題　X をノルム空間とする。X の空でない有界部分集合に対し次が成立つ。

(1) $\kappa(M+N) \le \kappa(M) + \kappa(N)$

(2) $\kappa(\alpha M) = |\alpha|\kappa(M),\ \alpha \in \mathbb{C}$

(3) $\kappa(M) = \kappa(\mathrm{co}(M)) = \kappa(\overline{\mathrm{co}}(M))$

ここに $\mathrm{co}(M)$ 及び $\kappa(\overline{\mathrm{co}}(M))$ は夫々 M の凸包及び閉凸包とする。

(証明) (1) $M \subset \bigcup_{i\in I} M_i, N \subset \bigcup_{j\in J} N_j, \sharp I < \infty, \sharp J < \infty$ とするとそのベクトル和として定まる $M+N$ は

$$M + N \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (M_i + N_j)$$

を満たす。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(M_i + N_j) &= \sup\{\|x-y\|; x, y \in M_i + N_j\} \\ &= \sup\{\|(x' + y'') - (y' + y'')\|; x', y' \in M_i, x'', y'' \in N_j\} \\ &\le \sup\{\|x' + y'\|; x', y' \in M_i\} + \sup\{\|x'' - y''\|; x'', y'' \in N_j\} \\ &= \mathrm{diam}(M_i) + \mathrm{diam}(N_j)\end{aligned}$$

が従う。

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(\alpha M_j) &= \sup\{\|x-y\|; x, y \in \alpha M_i\} \\ &= \sup\{\|\alpha x' - \alpha y'\|; x', y' \in M_i\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|x' - y'\|; x', y' \in M_i\} = |\alpha|\mathrm{diam}(M_i)\end{aligned}$$

より導かれる。

(3) $M \subset \mathrm{co}(M)$ 及び κ の閉包に対する性質より $\kappa(M) \le \kappa(\mathrm{co}(M)) = \kappa(\overline{\mathrm{co}}(M))$ が従うので $\kappa(\mathrm{co}(M)) \le \kappa(M)$ を示せば良い。初めに X の任意の有界部分集合 N に対し $\mathrm{diam}(N) = \mathrm{diam}(\mathrm{co}(N))$ なる事を示そう。$N \subset \mathrm{co}(N)$ より $\mathrm{diam}(N) \le \mathrm{diam}(\mathrm{co}(N))$ が従うので $\mathrm{diam}(\mathrm{co}(N)) \le \mathrm{diam}(N)$ を示せば良い。もしそうでない (即ち $\delta := \mathrm{diam}(N) < \mathrm{diam}(\mathrm{co}(N))$) とすると $x, y \in \mathrm{co}(N)$ が存在し $\delta < \|x-y\|$ が成立つ事となる。このとき次の二つの場合の何れか一つが必ず成立つ：

(i) $N \subset \overline{B(x;\delta)}$　　　　(ii) $N \not\subset \overline{B(x;\delta)}$

(i) の場合　$\mathrm{co}(N) \subset \overline{B(x;\delta)}$ より $y \in \overline{B(x;\delta)}$ が従うが、これは $\|x-y\| \le \delta$ を意味するので矛盾である。

(ii) の場合　$x_0 \in N$ が存在し $\|x-x_0\| > \delta$ となる。$x_0 \in N$ 及び δ の定義より $N \subset \overline{B(x_0;\delta)}$ が従い、これより $\mathrm{co}(N) \subset \overline{B(x_0;\delta)}$ を得る。故に $x \in \overline{B(x_0;\delta)}$ 即ち $\|x-x_0\| \le \delta$ を得るが、これは x_0 の条件に反する。

(i)(ii) 何れの場合も矛盾となるので $\mathrm{diam}(\mathrm{co}(N)) \le \mathrm{diam}(N)$ が成立つ。

任意の $\varepsilon > 0$ を与える。$(M_i; i \in I)$ が在って $\sharp I < \infty,\ M \subset \bigcup_{i\in I} M_i,$ $\max_{i\in I} \mathrm{diam}(M_i) < \kappa(M) + \varepsilon$ が成立つ。$\mathrm{diam}(M_i) = \mathrm{diam}(\mathrm{co}(M_i))$ となるから初めから M_i は凸であるとして良い。

