ミンコフスキ空間に於ける自由波動方程式の基本解

平成 23 年 3 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ミンコフスキ時空に於ける自由波動方程式の基本解をフーリエ変換の方法で求めよう。考える方程式は

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$$

である。ここに u は $(1+n)$ 次元時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の実または複素数値函数で Δ は $\mathbb{R}^n$ に於けるラプラシアンとする。初期条件

$$u(0,x) = \phi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x)$$

を課し初期値問題として考える。ここに ϕ と ψ は $\mathbb{R}^n$ 上の実または複素数値函数とし、簡単の為、充分な滑らかさと無限遠点に於ける充分な減衰度を持つものとする。

1．初期値問題の解のフーリエ積分表示

この節では少し一般化して、連続函数 $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ による次の方程式を考えよう。

$$\partial_t^2 u + \omega^2(-i\nabla)u = 0$$

ここに $\omega^2(-i\nabla)$ は ω^2 を表象とするフーリエ乗法因子 Fourier multiplier $\omega^2(-i\nabla) = \mathscr{F}^{-1}\omega^2\mathscr{F}$ であるとする。波動方程式の場合は $\omega(\xi) = |\xi|$, 単位質量を持つクライン・ゴルドン方程式の場合は $\omega(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ であり ξ は x の双対変数（フーリエ変数）であるとする。ここにフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = (\mathscr{F}f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-ix\cdot\xi)dx, \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

と規格化したものとする。空間変数 x に就いてのみフーリエ変換した未知函数 $\hat{u}(t,\xi)$ を

$$\hat{u}(t,\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x) \exp(-ix\cdot\xi)dx$$

で定義すると、方程式は

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) + \omega^2(\xi)\hat{u}(t,\xi) = 0, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{\phi}(\xi), \ \partial_t \hat{u}(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi) \end{cases}$$

と書き換えられる。さて、この問題を時間変数 t に就いての線型常微分方程式と見做し

$$(\partial_t + i\omega(\xi))(\partial_t - i\omega(\xi))\hat{u}(t,\xi) = 0$$

と因数分解してみよう。作用素としての等式

$$\partial_t \pm i\omega(\xi) = e^{\mp it\omega(\xi)}\partial_t e^{\pm it\omega(\xi)}$$

より

$$\partial_t(e^{it\omega(\xi)}(\partial_t - i\omega(\xi))\hat{u}(t,\xi)) = 0$$

が成立つので

$$\begin{aligned} e^{it\omega(\xi)}(\partial_t - i\omega(\xi))\hat{u}(t,\xi) &= (e^{it\omega(\xi)}(\partial_t - i\omega(\xi))\hat{u}(t,\xi))|_{t=0} \\ &= \partial_t\hat{u}(0,\xi) - i\omega(\xi)\hat{u}(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi) - i\omega(\xi)\hat{\phi}(\xi) \end{aligned}$$

を得る。これを書き換えた等式

$$\partial_t(e^{-it\omega(\xi)}\hat{u}(t,\xi)) = e^{-2it\omega(\xi)}(\hat{\psi}(\xi) - i\omega(\xi)\phi(\xi))$$

を0から t 迄積分し

$$\begin{aligned} e^{-it\omega(\xi)}\hat{u}(t,\xi) - \hat{\phi}(\xi) &= \int_0^t e^{-2it'\omega(\xi)}(\hat{\psi}(\xi) - i\omega(\xi)\phi(\xi))dt' \\ &= \left[\frac{e^{-2it'\omega(\xi)}}{-2i\omega(\xi)}\right]_{t'=0}^{t'=t}(\hat{\psi}(\xi) - i\omega(\xi)\hat{\phi}(\xi)) \\ &= \frac{1 - e^{-2it\omega(\xi)}}{2i\omega(\xi)}(\hat{\psi}(\xi) - i\omega(\xi)\hat{\phi}(\xi)) \end{aligned}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) &= e^{it\omega(\xi)}\hat{\phi}(\xi) + \frac{e^{it\omega(\xi)} - e^{-it\omega(\xi)}}{2i\omega(\xi)}(\hat{\psi}(\xi) - i\omega(\xi)\hat{\phi}(\xi)) \\ &= \frac{e^{it\omega(\xi)} + e^{-it\omega(\xi)}}{2}\hat{\phi}(\xi) + \frac{e^{it\omega(\xi)} - e^{-it\omega(\xi)}}{2i\omega(\xi)}\hat{\psi}(\xi) \\ &= \cos(t\omega(\xi))\hat{\phi}(\xi) + \frac{\sin(t\omega(\xi))}{\omega(\xi)}\hat{\psi}(\xi) \end{aligned}$$

及び

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{it\omega(\xi)}\hat{\phi}_+(\xi) + e^{-it\omega(\xi)}\hat{\phi}_-(\xi)$$

を得る。ここに

$$\hat{\phi}_\pm(\xi) = \frac{1}{2}(\hat{\phi}(\xi) \pm \frac{1}{i\omega(\xi)}\hat{\psi}(\xi))$$

と置いた。フーリエ逆変換により解のフーリエ積分表示

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(\cos(t\omega(\xi))\hat{\phi}(\xi) + \frac{\sin t\omega(\xi)}{\omega(\xi)}\hat{\psi}(\xi))d\xi$$

及び

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi + t\omega(\xi))}\hat{\phi}_+(\xi)d\xi + (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - t\omega(\xi))}\hat{\phi}_-(\xi)d\xi$$

