

微分積分の基本公式

平成 20 年 11 月

小澤 徹

<http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html>

区間上の一変数連続函数に対して微分と積分とが相互の逆作用素となっている事を主張する一連の命題を「微分積分の基本公式」又は「微分積分の基本定理」と謂う。その標準的証明には平均値の定理(或はその同値な命題)が用いられる。ここではその関係を C^1 級の枠組で考えてみよう。

I を \mathbb{R} の开区間、 \bar{I} を I の閉包とする。 I 上連続な導函数を持つ \bar{I} 上連続な実数値函数全体の成す集合を $C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ と表す。

定理 次は同値である。

- (1) (平均値の性質) 任意の $f \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ は平均値の性質を持つ。即ち $a < b$ なる任意の $a, b \in \bar{I}$ に対し $c \in (a, b)$ が存在し、等式

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

が成立つ。

- (2) (導函数に対するリーマン和) 任意の $f \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$, $a < b$ なる任意の $a, b \in \bar{I}$, $[a, b]$ の任意の分割 Δ に対し $f(b) - f(a)$ に等しい f' のリーマン和が存在する。

- (3) (導函数の積分) 任意の $f \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ は微分積分の基本公式を満たす。即ち任意の $a, b \in \bar{I}$ に対し、等式

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

が成立つ。

- (4) (有限増分の性質) 任意の $f \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ は有限増分の性質を持つ。即ち I の任意の有界閉部分区間 J に対し $M = \sup\{|f'(x)|; x \in J\}$ とすると、不等式

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|, \quad a, b \in J$$

が成立つ。

- (5) (定数函数の特徴付け) $f \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ に対し

$$f' = 0 \Leftrightarrow f \text{ は定数函数}$$

(6) (不定積分の微分) $f \in C(I)$, $a \in \bar{I}$ に対し $F(x) = \int_a^x f(y)dy$, $x \in \bar{I}$ と置くと $F \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ であり F は f の一つの原始函数である: $F' = f$

f の \bar{I} 上の任意の原始函数 G に対し $C \in \mathbb{R}$ が存在して $G = F + C$ と表され任意の $b \in \bar{I}$ に対し微分積分の基本公式

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

が成立つ。

(7) (一階線型非斉次微分方程式の解の存在と一意性) $f \in C(I)$, $a \in \bar{I}$, $\xi \in \mathbb{R}$ に対し、微分方程式

$$\begin{cases} u'(x) = f(x), & x \in I \\ u(a) = \xi \end{cases}$$

は $u \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ なる一意解を持つ。

(証明) (1) \Rightarrow (2):

$J \equiv [a, b]$ の任意の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ を取る。各部分区間 $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$ に於いて (1) を適用し

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

なる $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ の存在を得る。分割 Δ と $\{\xi_j\}$ に依る f' のリーマン和は

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) &= \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \\ &= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

(2) \Rightarrow (3): 幅が 0 に収束する様な分割の列 $\{\Delta_n\}$ に対し、一定の $f(b) - f(a)$ に等しい f' のリーマン和を取れば、そのリーマン和の成す列は f' の連続性により $\int_a^b f'(x)dx$ に収束する。

(3) \Rightarrow (4): (3) の等式の絶対値を次の様に評価する:

$$|f(b) - f(a)| \leq \left| \int_a^b |f'(x)|dx \right| \leq M \left| \int_a^b dx \right| = M|b - a|$$

(4) \Rightarrow (5): $f' = 0$ ならば (4) の M は 0 に等しいので任意の $a, b \in \bar{I}$ に対し $f(b) = f(a)$ となる。逆は微分係数の定義から従う。

(5) \Rightarrow (6): $x \in I$ 及び $x + h \in I$ なる $h \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - hf(x) &= \int_x^{x+h} f(y)dy - hf(x) \\ &= \int_x^{x+h} (f(y) - f(x))dy \end{aligned}$$

であるから、評価

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq |h| \sup\{|f(y) - f(x)|; y \in I, |x-y| \leq |h|\}$$

を得る。 f の x に於ける連続性は

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup\{|f(y) - f(x)|; y \in I, |x-y| \leq |h|\} = 0$$

と同値である。これより $F'(x) = f(x)$ が従う。 $f \in C(I)$ より $F \in C^1(I) \cap C(\bar{I})$ を得る。 f の任意の原始函数 G は定義により $G' = f$ となるので $G \in C^1(I) \cap C(\bar{I})$ であり $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ を満たす。(5) により $G-F$ は定数であるから $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$ となる。従って

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

(6) \Rightarrow (3): $f \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ を取り $f' \in C(I)$ に対し (6) を適用すると f は f' の一つの原始函数であるから (3) が従う。

(3) \Rightarrow (1): $a < b$ なる $a, b \in \bar{I}$ に対し f' は有界閉区間 $[a, b]$ 上最大値及び最小値を取る。それらを夫々 M, m とする: $M = \max\{f'(x); x \in [a, b]\}$, $m = \min\{f'(x); x \in [a, b]\}$

このとき

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f'(x)dx \leq M$$

を得るが、この不等式は (3) を用いると

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$$

と書き換えられる。 f' の最大値及び最小値を実現する点を夫々 $\xi, \eta \in [a, b]$ とすると、この不等式は

$$f'(\eta) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(\xi)$$

と書き換えられる。 f' に中間値の定理を適用すると

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

なる c が ξ と η を結ぶ区間内に存在する事が従う。

(5),(6) \Rightarrow (7): 解の存在: $x \in \bar{I}$ に対し

$$u(x) = \xi + \int_a^x f(y)dy$$

と置けば (6) により u は (7) の微分方程式の一つの解となる。

解の一意性: もう一つの解を v とすると

$u - v \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ は $(u - v)' = 0$ を満たすので (5) より任意の $x \in \bar{I}$ に対し

$$u(x) - v(x) = u(a) - v(a)$$

となる。右辺は $u(a) = v(a) = \xi$ より 0 となる。

(7) \Rightarrow (5): (7) の f を恒等的に零であるとする。(7) より微分方程式

$$\begin{cases} u'(x) = 0, & x \in I \\ u(a) = \xi \end{cases}$$

は $u \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ なる一意解を持つ事になる。一意性より $u(x) = \xi$ が唯一つの解である。この u は $u \in C(\bar{I}) \cap C^1(I)$ であり $u' = 0$ を満たすものであるが上の議論より u は定数函数となる事が従う。

注 1: (1) \Rightarrow (2) には導函数の連続性は用いていない。 f の微分可能性の仮定で充分である。

注 2: (2) \Rightarrow (3) には導函数の連続性は用いていない。 f' のリーマン可積分性の仮定で充分である。

注 3: (4) の結論の為には導函数の連続性は不必要である。 f' の有界性の仮定で充分である。

注 4: (5) の結論の為には導函数の連続性は不必要である。 f の微分可能性の仮定で充分である。

注 5: (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) は「微分積分の基本公式」を「平均値の定理の重ね合わせ」として捉える見方の根拠となっている。

参考文献: 藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學第一巻、内田老鶴圃、1934
杉浦光夫、解析入門Ⅰ、東京大学出版会