さて

$$\Lambda = \{\lambda = (\lambda_i; i \in I); \lambda_i \ge 0\ \forall i \in I, \sum_{i\in I} \lambda_i = 1\},$$
$$M(\lambda) = \sum_{i\in I} \lambda_i M_i \subset X,\ \lambda \in \Lambda$$

と置く。このとき (1)(2) より

$$\kappa(M(\lambda)) \le \sum_{i\in I} \lambda_i \kappa(M_i) \le \sum_{i\in I} \lambda_i \mathrm{diam}(M_i) \le \max_{i\in I} \mathrm{diam}(M_i) < \kappa(M) + \varepsilon$$

が従う。次に $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M(\lambda)$ が凸である事を示そう。即ち

$$x, y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M(\lambda),\ 0 \le t \le 1 \implies tx + (1-t)y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M(\lambda)$$

を示そう。$x \in M(\lambda), y \in M(\mu)$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ を取る。このとき

$(\lambda_i; i \in I), (x_i; i \in I), (\mu_i; i \in I), (y_i; i \in I)$ が存在し

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i, \quad y = \sum_{i\in I} \mu_i y_i$$

と表される。いま ζ を

$$\zeta = t\lambda + (1-t)\mu$$

と定めると

$$\zeta = (\zeta_i; i \in I) = (t\lambda_i + (1-t)\mu_i; i \in I)$$

であり $t\lambda_i + (1-t)\mu_i \ge 0 (\forall i \in I)$ 且つ

$$\sum_{i\in I} (t\lambda_i + (1-t)\mu_i) = t\sum_{i\in I} \lambda_i + (1-t)\sum_{i\in I} \mu_i = t + (1-t) = 1$$

となるので $\zeta \in \Lambda$ となる。さて ρ_i を

$$\rho_i = \begin{cases} t\lambda_i/\zeta_i, & \zeta_i > 0 \text{ の場合} \\ 0, & \zeta_i = 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

と定めると $t\lambda_i \leq t\lambda_i + (1-t)\mu_i = \zeta_i$ 故 $0 \leq \rho_i \leq 1$ となる。このとき $\zeta_i \neq 0$ なる $i \in I$ に対し

$$\begin{aligned}\zeta_i(1-\rho_i) &= \zeta_i(1 - \frac{t\lambda_i}{\zeta_i}) \\ &= \zeta_i - t\lambda_i \\ &= (1-t)\mu_i\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}tx + (1-t)y &= \sum_{i \in I}(t\lambda_i x_i + (1-t)\mu_i y_i) \\ &= \sum_{i \in I} \zeta_i(\rho_i x_i + (1-\rho_i)y_i)\end{aligned}$$

が成立つ。各 M_i は凸と仮定したので $\rho_i x_i + (1-\rho_i)y_i \in M_i$ となり

$$tx + (1-t)y \in M(\zeta) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda)$$

が従う。これが示すべき事であった。

さて

$$M \subset \bigcup_{i \in I} M_i \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda)$$

であり最右辺は凸であるから

$$\mathrm{co}(M) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(\lambda)$$

が従う。$\bigcup_{i \in I} M_i \subset \overline{B(0;R)}$ なる $R > 0$ を取る。任意の $\varepsilon > 0$ と $\lambda \in \Lambda$ に対し $\sum_{i \in I} |\lambda_i - \mu_i| < \varepsilon/R$ なる $\mu \in \Lambda$ を取ると $M(\mu) \subset M(\lambda) + B(0;\varepsilon)$ となる。実際 $y \in M(\mu)$ に対し $y = \sum_{i \in I} \mu_i y_i (y_i \in M_i)$ と表し $x = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i$ と置くと $x \in M(\lambda)$ であり $y = x + (y-x)$ としたとき $y - x = \sum_{i \in I}(\mu_i - \lambda_i)y_i$ より $\|y-x\| \leq \sum_{i \in I} |\mu_i - \lambda_i| \|y_i\| \leq \sum_{i \in I} |\mu_i - \lambda_i| R < \varepsilon$ となるからである。故に任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し $\Lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B(\lambda;\delta)$ 且つ $|\lambda - \mu| < \delta$なる任意の$\mu \in \Lambda$に対し $M(\mu) \subset M(\lambda) + B(0;\varepsilon)$ が成立つ。Λ はコンパクトであるから有限個の $(\lambda^{(j)}; j \in J)$ を取って $\Lambda \subset \bigcup_{i \in J} B(\lambda^{(j)};\delta)$ と出来る。このとき

$$\mathrm{co}(M) \subset \bigcup_{j \in J}(M(\lambda^{(j)}) + B(0;\varepsilon))$$

