ニュートンの運動方程式に対する初期値問題の大域解

平成 25 年 4 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

ニュートン (Sir Isaac Newton, 1642-1727) の運動方程式に対する初期値問題は、局所リプシッツな力の場の下で一意的な局所解をもつ。力の場が一次増大ならば、グロンウォールの補題に基づく局所解の先験評価 an a priori estimate に依り局所解は大域的に延長される。ここでは一次より速く増大する力の場の下でのニュートンの運動方程式の初期値問題の大域解の存在について典型的な例を取り上げて考察しよう。

１．ニュートンの運動方程式に対する初期値問題の解の存在と一意性

X を実バナハ空間とする。$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は次の局所リプシッツ条件を満たすものとする：

$(L)_{\mathrm{loc}}$　単調増加函数 $L : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $\rho > 0$ に対し $L(\rho) > 0$ であり
任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 及び $x, y, v, w \in \overline{B(0;\rho)}$ に対し
不等式

$$\|F(t,x,v) - F(t,y,w)\| \leq L(\rho)(\|x-y\| + \|v-w\|)$$

が成立つ。ここに $\overline{B(0;\rho)} = \{x \in X; \|x\| \leq \rho\}$ とする。

定理１（局所解の存在と一意性）　$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は $(L)_{\mathrm{loc}}$ を満たすものとする。このとき任意の $t_0 \geq 0$ 及び $(x_0, v_0) \in X \times X$ に対し $T^* \in (t_0, \infty]$ が存在し、ニュートンの微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \quad t > t_0 \\ \\ (x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

は唯一つの解 $x \in C^2([t_0, T^*); X)$ を持つ。更に次のどちらか一方が成立つ。

(i)　$T^* = \infty$

(ii)　$T^* < \infty$　且つ　$\lim_{t \uparrow T^*}(\|x(t)\| + \|x'(t)\|) = \infty$

（証明）　問題をバナッハ空間 $X \times X$ における微分方程式

$$\frac{d}{dt}(x(t), v(t)) = (v(t), F(t, x(t), v(t)))$$

の初期値問題として捉え積分方程式

$$(x(t), v(t)) = (x_0, v_0) + \int_{t_0}^{t} (v(t'), F(t', x(t'), v(t')))dt'$$

の形で議論すれば良い。

大域解の存在を保障する為の F の条件として一次増大条件を考えよう：

(LG) 局所可積分函数 $M : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 及び $x, v \in X$ に対し不等式

$$\|F(t, x, v)\| \leq M(t)(\|x\| + \|v\| + 1)$$

が成立つ。

定理２（大域解の存在 I ）　$F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は $(L)_{\mathrm{loc}}$ 及び (LG) を満たすものとする。このとき任意の $t_0 \geq 0$ 及び $(x_0, v_0) \in X \times X$ に対し定理１で与えられる T^* は $T^* = \infty$ である。

（証明）　グロンウォールの補題を用いて解の先験評価が得られるので定理１の (ii) は成立しない事が分かる。

X が内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間の場合に条件 (LG) は次の様に弱められる：

$(LG)'$ 局所可積分函数 $M : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在し任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 及び $x, v \in X$ に対し不等式

$$(v|F(t, x, v)) \leq M(t)(\|x\|^2 + \|v\|^2 + 1)$$

が成立つ。

定理３（大域解の存在 II）　X は実ヒルベルト空間とし $F : \mathbb{R}_{\geq 0} \times X \times X \to X$ は $(L)_{\mathrm{loc}}$ 及び $(LG)'$ を満たすものとする。このとき任意の $t_0 \geq 0$ 及び $(x_0, v_0) \in X \times X$ に対し定理１で与えられる T^* は $T^* = \infty$ である。

（証明）　任意の $t \in (0, T^*)$ に対して成立つ微分不等式

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2 + \|x'(t)\|^2 + 1) \\
&= 2(x'(t)|x(t)) + 2(x''(t)|x'(t)) \\
&= 2(x'(t)|x(t)) + 2(F(t, x(t), x'(t)|x'(t)) \\
&\leq (2M(t)+1)(\|x(t)\|^2 + \|x'(t)\|^2 + 1)
\end{aligned}$$

を積分すれば解の先験評価が得られるので定理１の (ii) は成立しない事が分かる。

２．優線型斥力場の下での古典軌道

H を内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ヒルベルト空間とする。$p > 1$ 及び $x_0, v_0 \in H$ に対し次の初期値問題を考える：

$$(E)^p_+ \begin{cases} x''(t) = \|x(t)\|^{p-1}x(t), \quad t > 0 \\ \\ (x(0), x'(0)) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