を得る。後者は平面波 $e^{i(x\cdot\xi\pm t\omega(\xi))}$ の振幅密度 $\hat{\phi}_\pm(\xi)$ に依る重み付き重ね合せによる積分表示と見做す事が出来る。ここに、任意の $c\in\mathbb{R}$ 及び $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し

$$H_\pm(t,\xi;c)\equiv\{x\in\mathbb{R}^n; x\cdot\xi\pm t\omega(\xi)=c\}$$

は $\mathbb{R}^n$ に於いて超平面を成す事に注意する。実際 $H_\pm(t,\xi;c)$ の任意の点 $x_0^\pm$ 例えば $x_0^\pm=\frac{\xi}{|\xi|^2}(\mp t\omega(\xi)+c)$ を取ると

$$H_\pm(t,\xi;c)=\{x\in\mathbb{R}^n;(x-x_0^\pm)\cdot\xi=0\}$$

と表されるからである。

解の一意性を強解の枠組で述べて置こう。$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$X^k=\{f\in\mathscr{S}';\omega^k(-i\nabla)f\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$\|f;X^k\|=\|\omega^k(-i\nabla)f;L^2\|$$

と定義する。以下 $\|\cdot\|$ を L^2 ノルムとする。

定理 1　$(\phi,\psi)\in X^1\times X^0$ を初期条件 $(u(0),\partial_t u(0))=(\phi,\psi)$ とし

$$\partial_t^2 u+\omega^2(-i\nabla)u=0,\quad t\in\mathbb{R}$$

を満たす解 $u\in C^2(\mathbb{R};X^0)\cap C^1(\mathbb{R};X^1)\cap C(\mathbb{R};X^2)$ は唯一つである。

（証明）　その様な解がもう一つ存在したとして v とし $w=u-v$ を考える。等式

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|\partial_t w(t)\|^2+\|\omega(-i\nabla)w(t)\|^2)\\
&=2\mathrm{Re}(\partial_t^2 w(t),w(t))+2\mathrm{Re}(\omega(-i\nabla)\partial_t w(t),\omega(-i\nabla)w(t))\\
&=2\mathrm{Re}(\partial_t^2 w(t)+\omega^2(-i\nabla)w(t),w(t))\\
&=0
\end{aligned}$$

を積分し

$$\|\partial_t w(t)\|^2+\|\omega(-i\nabla)w(t)\|^2=\|\partial_t w(0)\|^2+\|\omega(-i\nabla)w(0)\|^2=0$$

を得るので任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し

$$w(t)=w(0)+\int_0^t\partial_s w(s)ds=0$$

が従う。

２．方程式の一階化と力学系

前節の方程式

$$\partial_t^2 u + \omega^2(-i\nabla)u = 0$$

を一階化し、それに伴う力学系を考えよう。その為 $\dot{u} = \partial_t u$ として $(u, \dot{u})$ の成す力学系を考えるのは典型的な方法であろう。対応する一階化方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_t u \\ \partial_t^2 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ -\omega^2(-i\nabla)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-i\nabla) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

となり、右辺の行列の生成する一径数群を用いて、解は

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} &= \exp\left(t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-i\nabla) & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t\omega(-i\nabla)) & \omega(-i\nabla)^{-1}\sin(t\omega(-i\nabla)) \\ -\omega(-i\nabla)\sin(t\omega(-i\nabla)) & \cos(t\omega(-i\nabla)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

と表示される。

一方、波動函数の運動エネルギーに関する部分 $\dot{u}$ とポテンシャルエネルギーに関する部分 $\omega(-i\nabla)u$ に分解して $(\dot{u}, \omega(-i\nabla)u)$ の成す力学系を考えると対応する一階化方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \omega(-i\nabla)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2(-i\nabla)u \\ \omega(-i\nabla)\dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(-i\nabla) \\ \omega(-i\nabla) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \omega(-i\nabla)u \end{bmatrix}$$

となる。右辺の行列の生成する一径数群を用いた解の表示は

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u(t) \\ \omega(-i\nabla)u(t) \end{bmatrix} &= \exp\left(t\begin{bmatrix} 0 & -\omega(-i\nabla) \\ \omega(-i\nabla) & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \psi \\ \omega(-i\nabla)\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t\omega(-i\nabla)) & -\sin(t\omega(-i\nabla)) \\ \sin(t\omega(-i\nabla)) & \cos(t\omega(-i\nabla)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi \\ \omega(-i\nabla)\phi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となり、運動エネルギー部分 $\dot{u}(t)$ とポテンシャルエネルギー部分 $\omega(-i\nabla)u(t)$ とが運動量空間に於いて角速度 $\omega(\xi)$ の回転行列に依って時間発展する様子が記述される。回転は原点からの距離を保つ運動であり、この描像では等式

$$|\partial_t \hat{u}(t,\xi)|^2 + |\omega(\xi)\hat{u}(t,\xi)|^2 = |\hat{\psi}(\xi)|^2 + |\omega(\xi)\hat{\phi}(\xi)|^2$$

が距離の不変性を示すものとなる。左辺の第一項及び第二項は夫々運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーのフーリエ密度を表している。全運動量空間で上の等式を積分しパーセバルの等式に依り配位空間で表示すると全エネルギーの保存則

$$\|\partial_t u(t)\|^2 + \|\omega(-i\nabla)u(t)\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\omega(-i\nabla)\phi\|^2$$

が得られる。

3．ミンコフスキ空間に於ける自由波動方程式の解の表示（3 次元以下の場合）

以下 $\omega(\xi)=|\xi|$ とし自由波動方程式の初期値問題

$$(E)_n \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(0)=\phi,\ \partial_t u(0) = \psi \end{cases}$$

の解の具体的表示を求めよう。本節では $n = 1,2,3$ の場合を考える。基礎となる計算は $|\xi|^{-1}\sin t|\xi|$ 及び $\cos t|\xi|$ のフーリエ逆変換であるが後者は前者の時間変数に就いての導函数であるから前者のフーリエ逆変換を求める事が重要となる。

定理２　次は同値である。

(1)　任意の $\xi\in\mathbb{R}$ に対し

$$\frac{\sin\xi}{\xi}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-ix\xi}dx$$