が従う。故に命題　(3) 及び上の (1) より

$$\begin{aligned}\kappa(\mathrm{co}(M)) &\le \max_{j\in J}(\kappa(M(\lambda^{(j)})) + \kappa(B(0;\varepsilon)) \\ &\le \kappa(M) + \varepsilon + 2\varepsilon\end{aligned}$$

が従う。$\varepsilon > 0$ は任意であったから $\kappa(\mathrm{co}(M)) \le \kappa(M)$ を得る。

定義　距離空間 X, d からそれ自身への写像 $f : X \to X$ は $0 < k < 1$ なる定数 k が在って任意の有界集合 $M \subset X$ に対し不等式

$$\kappa(f(M)) \le k\kappa(M)$$

を満たすとき**集合縮小写像** (set contraction map) と謂う。また $f : X \to X$ は $\kappa(M) > 0$ なる任意の有界集合 $M \subset X$ に対し真の不等式

$$\kappa(f(M)) < \kappa(M)$$

を満たすとき**凝縮写像** (condensing map) と謂う。

例１．　縮小写像は集合縮小写像である。有界集合 M 及びその有限被覆 $(M_i; i \in I)$ を取る。$f(M) \subset f(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f(M_i)$ より $(f(M_i); i \in I)$ は $f(M)$ の有限被覆である。f が縮小写像ならば

$$d(f(x), f(y)) \le kd(x, y),\ x, y \in M_i$$

より

$$\mathrm{diam}(f(M_i)) \le k\ \mathrm{diam}(M_i)$$

を得る。従って

$$\begin{aligned}\kappa(f(M)) &= \inf\{\varepsilon > 0; f(M) \subset \bigcup_{j\in J} N_j, \sharp J < \infty, \mathrm{diam}(N_j) \le \varepsilon\} \\ &\le \inf\{\varepsilon > 0; M \subset \bigcup_{i\in I} M_i, \sharp I < \infty, \mathrm{diam}(f(M_i)) \le \varepsilon\} \\ &\le \inf\{\varepsilon > 0; M \subset \bigcup_{i\in I} M_i, \sharp I < \infty, \mathrm{diam}(M_i) \le \varepsilon/k\} \\ &= k\inf\{\varepsilon > 0; M \subset \bigcup_{i\in I} M_i, \sharp I < \infty, \mathrm{diam}(M_i) \le \varepsilon\} \\ &= k\kappa(M)\end{aligned}$$

が成立つ。

例２．　集合縮小写像は凝縮写像である。

例３．　ノルム空間 X からそれ自身への写像 $f : X \to X$ は縮小写像 g とコンパクト写像 h(即ち任意の有界集合に対しその像の閉包がコンパクトとなる連続写像) に依って

$f=g+h$ と表されているとすると f は集合縮小写像である。有界集合 M を取る。$f(M)=g(M)+h(M)$ であり例 1 に拠り

$$\kappa(g(M))\leq k\kappa(M)$$

で命題　(2)(4) より

$$\kappa(h(M))=\kappa(\overline{h(M)})=0$$

となる。従って命題　(1) より

$$\kappa(f(M))\leq\kappa(g(M))+\kappa(h(M))\leq k\kappa(M)$$

が成立つ。

定理 (凝縮写像に対するサドヴスキの不動点定理)

X をバナハ空間とする。空でない有界閉凸部分集合からそれ自身への連続凝縮写像は不動点を持つ。

(証明) M を空でない有界閉凸集合で $f:M\to M$ を連続凝縮写像とする。シャウダーの不動点定理が適用できる様に、空でないコンパクト集合 K を $K\subset M$ 且つ $f|K:K\to K$ なる様に構成する。