前節の定理１により $T^* \in (0, \infty]$ が存在し $x \in C^2([0, T^*); H)$ なる解の存在と一意性が従う。ここに $T^* = \infty$ であるかまたは $T^* < \infty$ 且つ $\lim\limits_{t \uparrow T^*}(\|x(t)\| + \|x'(t)\|) = \infty$ のどちらか一方が成立っている。以下 $t \in [0, T^*)$ として議論する。等式

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 - \frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1}\right) \\
&= (x''(t)|x'(t)) - \|x(t)\|^{p-1}(x'(t)|x(t)) \\
&= (x''(t) - \|x(t)\|^{p-1}x(t)|x'(t)) = 0
\end{aligned}$$

により次で定義されるエネルギー

$$E(t) = \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 - \frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} \tag{2.1}$$

は保存量となる：

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \frac{1}{p+1}\|x_0\|^{p+1} \tag{2.2}$$

時刻 t に於ける位置ベクトルの長さの自乗を $\varphi(t) = \|x(t)\|^2$ と表す事により函数 $\varphi : [0, T^*) \to \mathbb{R}$ が定まる。φ を時間変数に就いて微分すると

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2(x'(t)|x(t)), \\
\varphi''(t) &= 2(x''(t)|x(t)) + 2\|x'(t)\|^2 \\
&= 2(\|x(t)\|^{p-1}x(t)|x(t)) + 4E(t) + \frac{4}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} \\
&= \frac{2(p+3)}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} + 4E(0)
\end{aligned}$$

を得るので φ は微分方程式

$$\varphi''(t) = \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} + 4E(0) \tag{2.3}$$

を満たす事が分かる。このとき、等式

$$((\varphi')^2 - \frac{8}{p+1}\varphi^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi)' = 2\varphi'\left(\varphi'' - \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi^{\frac{p+1}{2}} - 4E(0)\right) = 0$$

を積分すれば保存則

$$\varphi'(t)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(t) = \varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(0) \tag{2.4}$$

が得られる。右辺はコーシー・シュワルツの不等式により非正である：

$$\begin{aligned}
&\varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} - 8E(0)\varphi(0) \\
&= 4(x'(0)|x(0))^2 - \frac{8}{p+1}\|x(0)\|^{p+3} - (4\|x'(0)\|^2 - \frac{8}{p+1}\|x(0)\|^{p+1})\|x(0)\|^2 \\
&= \ 4(v_0|x_0)^2 - 4\|v_0\|^2\|x_0\|^2 \leq 0 \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

また φ は微分方程式 (2.3) を積分する事により等式

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \varphi'(0) + \int_0^t \varphi''(s)ds \\
&= \varphi'(0) + 4E(0)t + \frac{2(p+3)}{p+1}\int_0^t \varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds, \qquad (2.6) \\
\varphi(t) &= \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s)ds \\
&= \varphi(0) + \varphi'(0)t + 2E(0)t^2 + \frac{2(p+3)}{p+1}\int_0^t (t-s)\varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds
\end{aligned}$$

を満たしている事が分かる。

微分方程式の初期値問題 (E_+^p) に関する基本的結果を纏めて置こう：

定理 4　$p > 1$ に対し微分方程式の初期値問題 $(E)_+^p$ が時間大域解を持つ（即ち $T^* = \infty$）為の必要充分条件は

$$v_0 = -\sqrt{\frac{2}{p+1}}\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}x_0 \tag{2.7}$$

である。このとき $x_0 = 0$（従って $v_0 = 0$）ならば解 x は恒等的に零であり $x_0 \neq 0$（従って $v_0 \neq 0$）ならば $t \geq 0$ に於ける等式

$$\|x(t)\| = \left(\|x_0\|^{-\frac{p-1}{2}} + \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}t\right)^{-\frac{2}{p-1}}, \tag{2.8}$$

$$\|x'(t)\| = \left(\|v_0\|^{-\frac{p-1}{p+1}} + \frac{p-1}{2}\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}t\right)^{-\frac{p+1}{p-1}} \tag{2.9}$$

が成立つ。

(証明)　**1.** $(x_0, v_0) = (0, 0)$ **の場合**：
解の一意性により零解が唯一の (E_+^p) の解となる。

2. $x_0 \neq 0,\ v_0 = -\sqrt{\dfrac{2}{p+1}}\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}} x_0$ **の場合**：
解を $x \in C^2([0, T^*); H)$ と表す。$E(0) = \dfrac{1}{2}\|x_0\|^2 - \dfrac{1}{p+1}\|v_0\|^2 = 0$ 故任意の $t \in [0, T^*)$ に対し等式

$$\frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 = \frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1} \tag{2.10}$$