(2)　任意の $\xi\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$\frac{\sin|\xi|}{|\xi|}=\frac{1}{2\pi}\int_{B^2}\frac{e^{-ix\cdot\xi}}{(1-|x|^2)^{1/2}}dx$$

ここに $B^2=\{x\in\mathbb{R}^2;|x|<1\}$

(3)　任意の $\xi\in\mathbb{R}^3$ に対し

$$\frac{\sin|\xi|}{|\xi|}=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}e^{-ix\cdot\xi}d\sigma(x)$$

ここに σ 単位球面 $S^2=\partial B^3=\{x\in\mathbb{R}^3;|x|=1\}$ 上のルベーグ測度である。

(4)　任意の $\phi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対し $(E)_1$ の解は

$$u(t,x)=\frac{1}{2}(\phi(x+t)-\phi(x-t))+\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x-ty)dy$$

と表される。

(5)　任意の $\phi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ に対し $(E)_2$ の解は

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{\phi(x-ty)}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy\right)+\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{\psi(x-ty)}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy$$

(6)　任意の $\phi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ に対し $(E)_3$ の解は

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\phi(x-ty)d\sigma(y)\right)+\frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\psi(x-ty)d\sigma(y)$$

と表される。

註1 (1) は右辺の積分を実行すれば得られる。

註2 (6) $\Rightarrow$ (5) はアダマールの変数低減法と見做される。

註3 (1) – (3) の左辺は $\xi = 0$ に於いて 1 であると見做す。

(証明) **(1) $\Rightarrow$ (2)**: 先ず $(x_1, x_2) \in B(0;1)$ に対し

$$\int_0^{(1-x_1^2)^{1/2}} \frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_2 = \left[\sin^{-1}\frac{x_2}{(1-x_1^2)^{1/2}}\right]_{x_2=0}^{x_2=(1-x_1^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}$$

である事に注意すると等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix_1\xi_1} dx_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{-ix_1\xi_1}\left(\int_0^{(1-x_1^2)^{1/2}} \frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_2\right) dx_1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x_1^2+x_2^2<1} \frac{e^{-ix_1\xi_1}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2\end{aligned}$$

が得られる。最左辺は (1) により

$$\frac{\sin\xi_1}{\xi_1} = \frac{\sin|\xi_1|}{|\xi_1|}$$

に等しいので任意の $\xi_1 \in \mathbb{R}$ に対し

$$\frac{\sin|\xi_1|}{|\xi_1|} = \frac{1}{2\pi}\int_{B^2} \frac{e^{-ix_1\xi_1}}{(1-|x|^2)^{1/2}} dx$$

が成立つ。任意の $\xi \in \mathbb{R}^2$ に対し $T\xi = (|\xi|, 0) \in \mathbb{R}^2$ なる $T \in O(2)$ を取ると

$$\begin{aligned}\frac{\sin|\xi_1|}{|\xi_1|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{B^2} \frac{e^{-ix_1|\xi|}}{(1-|x|^2)^{1/2}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{B^2} \frac{e^{-ix\cdot T\xi}}{(1-|x|^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{B^2} \frac{e^{-i({}^tTx)\cdot\xi}}{(1-|x|^2)^{1/2}} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{B^2} \frac{e^{-iy\cdot\xi}}{(1-|Ty|^2)^{1/2}} |\det T| dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{B^2} \frac{e^{-iy\cdot\xi}}{(1-|y|^2)^{1/2}} dy\end{aligned}$$

となるので (2) が従う。

(2) $\Rightarrow$ (1): 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ を取り (2) を $(\xi, 0) \in \mathbb{R}^2$ に対して適用すると

$$\begin{aligned}\frac{\sin\xi}{\xi} = \frac{\sin|\xi|}{|\xi|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{x_1^2+x_2^2<1} \frac{e^{-ix_1\xi}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{-ix_1\xi}\left(\int_0^{(1-x_2^2)^{1/2}} \frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_2\right) dx_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix_1\xi} dx_1\end{aligned}$$

となり (1) が従う。

(2) ⇒ (3): 任意の $\xi \in \mathbb{R}^3$ に対し $T\xi = (|\xi|, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ なる $T \in O(3)$ を取る。(2) を $(|\xi|, 0) \in \mathbb{R}^2$ に対して適用し

$$\frac{\sin|\xi|}{|\xi|} = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1^2+x_2^2<1} \frac{e^{-ix_1|\xi|}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2$$

を得る。最後の積分を $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = S_+^2 \cup S_-^2, S_\pm^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ \pm x_3 > 0\}$ に於ける積分の $\mathbb{R}^2$ への射影と見做せば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{x_1^2+x_2^2<1} \frac{e^{-ix_1|\xi|}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2 &= \frac{1}{4\pi}\int_{\substack{x_1^2+x_2^2<1 \\ x_3=(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}>0}} \frac{e^{-ix_1|\xi|}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2 \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{\substack{x_1^2+x_2^2<1 \\ x_3=-(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}<0}} \frac{e^{-ix_1|\xi|}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-ix_1|\xi|} d\sigma(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-ix\cdot T\xi} d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-i({}^tTx)\cdot\xi} d\sigma(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-ix\cdot\xi} d\sigma(x)
\end{aligned}$$

より (3) が従う。

(3) ⇒ (2): 任意の $\xi \in \mathbb{R}^2$ を取り (3) を $(\xi, 0) \in \mathbb{R}^3$ に対して適用すると

$$\frac{\sin|\xi|}{|\xi|} = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)} d\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1^2+x_2^2<1} \frac{e^{-i(x_1\xi+x_2\xi_2)}}{(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} dx_1 dx_2$$