第 1 段　$x_0\in M$ を一つ取り

$$N=\{(\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ 個}})(x_0)\in M;k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

と置く。このとき $N=f(N)\cup\{x_0\}$ となるから

$$\kappa(N)=\kappa(f(N))\vee\kappa(\{x_0\})=\kappa(f(N))\vee 0=\kappa(f(N))$$

が従うが $\kappa(N)>0$ なら $\kappa(f(N))<\kappa(N)$ となってしまう為 $\kappa(N)=0$ 即ち N は全有界となる。$f(N)\subset N$ で f は連続故 $f(\bar{N})\subset\bar{N}$ が従う。

第 2 段　M の部分集合の族 $\mathscr{F}_0$ を

$$\mathscr{F}_0=\{F\subset M;\emptyset\neq F=\bar{F}\subset\bar{N}\}$$

とし $\mathscr{F}_0$ に $\subset$ で順序を導入する。$N\in\mathscr{F}_0$ 故 $\mathscr{F}_0\neq\emptyset$ となる。$\bar{N}$ はコンパクトであるから有限交叉性に依り $\mathscr{F}_0$ の任意の空でない全順序部分集合 $\mathscr{C}$ は下限 $\bigcap\mathscr{C}$ を持つ。

各 $F\in\mathscr{F}_0$ に対し $\varphi(F)=\overline{f(F)}$ と置く。このとき φ は $\mathscr{F}_0$ からそれ自身への写像で

$$\begin{aligned}F\leq F'\iff F\subset F'&\implies f(F)\subset f(F')\\&\implies\overline{f(F)}\subset\overline{f(F')}\iff\varphi(F)\leq\varphi(F')\end{aligned}$$

故 φ は単調である。また $\varphi(\bar{F}) = \overline{f(\bar{F})} = \overline{f(F)} \subset \bar{F}$ となるから $\varphi(\bar{F}) \geq \bar{F}$ を満たす。従ってアマンの不動点定理に拠り φ は $\mathscr{F}_0$ に不動点 F_0 を持つ。この F_0 は $\emptyset \neq F_0 = \overline{F_0} = \overline{f(F_0)} = f(F_0) \subset \bar{N}$ を満たす。

第３段　M の部分集合の族 $\mathscr{F}$ を

$$\mathscr{F} = \{F \subset M; F_0 \subset F = \bar{F}\}$$

とし $\mathscr{F}$ に $\subset$ で順序を導入する。$F_0 \in \mathscr{F}$ 故 $\mathscr{F} \neq \emptyset$ となる。$\bar{F}$ はコンパクトであるから有限交叉性に依り $\mathscr{F}$ の任意の空でない全順序部分集合 $\mathscr{C}$ は下限 $\bigcap \mathscr{C}$ を持つ。

各 $F \in \mathscr{F}$ に対し $\psi(F) = \overline{\mathrm{co}}(f(F))$ と置く。このとき ψ は $\mathscr{F}$ からそれ自身への写像で

$$\begin{aligned} F \leq F' \Longleftrightarrow F \subset F' &\Longrightarrow f(F) \subset f(F') \\ &\Longrightarrow \overline{\mathrm{co}}(f(F)) \subset \overline{\mathrm{co}}(f(F')) \Longleftrightarrow \psi(F) \leq \psi(F') \end{aligned}$$

故 ψ は単調である。更に

$$\psi(F_0) = \overline{\mathrm{co}}(f(F_0)) \geq \overline{f(F_0)} = \overline{F_0} = F_0$$

が成立つ。従ってアマンの不動点定理に拠り ψ は $\mathscr{F}$ に不動点を持つ。それを K とすると $K = \psi(K) = \overline{\mathrm{co}}(f(K))$ より

$$\kappa(K) = \kappa(\overline{\mathrm{co}}(f(K))) = \kappa(f(K))$$

が従う。$\kappa(K) > 0$ なら $\kappa(f(K)) < \kappa(K)$ と矛盾するので $\kappa(K) = 0$ が従う。即ち K はコンパクト集合となる。$f(K) \subset \overline{\mathrm{co}}(f(K)) \subset K$ 故 $f|K : K \to K$ はコンパクト凸集合 K からそれ自身への連続写像となる。従って $f|K$ は不動点を持つ。