が成立つ。また $\varphi(t) = \|x(t)\|^2$ は任意の $t \in [0, T^*)$ に対し微分方程式

$$\varphi''(t) = \frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.11}$$

及び保存則

$$\varphi'(t)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} = \varphi'(0)^2 - \frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}} = 4(v_0|x_0)^2 - 4\|v_0\|^2\|x_0\|^2 = 0 \tag{2.12}$$

を満たしている事が分かる。更に

$$\varphi'(0) = 2(v_0|x_0) = -2 \cdot \sqrt{\frac{2}{p+1}}\|x_0\|^2 < 0$$

となっているから $T_0 > 0$ が存在し任意の $t \in [0, T_0]$ に対し $\varphi'(t) < 0$ が成立つ。故に任意の $t \in [0, T_0]$ に対し

$$\varphi'(t) = -\sqrt{\frac{8}{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}} \tag{2.13}$$

が成立つ。これより従う等式

$$(\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}})' = -\frac{p-1}{4}\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}-1}\varphi'(t) = \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}$$

を積分し

$$\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}} = \varphi(0)^{-\frac{p-1}{4}} + \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}t$$

即ち

$$\varphi(t) = \left(\varphi(0)^{-\frac{p-1}{4}} + \frac{p-1}{\sqrt{2(p+1)}}t\right)^{-\frac{4}{p-1}} \tag{2.14}$$

を得る。さて (2.14) は $[0,T_0]$ で意味を持つばかりでなく (2.11) 及び (2.13) を $[0,\infty)$ 上満たしている。微分方程式 (2.11) の初期値問題の局所解の一意性により、(2.14) で与えられる φ は (2.11) の一意的な大域解で $\sup_{t\geq 0}\varphi(t)=\varphi(0)$ となっている。よって $\|x(t)\|^2=\varphi(t)$ 及び $\|x'(t)\|^2=\sqrt{\dfrac{2}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}}}$ は $x(t)$ の存在区間上有界となっている。これは解 x の大域的存在 ($T^*=\infty$) を意味する。更に (2.14) は (2.8) そのものであり (2.9) は (2.10) 及び (2.8) より従う。

そこで以下では (2.7) が成立たない場合を考える。$T^*=\infty$ として矛盾を導けば定理が従う。

3． $E(0)>0$ **の場合**：

(2.3) により任意の $t\geq 0$ に対し $\varphi''(t)\geq 4E(0)>0$ であるから

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\geq \varphi'(0)+4E(0)t\\ \varphi(t) &\geq \varphi(0)+\varphi'(0)t+2E(0)t^2\end{aligned}$$

が成立つ。故に $T_0>0$ が存在し任意の $t\geq T_0$ に対し不等式

$$\begin{aligned}&\varphi'(t)\geq\ 2E(0)t>0,\\ &\varphi(t)\geq\ \varphi(0)+E(0)t^2>0,\\ &\frac{4}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}}+8E(0)\varphi(t)\geq\varphi'(0)^2-\frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}}-8E(0)\varphi(0)\end{aligned}$$

が成立つ。従って (2.4) によりに任意の $t\geq T_0$ に対し不等式

$$\varphi'(t)^2-\frac{4}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}}\geq 0 \tag{2.15}$$

が導かれる。$\varphi,\varphi'>0$ であるから (2.15) は

$$\varphi'(t)\geq\frac{2}{\sqrt{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$$

と同値であり微分不等式

$$(\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}})'=-\frac{p-1}{4}\varphi(t)^{-\frac{p+3}{4}}\varphi'(t)\leq-\frac{p-1}{2\sqrt{p+1}}$$

を区間 $[T_0,t]$ 上積分する事により

$$\varphi(t)^{-\frac{p-1}{4}}\leq\varphi(T_0)^{-\frac{p-1}{4}}-\frac{p-1}{2\sqrt{p+1}}(t-T_0)$$

が得られるが t を充分大きく取れば右辺は負となるので矛盾である。

4． $E(0)=0,\ \varphi'(0)>0$ **の場合**：

第3段と同様に、不等式

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\geq \varphi'(0),\\ \varphi(t) &\geq \varphi(0)+\varphi'(0)t\end{aligned}$$

が成立ち $T_0>0$ が存在して任意の $t\geq T_0$ に対し

$$\varphi'(t)\geq \frac{2}{\sqrt{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$$

が成立つので矛盾が導かれる。

5． $E(0)=0,\ \varphi'(0)>0$ **の場合**：

(2.3) により φ は微分方程式

$$\varphi''(t)=\frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.16}$$

を満たすので任意の $t\geq 0$ に対し $\varphi''(t)\geq 0$ となる。これより

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\geq \varphi'(0)=0,\\ \varphi(t) &\geq \varphi(0)\geq 0,\end{aligned}$$

が従う。一方 (2.4) より

$$\begin{aligned}\varphi'(t)^2-\frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}} &= 8E(0)\varphi(t)+\varphi'(0)^2-\frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}}-8E(0)\varphi(0)\\ &= -\frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}}\leq 0\end{aligned}$$