となり (2) が従う。

(1) ⇒ (4): 解のフーリエ積分表示に (1) を用いると

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}(\cos(t\xi)\hat{\phi}(\xi))d\xi + (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\frac{\sin t\xi}{\xi}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\frac{\sin t\xi}{\xi}\hat{\phi}(\xi)\right)d\xi\right) + (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\frac{\sin t\xi}{\xi}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\frac{t}{2}\int_{-1}^{1} e^{-iyt\xi}dy\right)\hat{\phi}(\xi)d\xi\right) \\
&\quad + (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\frac{t}{2}\int_{-1}^{1} e^{-iyt\xi}dy\right)\hat{\psi}(\xi)d\xi \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-ty)\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi\right)dt\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-ty)\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi\right)dt\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\phi(x-ty)dy\right)+\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x-ty)dy\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\phi(x-\eta)dy\right)+\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x-ty)dy\\
&=\frac{1}{2}\left(\phi(x-t)+\phi(x+t)\right)+\frac{t}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x-ty)dy
\end{aligned}
$$

となり (4) が得られる。

(2) $\Rightarrow$ **(5)**: 解のフーリエ積分表示に (2) を用いると

$$
\begin{aligned}
u(t,x)&=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\cdot\xi}(\cos(t|\xi|)\hat{\phi}(\xi))d\xi+(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\phi}(\xi)\right)d\xi\right)+(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{e^{-iyt\cdot\xi}}{(1-|y|^2)^{1/2}}\right)\hat{\phi}(\xi)d\xi\right)\\
&\quad+(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{e^{-iyt\cdot\xi}}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy\right)\hat{\psi}(\xi)d\xi\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}}\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-ty)\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi\right)dy\right)\\
&\quad+\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}}\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-ty)\cdot\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi\right)dy\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{\phi(x-ty)}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy\right)+\frac{t}{2\pi}\int_{B^2}\frac{\psi(x-ty)}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy
\end{aligned}
$$

となり (5) が得られる。

(3) $\Rightarrow$ **(6)**: 解のフーリエ積分表示に (3) を用いると

$$
\begin{aligned}
u(t,x)&=(2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi}(\cos(t|\xi|)\hat{\phi}(\xi))d\xi+(2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{\phi}(\xi)\right)d\xi\right)+(2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} e^{-iyt\cdot\xi}d\sigma(y)\right)\hat{\phi}(\xi)d\xi\right)\\
&\quad+(2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} e^{-iyt\cdot\xi}d\sigma(y)\right)\hat{\psi}(\xi)d\xi\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\left((2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-ty)\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi\right)d\sigma(y)\right)\\
&\quad+\frac{t}{4\pi}\int_{S^2}\left((2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-ty)\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi)d\xi\right)d\sigma(y)
\end{aligned}
$$

となり (6) が得られる。

(4) $\Rightarrow$ **(1)**: 任意の $\psi \in \mathscr{S}$ に対し $\partial_t u(0) = \psi, u(0) = 0$ なる $(E)_1$ の解 u の $t = 1$ に於ける値 $u(1,x)$ は解の一意性により

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \hat{\psi}(\xi) \right) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \psi(x-y) dy$$

で与えられる。右辺は

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi \right) dy = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-iy\xi} dy \right) \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

に等しい。フーリエ逆変換の一意性より

$$\frac{\sin \xi}{\xi} \hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-iy\xi} dy \hat{\psi}(\xi)$$

が得られる。ψ は任意であったので (1) が従う。

(5) $\Rightarrow$ **(2)**: 任意の $\psi \in \mathscr{S}$ に対し $\partial_t u(0) = \psi, u(0) = 0$ なる $(E)_2$ の解 u の $t = 1$ に於ける値 $u(1,x)$ は解の一意性により

$$(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} \left(\frac{\sin |\xi|}{|\xi|} \hat{\psi}(\xi) \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{B^2} \frac{\psi(x-y)}{(1-|y|^2)^{1/2}} dy$$

で与えられる。右辺は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{B^2} \frac{1}{(1-|y|^2)^{1/2}} \left((2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\cdot\xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi \right) dy \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{B^2} \frac{e^{-iy\cdot\xi}}{(1-|y|^2)^{1/2}} dy \right) \hat{\psi}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

に等しい。フーリエ逆変換の一意性より

$$\frac{\sin |\xi|}{|\xi|} \hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{B^2} \frac{e^{-iy\cdot\xi}}{(1-|y|^2)^{1/2}} dy \hat{\psi}(\xi)$$

が得られる。ψ は任意であったので (2) が従う。

(6) $\Rightarrow$ **(3)**: 任意の $\psi \in \mathscr{S}$ に対し $\partial_t u(0) = \psi, u(0) = 0$ なる $(E)_3$ の解 u の $t = 1$ に於ける値 $u(1,x)$ は解の一意性より

$$(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi} \left(\frac{\sin |\xi|}{|\xi|} \hat{\psi}(\xi) \right) d\xi = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \psi(x-y) d\sigma(y)$$

で与えられる。右辺は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \left((2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\cdot\xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi \right) d\sigma(y) \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{-iy\cdot\xi} d\sigma(y) \right) \hat{\psi}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

に等しい。フーリエ逆変換の一意性より

$$\frac{\sin|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-iy\cdot\xi} d\sigma(y)\hat{\psi}(\xi)$$

が得られる。ψ は任意であったので (3) が従う。

４．ミンコフスキ空間に於ける自由波動方程式の解の表示（奇数次元の場合）

前節に引き続き $(E)_n$ の解の具体的表示を $n \geq 3$ が奇数の場合に求めよう。
$\varepsilon > 0$ に対し

$$K_\varepsilon(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi-\varepsilon|\xi|}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} d\xi$$