４．４　非拡大写像に対する不動点定理

バナハ空間 X の空でない部分集合 M 上で定義された写像 $f : M \to X$ は任意の $x, y \in M$ に対し不等式

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

を満たすとき**非拡大写像** (nonexpansive map) と謂う。

不動点を持たない非拡大写像の例 : $X = c_0(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 即ち 0 に収束する数列 $x = (x_n; n \geq 0)$ の空間で

$$\|x\| = \sup\{|x_n|; n \geq 0\}$$

で与えられるノルムを持つバナハ空間を考え M をその閉単位球

$$M = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

とする。$x \in M$ に対し $y = f(x)$ を

$$y_0 = 1 - \|x\|, \quad y_n = x_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

とすると

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \sup\{|y_n|; n \geq 0\} \leq (1 - \|x\|) \vee \|x\| \leq 1, \\ \|f(x) - f(x')\| &= \sup\{|y_n - y_n{}'|; n \geq 0\} \\ &\leq \big|\|x\| - \|x'\|\big| \vee \|x - x'\| \leq \|x - x'\| \end{aligned}$$

を得るので f は M からそれ自身への非拡大写像である。もし f が不動点 $x \in M$ を持ったとすると $x = f(x)$ の各成分を比較し

$$x_0 = 1 - \|x\|, x_n = x_{n-1}(n \geq 1)$$

となり結局全ての $n \geq 0$ に対し

$$x_n = 1 - \|x\|$$

が成立つ事となり $x_n \to 0(n \to \infty)$ より $\|x\| = 1$ を得るが、これより全ての $n \geq 0$ に対し $x_n = 0$ となり $x = 0$ が従う。これは矛盾である。

　非拡大写像が不動点を持つ為には定義域に何らかの構造が必要になる事を上の例は示している。そこで次の概念を導入する。

定義　バナハ空間 X は少なくとも二つの点を持つ任意の閉凸部分集合 M が

$$\rho(M) := \inf_{y \in M} \sup_{x \in M} \|x - y\| \ < \ \mathrm{diam}(M)$$

を満たすとき**正規構造** (normal structure) を持つと謂う。

命題　一様凸バナハ空間は正規構造を持つ。

(証明) M を $d := \mathrm{diam}(M) > 0$ なる閉凸部分集合とする。$x, y \in M$ を $x \neq y$ なるものとし $\varepsilon = \|x-y\|/d$ とする。このとき $\eta_0 = (x+y)/2$ とおくと $\eta_0 \in M$ であり任意の $\xi \in M$ に対し

$$\frac{\xi - \eta_0}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi - x}{d} + \frac{\xi - y}{d}\right)$$

となる。さて

$$\left\|\frac{\xi - x}{d}\right\| \leq 1, \quad \left\|\frac{\xi - y}{d}\right\| \leq 1, \quad \left\|\frac{\xi - x}{d} - \frac{\xi - y}{d}\right\| = \left\|\frac{x - y}{d}\right\| = \varepsilon$$

となるから一様凸性より $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し

$$\frac{1}{d}\|\xi - \eta_0\| = \left\|\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - x}{d} + \frac{\xi - y}{d}\right)\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

が従う。これより

$$\|\xi - \eta_0\| \leq d(1 - \delta(\varepsilon))$$

となり $\xi \in M$ は任意であったから

$$\inf_{\eta \in M} \sup_{\xi \in M} \|\xi - \eta\| \leq \sup_{\xi \in M} \|\xi - \eta_0\| \leq d(1 - \delta(\varepsilon)) < d$$

を得る。

定理 (非拡大写像に対するカークの不動点定理)