となるので

$$0\leq \varphi'(t)^2\leq \frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}}$$

の平方根を取って

$$0\leq \varphi'(t)\leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p+1}}\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$$

を得る。これより (2.16) と合せて

$$\begin{aligned}\varphi''(t)=\frac{2(p+3)}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} &\geq \frac{2(p+3)}{p+1}\left(\frac{\sqrt{p+1}}{2\sqrt{2}}\varphi'(t)\right)^{\frac{4}{p+3}\cdot\frac{p+1}{2}}\\ &= \frac{2(p+3)}{p+1}\left(\frac{p+1}{8}\right)^{\frac{p+1}{p+3}}(\varphi'(t))^{\frac{2(p+1)}{p+3}}\end{aligned}$$

を得る。右辺の $\varphi'(t)$ の指数は $\frac{2(p+1)}{p+3}=1+\frac{p-1}{p+3}>1$ となるから第3段と同じ議論により $\varphi'(t)$ は有限時間で爆発する。従って $\varphi(t)^{\frac{p+3}{4}}$ もそうであり矛盾である。

6．$E(0)=0,\ \varphi'(0)<0$ の場合：
もし $\varphi'(t_0)>0$ なる $t_0>0$ が存在したとすると (2.3) より任意の $t\geq t_0$ に対し

$$\varphi'(t)=\varphi'(t_0)+\frac{2(p+3)}{p+1}\int_{t_0}^{t}\varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds\geq\varphi'(t_0)$$

となり、これより

$$\varphi(t)=\varphi'(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varphi'(s)ds\geq\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0)$$

が従うので第3段と同様の議論により矛盾が導かれる。故に任意の $t\geq 0$ に対し $\varphi'(t)\leq 0$ が成立つ。特に φ は単調減少で下に有界である。一方、方程式 (2.16) より φ' は単調増加であり既に示した様に上に有界である。従って $t\to\infty$ に於ける $\varphi(t)$ 及び $\varphi'(t)$ の極限が存在する。それを夫々$\beta\geq 0$ 及び $\gamma\leq 0$ と表す事にする。

(1) $\beta>0$ の場合：

β の性質により不等式

$$\varphi'(t)=\varphi'(0)+\frac{2(p+3)}{p+1}\int_{0}^{t}\varphi(s)^{\frac{p+1}{2}}ds\geq\varphi'(0)+\frac{2(p+3)}{p+1}\beta^{\frac{p+1}{2}}t$$

が成立つが充分大きな t に対し右辺は正となって矛盾を得る。

(2) $\beta=0$ の場合：

保存則 (2.4)

$$\varphi'(t)^2-\frac{8}{p+1}\varphi(t)^{\frac{p+3}{2}}=\varphi'(0)-\frac{8}{p+1}\varphi(0)^{\frac{p+3}{2}}$$

に於いて $t\to\infty$ とすると左辺は γ^2 に収束するが右辺は (2.5) により非正である。故に右辺は0であり γ も 0 に等しい事が分かる。これより $(v_0|x_0)^2=\|v_0\|^2\|x_0\|^2$ が従う。故に $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在し $v_0=\lambda x_0$ が成立つ。条件 $\varphi'(0)<0$ より $\lambda\|x_0\|^2=(v_0|x_0)=\varphi'(0)<0$ となるので $\lambda<0$ である。また $E(0)=0$ より $0=\frac{1}{2}\|v_0\|^2-\frac{1}{p+1}\|x_0\|^{p+1}=\frac{1}{2}\|x_0\|^2(\lambda^2-\frac{2}{p+1}\|x_0\|^{p-1})$ が導かれるが $\varphi'(0)<0$ より $x_0\neq 0$ となるので $\lambda=\sqrt{\frac{2}{p+1}}\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}$ を得る。これは (2.7) そのものであり、この議論の大前提に矛盾する。

7．$E(0) < 0$ の場合：

(2.4) 及び (2.5) により

$$0 \le (\varphi'(t))^2 \le \frac{8}{p+1}(\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} + (p+1)E(0))\varphi(t)$$

を得る。これより

$$\varphi(t)^{\frac{p+1}{2}} \ge -(p+1)E(0) > 0$$

を得るので (2.6) より

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\ge \varphi'(0) + 4E(0)t - 2(p+3)E(0)t \\ &= \varphi'(0) - 2(p+1)E(0)t\end{aligned}$$