の積分を具体的に実行する為に極座標 $\xi = \rho\omega,\ \rho = |\xi|, \omega = \xi/|\xi|$ を導入し $n \geq 3$ が奇数の場合に成立つ等式

$$\sin(t\rho)\rho^{n-2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}(\cos(t\rho))$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&K_\varepsilon(t,x) = (2\pi)^{-n}\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^\infty e^{ix\cdot\rho\omega-\varepsilon\rho}\sin(t\rho)\rho^{n-2}d\rho\right)d\sigma(\omega)\\
&= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^\infty e^{ix\cdot\rho\omega-\varepsilon\rho}\cos(t\rho)d\rho\right)d\sigma(\omega)\\
&= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{S^{n-1}}\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{i(x\cdot\omega+t+i\varepsilon)\rho}+e^{i(x\cdot\omega-t+i\varepsilon)\rho}\right)d\rho d\sigma(\omega)\\
&= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{S^{n-1}}\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x\cdot\omega+t+i\varepsilon}+\frac{1}{x\cdot\omega-t+i\varepsilon}\right)d\sigma(\omega)\\
&= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{S^{n-1}}\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x\cdot(-\omega)+t+i\varepsilon}+\frac{1}{x\cdot\omega-t+i\varepsilon}\right)d\sigma(\omega)\\
&= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{S^{n-1}}\left(\frac{\varepsilon}{(x\cdot\omega-t)^2+\varepsilon^2}\right)d\sigma(\omega)
\end{aligned}$$

を得る。ここに単位球面上の測度の回転（特に原点に就いての対称 $\omega \mapsto -\omega$) 不変性を用いている。以下 $m-1$ 次元単位球面 $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m; |x| = 1\}$ の測度を ω_{m-1} と表す事にする：

$$\omega_{m-1} = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$$

ここに Γ はガンマ函数である。
さて $\varepsilon > 0,\ t \in \mathbb{R}$ に対し $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(s) = \frac{\varepsilon}{(s-t)^2+\varepsilon^2}, s \in \mathbb{R}$$

で定義すると任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $S^{n-1} \ni \omega \mapsto g(x\cdot\omega) \in \mathbb{R}$ の単位球面上の積分は

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} g(x\cdot\omega)d\sigma(\omega) &= \omega_{n-2}\int_{-1}^{1}(1-\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} g(|x|\rho)d\rho \\
&= \omega_{n-2}\int_{-|x|}^{|x|}\left(1-\frac{s^2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} g(s)\frac{1}{|x|}ds \\
&= \frac{\omega_{n-2}}{|x|^{n-2}}\int_{-|x|}^{|x|}(|x|^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}} g(s)ds
\end{aligned}$$

と計算される。

以上より、任意の $\psi \in \mathscr{S}$ 及び $x \in \mathbb{R}^n$ に対し等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(t,x-y)\psi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(t,y)\psi(x-y)dy = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(2\pi)^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2} I_\varepsilon(t,x),$$

$$I_\varepsilon(t,x) = \omega_{n-2}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{2-n}\int_{-|y|}^{|y|}(|y|^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\varepsilon}{(s-t)^2+\varepsilon^2}\psi(x-y)ds\ dy$$

が成立つ。$x \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $|r|$ の球面上の函数 ϕ の積分平均を

$$\begin{aligned}
(M_r\phi)(x) &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\phi(x+r\omega)d\sigma(\omega) \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\phi(x-r\omega)d\sigma(\omega)
\end{aligned}$$

で定義すると $I_\varepsilon(t,x)$ は極座標表示 $(y=r\omega, r=|y|, \omega=y/|y|)$ に於いて

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(t,x) &= \omega_{n-2}\int_0^\infty r^{2-n}\left(\int_{-r}^{r}(r^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\varepsilon}{(s-t)^2+\varepsilon^2}\int_{S^{n-1}}\psi(x-r\omega)d\sigma(\omega)ds\right)r^{n-1}dr \\
&= \omega_{n-2}\omega_{n-1}\int_0^\infty r\left(\int_{-r}^{r}(r^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\varepsilon}{(s-t)^2+\varepsilon^2}(M_r\psi)(x)ds\right)dr \\
&= \omega_{n-2}\omega_{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(s-t)^2+\varepsilon^2}\left(\int_{r\geq|s|}(r^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr\right)ds
\end{aligned}$$

と計算される。ここに現れる定数 $\omega_{n-2}\omega_{n-1}$ は

$$\begin{aligned}
\omega_{n-2}\omega_{n-1} &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{4\pi^{n-\frac{1}{2}}}{\frac{n-3}{2}\frac{n-5}{2}\cdots 2\cdot 1\cdot\frac{n-2}{2}\frac{n-4}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{4\pi^{n-\frac{1}{2}}}{\frac{(n-2)!}{2^{n-2}}\pi^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^n\pi^{n-1}}{(n-2)!}
\end{aligned}$$

に等しい。n は奇数で

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{n-2} = -1$$

となるから $s \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{-1}{(n-2)!}\int_{r\geq|s|}(s^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr \\
P_\varepsilon(s) &= \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

と置くと等式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(t,x-y)\psi(y)dy &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(t-s)\Phi(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(t-s)\Phi^{(n-2)}(s)ds\end{aligned}$$

が得られる。そこで $\varepsilon\to 0$ とすると右辺は

$$\Phi^{(n-2)}(t) = -\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_{|r|\geq|t|}(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dx$$

に収束する。さて

$$\int_0^\infty (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dx = \sum_{j=0}^{(n-3)/2}\binom{(n-3)/2}{j}t^{2j}\int_0^\infty(-r^2)^{\frac{n-3}{2}-j}r(M_r\psi)(x)dr$$

は t の $n-3$ 次多項式であり $n-2$ 回微分すると 0 となる事を用いると

$$\begin{aligned}\Phi^{(n-2)}(t) &= \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\left[\int_0^\infty (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr - \int_{r\geq|t|}(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr\right] \\ &= \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_0^{|t|}(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr\end{aligned}$$