正規構造を持つバナハ空間の空でない弱コンパクト凸部分集合からそれ自身への非拡大写像は不動点を持つ。

(証明) 正規構造を持つバナハ空間の空でない弱コンパクト凸集合を X とし $f : X \to X$ を非拡大写像とする。

第 1 段　M を $M \subset X$ なる空でない閉凸集合とし M のチェビシェフ中心 $\mathrm{Ceb}(M)$ を

$$\mathrm{Ceb}(M) := \{x \in M; \sup_{y \in M} \|x - y\| = \rho(M)\}$$

と定義する。$\mathrm{Ceb}(M)$ が空でない事を示そう。M の列 $(x_n; n \geq 1)$ を

$$\sup_{x \in M} \|x - x_n\| < \rho(M) + \frac{1}{n}$$

となる様に取る。M は閉凸集合であるから弱閉集合である。M は弱コンパクト集合 X の部分集合であるから弱コンパクトである。エベルラインの定理より M は弱点列コンパクトであるから部分列 $(x_{n_j}; j \geq 1)$ 及び $x^* \in M$ が存在し (x_{n_j}) は x^* に弱収束する。各 $x \in M$ に対し $(x - x_{n_j}; j \geq 1)$ は $x - x^*$ に弱収束するから

$$\|x - x^*\| \leq \liminf_{j \to \infty} \|x - x_{n_j}\| \leq \liminf_{j \to \infty} (\rho(M) + \frac{1}{n_j}) = \rho(M)$$

となる。$x \in M$ は任意であったから

$$\sup_{x \in M} \|x - x^*\| \leq \rho(M)$$

これより等式

$$\sup_{x \in M} \|x - x^*\| = \rho(M)$$

が従い $x^* \in \mathrm{Ceb}(M)$ を得る。

さて

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ceb}(M) &= \{x \in M; \sup_{y \in M} \|x - y\| = \inf_{\xi \in M} \sup_{\eta \in M} \|\xi - \eta\| = \rho(M)\} \\
&= \{x \in M; \sup_{y \in M} \|x - y\| \leq \rho(M)\} \\
&= \{x \in M; \forall y \in M, \|x - y\| \leq \rho(M)\} \\
&= \bigcap_{y \in M} \{x \in M; \|x - y\| \leq \rho(M)\}
\end{aligned}$$

であるから閉凸集合の共通部分として $\mathrm{Ceb}(M)$ も閉凸である。また $\mathrm{diam}(M) > 0$ ならば $\mathrm{diam}(\mathrm{Ceb}(M)) < \mathrm{diam}(M)$ なる事は次の様に正規構造より従う：

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(\mathrm{Ceb}(M)) &= \sup\{\|x - y\|; x, y \in \mathrm{Ceb}(M)\} \\
&\leq \rho(M) < \mathrm{diam}(M)
\end{aligned}$$

第２段　X の部分集合の族 $\mathscr{F}$ を

$$\mathscr{F} = \{F \subset X; \emptyset \neq F = \overline{\mathrm{co}}(F), f(F) \subset F\}$$

と定め包含関係 $\subset$ の逆で順序集合と見做す。$X \in \mathscr{F}$ 故 $\mathscr{F} \neq \emptyset$ である。空でない任意の全順序部分集合 $\mathscr{C} \in \mathscr{F}$ は (X の弱コンパクト性と $\mathscr{C}$ の有限交叉性より) 上限 $\bigcap \mathscr{C}$ を $\mathscr{F}$ に持つ。

各 $F \in \mathscr{F}$ に対し

$$\begin{aligned}
\varphi(F) &= \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(F))) \\
&= \{x \in \overline{\mathrm{co}}(f(F)); \sup_{y \in \overline{\mathrm{co}}(f(F))} \|x - y\| = \rho(\overline{\mathrm{co}}(f(F)))\}
\end{aligned}$$

と置く。$F \in \mathscr{F}$ とすると $\emptyset \neq f(F) \subset X$ 故 $\emptyset \neq \overline{\mathrm{co}}(f(F)) \subset X$ が成立ち第 1 段より $\emptyset \neq \overline{\mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(F)))} = \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(F)))$ となる。更に F は $\emptyset \neq F = \overline{\mathrm{co}}(F), f(F) \subset F$ より $\overline{\mathrm{co}}(f(F)) \subset \overline{\mathrm{co}}(F) = F$ を満たすので

$$f(\overline{\mathrm{co}}(f(F))) \subset f(F) \subset \overline{\mathrm{co}}(f(F))$$