更には

$$\varphi(t) \ge \varphi(0) + \varphi'(0)t - (p+1)E(0)t^2$$

が従う。第 3 段と同様にこれは矛盾を導く。

３．優線型引力場の下での古典軌道：

H を内積 $(\cdot|\cdot)$ を持つ実ヒルベルトと空間とする。$p > 1$ 及び $x_0, v_0 \in H$ に対し次の初期値問題を考える：

$$(E)_-^p \begin{cases} x''(t) = -\|x(t)\|^{p-1}x(t),\ t > 0 \\ \\ (x(0), x'(0)) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

前節の議論と同様に $x \in C^2([0, T^*); H)$ なる解の存在と一意性が従い

$$E(t) = \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 + \frac{1}{p+1}\|x(t)\|^{p+1}$$

で定義されるエネルギーは保存量

$$E(t) = E(0), \quad t \in [0, T^*)$$

となる。これより

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \|x'(t)\| \le (2E(0))^{\frac{1}{2}}, \quad \sup_{t\in[0,T^*)} \|x(t)\| \le ((p+1)E(0))^{\frac{1}{p+1}} \tag{3.1}$$

が得られるので $T^* = \infty$ 即ち x は大域解であり x は

$$x, x', x'' \in (C \cap L^\infty)([0, \infty); H)$$

なるクラスに属している事が分かる。特に (3.1) と $(E)_-^p$ により

$$\sup_{t\ge0}\|x(t)\| \le ((p+1)E(0))^{\frac{1}{p+1}}, \tag{3.2}$$

$$\sup_{t\geq 0}\|x'(t)\| \leq (2E(0))^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

$$\sup_{t\geq 0}\|x''(t)\| \leq ((p+1)E(0))^{\frac{p}{p+1}} \tag{3.4}$$

が成立ち、古典軌道は有界に留まっている事が分かる。

そこで古典軌道を詳しく調べてみよう。$(E)^p_-$ は円運動する解を持つ。その特徴付けは次で与えられる。

定理５　$(E)^p_-$ の解 $x \in C^2([0,\infty);H)$ に対し次は同値である：

（1）任意の $t \geq 0$ に対し $\|x(t)\| = \|x_0\|$

（2）任意の $t \geq 0$ に対し $(x'(t)|x(t)) = 0$

（3）$x_0, v_0 \in H$ は $(v_0|x_0) = 0,\ \ \|x_0\|^{p+1} = \|v_0\|^2$ を満たし $x_0 \neq 0$ なる時 x は

$$x(t) = \cos(\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}t)x_0 + \frac{\sin(\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}t)}{\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}}v_0$$

と表される。

上の同値な命題が成立つとき任意の $t \geq 0$ に対し等式

$$\|x(t)\|^{p+1} = \|x'(t)\|^2 = \|x_0\|^{p+1} = \|v_0\|^2 = \frac{2(p+1)}{p+3}E(0)$$

が成立つ。

（証明）　$(1) \Rightarrow (2)$：$(x'(t)|x(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 0$

$(2) \Rightarrow (1)$: $\|x(t)\|^2 = \|x(0)\|^2 + \displaystyle\int_0^t \frac{d}{ds}\|x(s)\|^2 ds$

$$= \|x_0\|^2 + 2\int_0^t (x'(s)|x(s))ds = \|x_0\|^2$$

$(1) \Rightarrow (3)$:　先ず $x_0 \neq 0$ の場合を考える。

$$x''(t) = -\|x_0\|^{p-1}x(t)$$

となるので直ちに解の表示を得る。(1) と同値な (2) に於いて $t = 0$ と置くと $(v_0|x_0) = 0$ が従う。解の表示を微分して

$$x'(t) = -\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}\sin(\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}t)x_0 + \cos(\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}t)v_0$$

を得るので $(v_0|x_0)=0$ を用いると

$$(x'(t)|x(t))=\frac{\sin(\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}t)\cos(\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}t)}{\|x_0\|^{\frac{p-1}{2}}}(\|v_0\|^2-\|x_0\|^{p+1})$$

を得る。仮定 $\|x_0\|\neq 0$ と (2) より等式 $\|v_0\|^2=\|x_0\|^{p+1}$ が従う。

次に $x_0=0$ の場合を考える。(1) より任意の $t\geq 0$ に対し $x(t)=0$ となる。よって $t>0$ に対して $x'(t)=0$ となり $t\to 0$ として $v_0=x'(0)=0$ を得る。これより (3) が従う。

(3) $\Rightarrow$ (2) :　(1)$\Rightarrow$(3) と同様な計算による。

$(E)^p_\pm$ に現れる力の場は所謂中心力場なので全ての軌道は平面上に載っている。これを定式化すると次の様になる。

定理 6 $(E)^p_\pm$ の解 $x\in C^2([0,\infty);H)$ の値域 $x([0,\infty))$ は初期値 x_0,v_0 の張る H の部分空間 $M=\mathrm{span}(x_0,v_0)=\{\lambda x_0+\mu v_0\in H;\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$ に含まれる：$x([0,\infty))\subset M$