が得られる。従って

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi-\varepsilon|\xi|}\left(\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\right)d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(t,x-y)\psi(y)dy \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(t-s)\Phi^{(n-2)}(s)ds \\ &= \Phi^{(n-2)}(t) \\ &= \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_0^{|t|}(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(\cos(t|\xi|)\hat{\phi}(\xi))d\xi \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left((2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\hat{\phi}(\xi)d\xi\right) \\ &= \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\int_0^{|t|}(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\phi)(x)dr\end{aligned}$$

が得られる。

これらの等式の右辺の時間微分は次の様に表される。

命題 1. 非負整数 j 及び $f \in C^j(\mathbb{R})$ に対し次の等式が成立つ：

$$\frac{1}{(2j+1)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{2j+1}\int_0^t (t^2-r^2)^j f(r)dr = \frac{1}{(2j+1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^j (t^{2j}f(t))$$

(証明) 左辺及び右辺を夫々 $u_j(t)$ 及び $v_j(t)$ と置く。$j=0$ の場合

$$u_0(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(r)dr = f(t) = v_0(t)$$

となり両者は等しい。$j \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}
u_j(t) &= \frac{1}{(2j+1)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{2j}[2jt\int_0^t (t^2-r^2)^{j-1}f(r)dr] \\
&= \frac{1}{(2j+1)!}[2jt\left(\frac{d}{dt}\right)^{2j}\int_0^t (t^2-r^2)^{j-1}f(r)dr + (2j)^2\left(\frac{d}{dt}\right)^{2j-1}\int_0^t (t^2-r^2)^{j-1}f(r)dr] \\
&= \frac{1}{(2j+1)!}[2jt(2j-1)!u'_{j-1}(t) + (2j)^2(2j-1)!u_{j-1}(t)] \\
&= \frac{1}{2j+1}[tu'_{j-1}(t) + 2ju_{j-1}(t)]
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
v_j(t) &= \frac{1}{(2j+1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j-1}(2jt^{2j-2}f(t) + t^{2j-1}f'(t)) \\
&= \frac{1}{2j+1}\left[\frac{2j}{(2j-1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j-1}(t^{2j-2}f(t)) + \frac{1}{(2j-1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j-1}(t^{2j-1}f'(t))\right] \\
&= \frac{1}{2j+1}\left[2jv_{j-1}(t) + \frac{1}{(2j-1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j-1}(t^{2j}\cdot\frac{1}{t}\frac{d}{dt}f)\right]
\end{aligned}$$

であるから $D = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}$ として

$$D^{j-1}t^{2j}D = t^2D^jt^{2(j-1)}$$

である事を示せば等式

$$v_j(t) = \frac{1}{2j+1}[2jv_{j-1}(t) + tv'_{j-1}(t)]$$

が従い $\{u_j\}$ と $\{v_j\}$ は同じ漸化式を満たす事になり命題が従う。そこで D に関する上の等式を帰納法で示そう。$j=1$ の場合は両辺共 t^2D に等しい。$j \geq 1$ とし

$$D^{j-1}t^{2j}D = t^2D^jt^{2(j-1)}$$

を仮定する。$Dt^2 = 2 + t^2 D$ であるから

$$\begin{aligned}
D^j t^{2(j+1)} D &= D^j t^{2j}(Dt^2 - 2) \\
&= D(D^{j-1} t^{2j} D)t^2 - 2D^j t^{2j} \\
&= D(t^2 D^j t^{2(j-1)})t^2 - 2D^j t^{2j} \\
&= (Dt^2 - 2)D^j t^{2j} = (t^2 D)D^j t^{2j} \\
&= t^2 D^{j+1} t^{2j}
\end{aligned}$$

となり帰納法が完結する。

命題 2． 非負整数 j に対し $\{a_{jk}; 0 \le k \le j\} \subset \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在し任意の $g \in C^j(\mathbb{R})$ に対し

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^j (t^{2j+1} g(t)) = \sum_{k=0}^{j} a_{jk} t^{k+1} g^{(k)}(t)$$

が成立つ。更に $a_{j0} = (2j+1)!!$ が成立つ。

(証明) j に関する帰納法で示そう。$j = 0$ の場合は左辺及び右辺は夫々 $tg(t)$ 及び $a_{00}tg(t)$ となるから $a_{00} = 1 = 1!!$ として成立する。$j \ge 1$ とし

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j-1} (t^{2j+1} g(t)) = \sum_{k=0}^{j-1} a_{j-1,k} t^{k+1} g^{(k)}(t)$$

を仮定する。ここで $g(t)$ の代りに $t^2 g(t)$ を適用し

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j} (t^{2j-1} g(t)) = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{j-1} a_{j-1,k} t^{k+1} (t^2 g)^{(k)}(t) \\
&= \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{j-1} a_{j-1,k} t^{k+1} (t^2 g^{(k)}(t) + 2ktg^{(k-1)}(t) + k(k-1)g^{(k-2)}(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} a_{j-1,k} \frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t^{k+3} g^{(k)}) + \sum_{k=1}^{j-1} 2k a_{j-1,k} \frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t^{k+2} g^{(k-1)}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{j-1} k(k-1) a_{j-1,k} \frac{1}{t}\frac{d}{dt}(t^{k+1} g^{(k-2)}) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} a_{j-1,k}((k+3)t^{k+1} g^{(k)} + t^{k+2} g^{(k+1)}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j-1} 2k a_{j-1,k}((k+2)t^k g^{(k-1)} + t^{k+1} g^{(k)}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{j-1} k(k-1) a_{j-1,k}((k+1)t^{(k-1)} g^{(k-2)} + t^k g^{(k-1)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{j-1}(k+3)a_{j-1,k}t^{k+1}g^{(k)} + \sum_{k=1}^{j} a_{j-1,k-1}t^{k+1}g^{(k)} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{j-2} 2(k+3)(k+1)a_{j-1,k+1}t^{k+1}g^{(k)} + \sum_{k=1}^{j-1} 2ka_{j-1,k}t^{k+1}g^{(k)} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{j-3}(k+3)(k+2)(k+1)a_{j-1,k+2}t^{k+1}g^{(k)} + \sum_{k=1}^{j-2}(k+1)ka_{j-1,k+1}t^{k+1}g^{(k)} \\
&= [3a_{j-1,0} + 6a_{j-1,1} + 12a_{j-1,2}]tg(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j-3}[3(k+1)a_{j-1,k} + a_{j-1,k-1} + 2(k+3)(k+1)a_{j-1,k+1} \\
&\qquad\quad + (k+3)(k+2)(k+1)a_{j-1,k+2}]t^{k+1}g^{(k)}(t) \\
&\quad + [3(j-1)a_{j-1,j-2} + a_{j-1,j-3} + 2(j+1)(j-1)a_{j-1,j-1}]t^{j-1}g^{(j-2)}(t) \\
&\quad + [3ja_{j-1,j-1} + a_{j-1,j-2}]t^{j}g^{(j-1)}(t) + a_{j-1,j-1}t^{j+1}g^{(j)}(t)
\end{aligned}
$$

