単位環上の形式的冪級数

平成 19 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

R を単位元 e を持つ環、$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数の全体とし、$\mathscr{P}$ を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から R への写像の全体とする。$f, g \in \mathscr{P},\ a \in R$ に対し $af, f+g, fg \in \mathscr{P}$ が

$$
\begin{aligned}
(af)(n) &= af(n), \quad n \geq 0 \\
(f+g)(n) &= f(n) + g(n), \quad n \geq 0 \\
(fg)(n) &= \sum_{j=0}^{n} f(j)g(n-j), \quad n \geq 0
\end{aligned}
$$

で定まる。$\mathscr{P}$ の零元とは零写像、即ち

$$f = 0 \ \Leftrightarrow \ f(n) = 0 \ \forall n \geq 0$$

と定義する。以上により $\mathscr{P}$ は R 上の代数を成す。$a \in R$ に対し $\iota(a) \in \mathscr{P}$ が $(\iota(a))(0) = a,\ (\iota(a))(n) = 0\ (n \neq 0)$ で定まる。このとき $\iota : a \mapsto \iota(a)$ は R から $\mathscr{P}$ への準同型単射となる。実際 $a, b \in R$ に対し

$$(\iota(a+b))(n) = \left\{ \begin{array}{ll} a+b & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{array} \right\} = (\iota(a))(n) + (\iota(b))(n) = (\iota(a) + \iota(b))(n),$$

$$(\iota(ab))(n) = \left\{ \begin{array}{ll} ab & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{array} \right\} = (a\iota(b))(n) = (\iota(a)\iota(b))(n),$$

$$\iota(a) = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall n \geq 0,\ (\iota(a))(n) = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0$$

となるからである。ι は R から $\mathscr{P}$ への自然な埋め込みとなる。

$X \in \mathscr{P}$ を $X(1) = e,\ X(n) = 0 (n \neq 1)$ と定める。このとき $k \geq 1$ に対し $X^k(k) = e,\ X^k(n) = 0 (n \neq k)$ となる。実際 $k = 1$ の場合は X の定義自身であり、$k \geq 2$ に対し $X^{k-1}(k-1) = e,\ X^{k-1}(n) = 0\ (n \neq k-1)$ となっていると仮定すると

$$
\begin{aligned}
(X^k)(n) &= (XX^{k-1})(n) = \sum_{j=0}^{n} X(j)X^{k-1}(n-j) \\
&= X(1)X^{k-1}(n-1) = X^{k-1}(n-1)
\end{aligned}
$$

となり k に関する帰納法が成立する。さて $a \in R,\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(\iota(a)X^k)(k) = a,\ (\iota(a)X^k)(n) = 0\ (n \neq k)$ となるから ($k = 0$ の場合は $\iota(a)X^0 = \iota(a)$ と見做す)$f \in \mathscr{P}$ に対して

$$(\iota(f(k))X^k)(k) = f(k), \quad (\iota(f(k))X^k)(n) = 0\ (n \neq k)$$

が成立する。よって任意の n に対し

$$f(n) = \left(\sum_{k \geq 0} \iota(f(k)) X^k \right) (n)$$

と表す事が出来る (右辺の和は $n = k$ 以外は 0 を与える項となる)。

この等式を

$$f = \sum_{k \geq 0} (\iota \circ f)(k) X^k$$

と表す。また $\mathscr{P}$ を R 上の形式的冪級数の成す代数と謂い $R[[X]]$ と表す。$(\iota(e), X, X^2, \cdots, X^k, \cdots)$ は $R[[X]]$ の基底を成す。R 上の多項式の成す代数とは $R[[X]]$ の元で台が有限のものである：

$$R[X] = \{ f \in R[[X]] : \sharp\{n; f(n) \neq 0\} < \infty \}$$

参考文献： H. カルタン、複素函数論、岩波書店
彌永昌吉、小平邦彦、現代数学概説、岩波書店