(証明)　M の直交補空間 $M^\perp=\{u\in H;\ \forall v\in M,\ (u|v)=0\}$ から任意に $u\in M^\perp$ を取り $\psi(t)=(u|x(t))$ と置く。ψ は微分方程式

$$\psi''(t)=(u|x''(t))=-\|x(t)\|^{p-1}\psi(t)$$

及び初期条件 $\psi(0)=(u|x_0)=0,\ \psi'(0)=(u|v_0)=0$ を満たす。これより

$$\begin{aligned}\psi'(t)=&\ -\int_0^t\|x(s)\|^{p-1}\psi(s)ds,\\ \psi(t)=&\ -\int_0^t\int_0^s\|x(\tau)\|^{p-1}\psi(\tau)d\tau ds=-\int_0^t(t-\tau)\|x(\tau)\|^{p-1}\psi(\tau)d\tau\end{aligned}$$

を得る。任意に $T>0$ を取り $t\in[0,T]$ で考え、積分不等式

$$|\psi(t)|\leq T\int_0^t\|x(\tau)\|^{p-1}|\psi(\tau)|d\tau$$

を得る。グロンウォールの補題より任意の $t\in[0,T]$ に対し $|\psi(t)|=0$ が従う。$T>0$ は任意であったから任意の $t\geq 0$ に対し $(u|x(t))=0$ が従う。$u\in M^\perp$ は任意であったから $x(t)\in M^{\perp\perp}=\bar{M}=M$ が従う。

さて $\dim M\leq 2$ であるので 3 つの場合に就いて夫々$(E)^p_-$ の解の軌道を考えよう。

1．$\dim M=0$ の場合

この場合は $x_0=v_0=0$ であるので $(E)^p_-$ の解は恒等的に原点に不動のままとなる。

２．$\dim M = 1$ **の場合**

この場合は $M = \mathrm{span}(x_0)$ または $M = \mathrm{span}(v_0)$ となる。$x_0 \neq 0$ の場合 $M = \mathrm{span}(x_0)$ として、$x_0 = 0$ の場合 $M = \mathrm{span}(v_0),\ v_0 \neq 0$ として考えれば良い。

(1)　$M = \mathrm{span}(x_0),\ x_0 \neq 0$ **の場合：**　$x(t) \in M = \mathrm{span}(x_0)$ であるから $x(t) = ((x(t)|x_0)/\|x_0\|^2)x_0$ と表される。このとき

$$\begin{aligned}
&\|x(t)\|^2 = (x(t)|x_0)^2/\|x_0\|^2,\\
&x''(t) = ((x''(t)|x_0)/\|x_0\|^2)x_0,\\
&\|x(t)\|^{p-1}x(t) = (|(x(t)|x_0)|^{p-1}(x(t)|x_0)/\|x_0\|^{p+1})x_0
\end{aligned}$$

が成立つので

$$(x''(t)|x_0) = -|(x(t)|x_0)|^{p-1}(x(t)|x_0)/\|x_0\|^{p-1}$$

を得る。そこで $y(t) = (x(t)|x_0)/\|x_0\|$ と置くと y は $C^2([0,\infty);\mathbb{R})$ に属し

$$(\tilde{E})^p_- \begin{cases} y''(t) = -|y(t)|^{p-1}y(t) \\ \\ y(0) = \|x_0\|,\ y'(0) = (v_0|x_0)/\|x_0\| \end{cases}$$

の解となっている。$(\tilde{E})^p_-$ に対するエネルギー保存則は

$$\tfrac{1}{2}(y'(t))^2 + \tfrac{1}{p+1}|y(t)|^{p+1} = \tfrac{1}{2}(y'(0))^2 + \tfrac{1}{p+1}|y(0)|^{p+1} \equiv E(0) \tag{3.5}$$

で与えられる。

定理７　$x_0 \neq 0$ に対し $(\tilde{E})^p_-$ の大域解 $y \in C^2([0,\infty);\mathbb{R})$ は次の性質を持つ：

(1) $T_0 > 0$ が存在し次を満たす

(a) $y'(T_0) = 0$

(b) $y'(0) > 0$ なら任意の $t \in (0, T_0)$ に対し $y'(t) > 0$
$y'(0) \leq 0$ なら任意の $t \in (0, T_0)$ に対し $y'(t) < 0$

(2) $T_1 > 2T_0$ が存在し次を満たす

(a) $y'(T_1) = 0$

(b) $y'(0) > 0$ なら任意の $t \in (T_0, T_1)$ に対し $y'(t) < 0$
$y'(0) \leq 0$ なら任意の $t \in (T_0, T_1)$ に対し $y'(t) > 0$