となり帰納法は完結する。$g(t)=1$ とすると

$$
\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{j} t^{2j+1} = (2j+1)!!t
$$

となるので $a_{j0} = (2_j+1)!!$ を得る。

以上より次の定理が従う。

定理3　n を 3 以上の奇数で $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ とすると $(E)_n$ の解は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} r(M_r\phi)(x)dr \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} r(M_r\psi)(x)dr \\
&= \frac{1}{(n-2)!!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\Big(t^{n-2}(M_t\phi)(x)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\Big(t^{n-2}(M_t\psi)(x)\Big) \\
&= \frac{1}{(n-2)!!}\sum_{k=0}^{(n-3)/2} a_{(n-3)/2,k}\left((k+1)t^k\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k (M_t\phi)(x) + t^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+1}(M_t\phi)(x)\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!!}\sum_{k=0}^{(n-3)/2} a_{(n-3)/2,k}\, t^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k (M_t\psi)(x)
\end{aligned}
$$

但し $\{a_{jk}; 0\le k\le j\}$ は命題 2 で与えられるものとし

$$
(M_r\phi)(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\phi(x-r\omega)d\sigma(\omega),\ r\in\mathbb{R}
$$

とする。

註　$a_{(n-3)/2,0} = (n-2)!!$ である為 $k=0$ に相当する項 $M_t\phi$ 及び $tM_t\psi$ の係数は 1 である。

例 $(n=3)$

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(t(M_t\phi)(x)\Big) + t(M_t\psi)(x) = (M_t\phi)(x) + t\frac{\partial}{\partial t}(M_t\phi)(x) + t(M_t\psi)(x)$$

例 $(n=5)$

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big(t^3(M_t\phi)(x)\Big) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big(t^3(M_t\psi)(x)\Big)\\ &= (M_t\phi)(x) + \frac{5}{3}t\frac{\partial}{\partial t}(M_t\phi)(x) + \frac{1}{3}t^2\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^2(M_t\phi)(x)\\ &\quad + t(M_t\psi)(x) + \frac{1}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t}(M_t\psi)(x)\end{aligned}$$

例 $(n=7)$

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{1}{15}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\Big)^2\Big(t^5(M_t\phi)(x)\Big) + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\Big(t^5(M_t\psi)(x)\Big)\\ &= (M_t\phi)(x) + \frac{11}{5}t\frac{\partial}{\partial t}(M_t\phi)(x) + \frac{4}{5}t^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2(M_t\phi)(x) + \frac{1}{15}t^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^3(M_t\phi)(x)\\ &\quad + t(M_t\psi)(x) + \frac{3}{5}t^2\frac{\partial}{\partial t}(M_t\psi)(x) + \frac{1}{15}t^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2(M_t\psi)(x)\end{aligned}$$

例 $(n=9)$

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \frac{1}{105}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3\Big(t^7(M_t\phi)(x)\Big) + \frac{1}{105}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^3\Big(t^5(M_t\psi)(x)\Big)\\ &= (M_t\phi)(x) + \frac{93}{35}t\frac{\partial}{\partial t}(M_t\phi)(x) + \frac{47}{35}t^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2(M_t\phi)(x)\\ &\quad + \frac{22}{35}t^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^3(M_t\phi)(x) + \frac{1}{105}t^4\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^4(M_t\phi)(x)\\ &\quad + t(M_t\psi)(x) + \frac{29}{35}t^2\frac{\partial}{\partial t}(M_t\psi)(x) + \frac{6}{35}t^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2(M_t\psi)(x)\\ &\quad + \frac{1}{105}t^4\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^3(M_t\psi)(x)\end{aligned}$$

5．ミンコフスキ空間に於ける自由波動方程式の解の表示（偶数次元の場合）

本節では $(E)_n$ の解の具体的表示を n が偶数の場合に求めよう。アダマールの変数低減法を用いて奇数次元 $n+1$ の解の表示式から偶数次元 n の場合を導こう。$\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し $\tilde{\phi}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \phi(x_1, \cdots, x_n)$ 及び $\tilde{\psi}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \psi(x_1, \cdots, x_n)$ で $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の函数 $\tilde{\phi}$ 及び $\tilde{\psi}$ が定まる。$\tilde{\phi}$ と $\tilde{\psi}$ は x_{n+1} 変数に就いて急減少ではないが定理３の等式は、そのまま成立し n を $n+1$ と書き換えた

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r(M_r\tilde{\psi})(x)dr \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1} \int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r(M_r\tilde{\psi})(x)dr \end{aligned}$$