が成立つ。任意に $x \in \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(F)))$ 及び $y \in \overline{\mathrm{co}}(f(F))$ を取る。$y \in \overline{\mathrm{co}}(f(F))$ 故任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(\lambda_i; i \in I) \subset \mathbb{R}, (x_i; i \in I) \subset F(\sharp I < \infty)$ が存在し $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i = 1,$

$\lambda_i \geq 0 (\forall i \in I),\ \|y - \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)\| < \varepsilon$ を満たす。このとき f の非拡大性より

$$\begin{aligned}
\|f(x) - y\| &\leq \|f(x) - \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)\| - \|\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) - y\| \\
&= \|\sum_{i\in I} \lambda_i (f(x) - f(x_i))\| + \|\sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) - y\| \\
&\leq \sum_{i\in I} \lambda_i \|f(x) - f(x_i)\| + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i\in I} \lambda_i \|x - x_i\| + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i\in I} \lambda_i \rho(\overline{\mathrm{co}}(f(F))) + \varepsilon = \rho(\overline{\mathrm{co}}(f(F))) + \varepsilon
\end{aligned}$$

が従う。$\varepsilon > 0$ は任意であったから

$$\|f(x) - y\| \leq \rho(\overline{\mathrm{co}}(f(F)))$$

を得る。これより

$$\sup_{y\in\overline{\mathrm{co}}(f(F))} \|f(x) - y\| \leq \rho(\overline{\mathrm{co}}(f(F)))$$

が従う。これは $f(x) \in \varphi(F)$ を意味する。従って

$$f(\varphi(F)) \in \varphi(F)$$

を得る。これより $\varphi(F) \in \mathscr{F}$ が従う。即ち φ は $\mathscr{F}$ からそれ自身への写像となる。さて任意の $F \in \mathscr{F}$ に対し $f(F) \subset F$ 故

$$\begin{aligned}
\varphi(F) &= \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(F))) \\
&\subset \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(F)) = \mathrm{Ceb}(F) \subset F
\end{aligned}$$

より $\varphi(F) \geq F$ が従う。よってブルバキ・クネーザーの定理より φ は不動点を $\mathscr{F}$ に持つ。それを $K \in \mathscr{F}$ としよう：

$$K = \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(K))).$$

いま $\mathrm{diam}(f(K)) > 0$ であったとすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(K) &= \mathrm{diam}(\mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(K)))) \\
&< \mathrm{diam}(\overline{\mathrm{co}}(f(K))) && (\text{第 1 段より}) \\
&= \mathrm{diam}(f(K)) \\
&\leq \mathrm{diam}(K) && (f\ \text{の非拡大性より})
\end{aligned}$$

が従い矛盾となる。故に $\mathrm{diam}(K) = 0$ 即ち $f(K)$ は一点集合 $f(K) = \{x^*\}$ となる。これより $\overline{\mathrm{co}}(f(K)) = \{x^*\}, \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(K))) = \{x^*\}, K = \mathrm{Ceb}(\overline{\mathrm{co}}(f(K))) = \{x^*\}$ が従う。これは $f(x^*) = x^*$ を意味する。

定理 (非拡大写像に対するブラウダー・ゲーデの不動点定理)

一様凸バナハ空間の空でない閉凸有界部分集合からそれ自身への非拡大写像は不動点を持つ。

(証明) 一様凸バナハ空間は反射的であるから閉凸有界部分集合は弱閉有界集合として弱コンパクトとなる。一様凸バナハ空間は正規構造を持つのでカークの不動点定理より結論を得る。

参考文献：

H. Amann, "Order Structures and Fixed Points," Seminario di Analisi Funzionali e Applicazioni, Università della Calabria, 1977

N. Bourbaki, *Sur le théorème de Zorn*, Arch. Math., **2** (1949-50), 434-437.

G.Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. **24** (1955), 84-92.

B. Fuchssteiner, *Iterations and fixpoints*, Pacific J. Math. **68** (1977), 73-80.

W.A.Kirk, *An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings*, Proc. AMS, **82** (1981), 640-642.

E. Zeidler, "Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems," Springer (1992).