(3) y は周期 $T \equiv 2(T_1 - T_0)$ を持つ周期解である。即ち任意の $t \geq 0$ に対し

$$y(t+T) = y(t),\ y'(t+T) = y'(t)$$

が成立つ。

(4) T は次で与えられる：

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{2}\int_0^{((p+1)E(0))^{1/(p+1)}} \frac{1}{\sqrt{E(0) - \frac{1}{p+1}s^{p+1}}} ds \\ &= 2\sqrt{2}(p+1)^{\frac{1}{(p+1)}}(E(0))^{-\frac{p-1}{2(p+1)}} \int_0^1 \frac{1}{1-\tau^{p+1}} d\tau \\ &= 2\sqrt{2}(p+1)^{-\frac{p}{p+1}} B(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{2})(E(0))^{-\frac{p-1}{p+1}} \end{aligned}$$

ここに B はベータ函数である。

註． $s \uparrow ((p+1)E(0))^{1/(p+1)}$ なるとき

$$\begin{aligned} &E(0) - \frac{1}{p+1}s^{p+1} \\ &= ((p+1)E(0))^{p/(p+1)}(((p+1)E(0))^{1/(p+1)} - s) + O((((p+1)E(0))^{1/(p+1)} - s)^2) \end{aligned}$$

であるから (4) の積分は収束する。

(証明) (1) $T_0 > 0$ の存在を 3 つの場合に分けて証明しよう。

(a) $y'(0) > 0$ **の場合**： 任意の $t > 0$ に対し $y'(t) > 0$ であると仮定する。このとき任意の $t \geq 1$ に対し $y(t) \geq y(1) \geq y(0) > 0$ となり不等式

$$y'(t) = y'(1) - \int_1^t |y(s)|^{p-1}y(s)ds \leq y'(1) - |y(1)|^p(t-1)$$

が成立つ事となるが右辺は充分大きな t に対し負となり仮定に反する。これより $T_0 = \sup\{t > 0\,;$ 任意の $s \in [0,T]$ に対し $y'(s) > 0\}$ が $\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合の上限として定まり $y'(T_0) = 0$ 及び任意の $t \in (0, T_0)$ に対し $y'(t) > 0$ が成立つ。

(b) $y'(0) < 0$ **の場合**： 任意の $t < 0$ に対し $y'(t) < 0$ であると仮定する。このとき $y(t)$ は下に有界で単調減少となり $t \to \infty$ に於いて $-((p+1)E(0))^{2/(p+1)} \leq m \leq y(0)$ なる極限値 $m = \lim_{t\to\infty} y(t)$ を持つ。$m < 0$ であるとすると $t_0 > 0$ が存在し任意の $t \geq t_0$ に対し $y(t) \leq -|m|/2$ となり不等式

$$\begin{aligned} y'(t) = y'(t_0) - \int_{t_0}^t |y(s)|^{p-1}y(s)ds = y'(t_0) + \int_{t_0}^t |y(s)|^p ds \\ \geq y'(t_0) + (|m|/2)^p(t - t_0) \end{aligned}$$

が成立つ事となるが右辺は充分大きな t に対し正となり仮定に反する。故に $m \geq 0$ であり任意の $t \geq 0$ に対し $0 \leq m \leq y(t) \leq y(0)$ である事が分かる。方程式 $(\tilde{E})^p_-$ より $y'' \leq 0$ となるから $y'(t)$ は下に有界で単調減少となり $t \to \infty$ に於いて $-(2E(0))^{1/2} \leq \ell \leq 0$ なる極限値 $\ell = \lim_{t\to\infty} y'(t)$ を持つ。$\ell < 0$ であるとすると $t_0 > 0$ が存在し任意の $t \geq t_0$ に対し $y'(t) \leq -|\ell|/2$ となり不等式

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds \leq y(t_0) - (|\ell|/2)(t - t_0)$$

が成立つ事となるが右辺は充分大きな t に対し負となり $y(t) \geq m \geq 0$ に矛盾する。故に $\ell = 0$ であり (3.5) に於いて $t \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{p+1} m^{p+1} = \frac{1}{2}(y'(0))^2 + \frac{1}{p+1}|y(0)|^{p+1}$$

が従う。これより $y(0) < m$ となり矛盾を得る。従って $T_0 = \sup\{t > 0;$ 任意の $s \in [0,t]$ に対し $y'(s) < 0\}$ が $\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合の上限として定まり $y'(T_0) = 0$ 及び任意の $t \in (0, T_0)$ に対し $y'(t) < 0$ が成立つ。

(c) $y'(0) = 0$ **の場合**：　$y(0) > 0$ より $\delta = y(0)/2$ と置くと $\varepsilon > 0$ が存在し任意の $t \in [0, \varepsilon]$ に対し $y(t) \geq \delta > 0$ が成立つ。方程式より $y''(t) \leq -\delta^p$ が任意の $t \in [0, \varepsilon]$ に対して成立つので不等式