が成立つ。ここに $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とし球面平均

$$\begin{aligned} (M_r\tilde{\psi})(x) &= \frac{1}{\omega_n}\int_{S^n} \tilde{\psi}((x, x_{n+1}) + r\omega)d\sigma(\omega) \\ &= \frac{1}{\omega_n}\int_{S^n} \tilde{\psi}((x, x_{n+1}) - r\omega)d\sigma(\omega), \ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

に於いて σ は ($\mathbb{R}^{n+1}$ 内の) 単位球面 S^n 上の測度である。$\tilde{\phi}$ は x_{n+1} 変数には無関係なので

$$(M_r\tilde{\psi})(x) = \frac{2}{\omega_n}\int_{B^n} \frac{\psi(x-ry)}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy = \frac{2}{\omega_n}\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{1/2}}\int_{S^{n-1}} \psi(x-r\rho\omega)d\sigma(\omega)d\rho$$

と表される。故に

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1} \int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r(M_r\tilde{\psi})(x)dr \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2} \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-2}{2}} r(M_r\tilde{\psi})(x)dr \\ &= \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2} \left[(n-2)t\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2} r(M_r\tilde{\psi})(x)dr\right], & n \geq 4, \\ t(M_t\tilde{\psi})(x), \ n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

となり $n=2$ の場合は前々節と一致する結果を与える。以下 $n \geq 4$ として上の計算を続け

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2} \left[(n-2)t\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2} r(M_r\tilde{\psi})(x)dr\right] \\ &= \frac{2(n-2)}{\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\left[t\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2} r\int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1-\rho^2)^{1/2}}\int_{S^{n-1}} \psi(x-r\rho\omega)d\sigma(\omega)d\rho dr\right] \\ &= \frac{2(n-2)}{\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\left[t\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2} r\cdot\frac{1}{r^n}\int_0^r \frac{s^{n-1}}{(1-\frac{s^2}{r^2})^{1/2}}\int_{s^{n-1}} \psi(x-s\omega)d\sigma(\omega)dsdr\right] \\ &= \frac{2(n-2)\omega_{n-1}}{\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\left[t\int_0^t \frac{(t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2}}{r^{n-2}}\int_0^r \frac{s^{n-1}}{(r^2-s^2)^{1/2}}(M_s\psi)(x)dsdr\right] \\ &= \frac{2(n-2)\omega_{n-1}}{\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\left[t\int_0^t s^{n-1}(M_s\psi)(x)\left(\int_s^t \frac{(t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2}}{r^{n-2}(r^2-s^2)^{1/2}}dr\right)ds\right] \end{aligned}$$

を得る。r に就いての積分は

$$1-\frac{s^2}{r^2}=(1-\frac{s^2}{t^2})\theta$$

として θ に変換すると

$$r^2=\frac{s^2}{1-(1-\frac{s^2}{t^2})\theta},\quad t^2-r^2=\frac{(t^2-s^2)(1-\theta)}{1-(1-\frac{s^2}{t^2})\theta}$$
$$r^2-s^2=\frac{(t^2-s^2)\theta}{1-(1-\frac{s^2}{t^2})\theta}\cdot\frac{s^2}{t^2},\quad -\frac{dr}{r^3}=\frac{t^2-s^2}{2t^2}d\theta$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_s^t\frac{(t^2-r^2)^{\frac{n}{2}-2}}{r^{n-2}(r^2-s^2)^{1/2}}dr&=\frac{(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}}{2ts^{n-2}}\int_0^1\theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{n}{2}-2}d\theta\\&=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2}-1)\frac{(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}}{ts^{n-2}}\end{aligned}$$

で与えられる。ここに $B(p,q)$ はベータ函数である。これ迄に現れた係数の積は

$$\begin{aligned}&\frac{2(n-2)\omega_{n-1}}{\omega_n}\cdot\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2}-1)=(n-2)\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}\\&=(n-2)\frac{(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)\pi^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}=n-1\end{aligned}$$

であるから等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\int_0^t(t^2-r^2)^{\frac{n-2}{2}}r(M_r\tilde{\psi})(x)dr\\&=\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_0^t(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}}s(M_s\psi)(x)ds\end{aligned}$$

が成立つ。故に n が偶数の場合にも解の具体的表示は

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\int_0^t(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\phi)(x)dr\\&+\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_0^t(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}r(M_r\psi)(x)dr\end{aligned}$$

で与えられる。

以上より次の定理が従う。

定理4　n を2以上の偶数で $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ とすると $(E)_n$ の解は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} r(M_r\phi)(x)dr \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-2}\int_0^t (t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} r(M_r\psi)(x)dr \\
&= \frac{1}{(n-1)!!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}(t^{n-1}(\tilde{M}_t\phi)(x)) \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}(t^{n-1}(\tilde{M}_t\psi)(x)) \\
&= \frac{1}{(n-1)!!}\sum_{k=0}^{(n-2)/2} a_{(n-2)/2,k}\left((k+1)t^k\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k(\tilde{M}_t\phi)(x) + t^{k+1}(\tilde{M}_t\phi)(x)\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!!}\sum_{k=0}^{(n-2)/2} a_{(n-2)/2,k}t^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k(\tilde{M}_t\psi)(x)
\end{aligned}
$$

但し $\{a_{jk}; 0 \le k \le j\}$ は命題2で与えられるものとし

$$
\begin{aligned}
(M_r\phi)(x) &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\phi(x-r\omega)d\sigma(\omega) \\
(\tilde{M}_r\phi)(x) &= \frac{2}{\omega_n}\int_{B^n}\frac{\phi(x-ry)}{(1-|y|^2)^{1/2}}dy
\end{aligned}
$$

とする。

参考文献

G. B. Folland, Introduction to Partial Differetial Equations, Princeton

R. クーラン, D. ヒルベルト, 数理物理学の方法4, 東京図書

金子晃，偏微分方程式入門, 東京大学出版会

高橋陽一郎，実関数とフーリエ解析，岩波書店

谷島賢二, 物理数学入門, 東京大学出版会