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(s)ds \leq -\delta^p t$$

が従う。特に $y'(\varepsilon) < 0$ となっている。(b) の場合と同様に議論すれば T_0 の存在が従う。

(2)　$T_1 > 2T_0$ の存在を 3 つの場合に分けて証明しよう。

(a) $y'(0) > 0$ **の場合**：　$y \in C^2([0,\infty) : \mathbb{R})$ の区間 $[0, T_0]$ に於ける値を用いて

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [0, T_0] \\ y(2T_0 - t), & t \in [T_0, 2T_0] \end{cases}$$

なる函数 $z : [0, 2T_0] \to \mathbb{R}$ を考える。$\varepsilon > 0$ とし $\varepsilon \to 0$ なるとき

$z'(T_0 - \varepsilon) \to y'(T_0) = 0,$
$z'(T_0 + \varepsilon) = -y'(2T_0 - (T_0 + \varepsilon)) = -y'(T_0 - \varepsilon) \to -y'(T_0) = 0,$
$z''(T_0 + \varepsilon) = y''(2T_0 - (T_0 + \varepsilon)) = y''(T_0 - \varepsilon) \to y''(T_0)$

より z は $[0, 2T_0]$ 上 C^2 級であり $(\tilde{E})^p_-$ の解となっている。解の一意性より $[0, 2T_0]$ 上 y と z は一致する。このとき $z'(2T_0) = -y'(0) < 0, z(2T_0) = y(0) > 0$ となるので (1) の (b) の場合に於ける議論により $T_1 > 2T_0$ の存在が従う。

(b) $y'(0) < 0$ **の場合**：　上と同様に z を定めると $[0, 2T_0]$ 上 y と z は一致する。このとき $z'(2T_0) = -y'(0) > 0, z(2T_0) = y(0) > 0$ となるので (1) の (a) の場合の議論により $T_1 > 2T_0$ の存在が従う。

(c) $y'(0) = 0$ **の場合**：　上と同様に z を定めると $[0, 2T_0]$ 上と y と z は一致する。このとき $z'(2T_0) = -y'(0) = 0, z(2T_0) = y(0) > 0$ となるので (1) の (c) の場合の議論により $T_1 > 2T_0$ の存在が従う。

(3) $y \in C^2([0,\infty):\mathbb{R})$ の区間 $[0,T_1]$ に於ける値を用いて

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [0,T_1] \\ y(2T_1 - t), & t \in [T_1, 2(T_1 - T_0)] \end{cases}$$

なる函数 $z : [0, 2(T_1 - T_0)] \to \mathbb{R}$ を考える。$\varepsilon > 0$ とし $\varepsilon \to 0$ なるとき
$z'(T_1 - \varepsilon) \to y'(T_1) = 0,$
$z'(T_1 + \varepsilon) = -y'(2T_1 - ((T_1 + \varepsilon)) = -y'(T_1 - \varepsilon) \to -y'(T_1) = 0,$
$z''(T_1 + \varepsilon) = y''(2T_1 - (T_1 + \varepsilon)) = y''(T_1 - \varepsilon) \to y''(T_1)$
より z は $[0, 2(T_1 - T_0)]$ 上 C^2 級であり $(\tilde{E})^p_-$ の解となっている。
解の一意性より $[0, 2(T_1 - T_0)]$ 上 y と z は一致する。このとき
$z'(2(T_1 - T_0)) = y(2T_0) = y(0),$
$z'(2(T_1 - T_0) - \varepsilon) = -y'(2T_1 - (2(T_1 - T_0) - \varepsilon)) = -y'(2T_0 + \varepsilon) \to -y'(2T_0) = y'(0)\ (\varepsilon \downarrow 0)$
より $T = 2(T_1 - T_0)$ とすれば $z(T) = y(0),\ z'(T) = y'(0)$ となる。従って $[0,\infty) \ni t \mapsto y(t+T) \in \mathbb{R}$ は $(\tilde{E})^p_-$ を満たす。解の一意性により任意の $t \geq 0$ に対し $y(t+T) = y(t)$ が成立つ。

(4) **(a)** $y'(0) > 0$ **の場合：** $[0, T_0)$ 上 $y'(t) > 0$ であるので (3.5) より

$$y'(t) = \sqrt{2(E(0) - \tfrac{1}{p+1}|y(t)|^{p+1})}$$

が成立つ。$[0,T_0) \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ の逆函数を $y^{-1} : y([0,T_0)) \ni s \mapsto y^{-1}(s) \in \mathbb{R}$ とすれば $y'(y^{-1}(s)) = \sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})},\ s = y(t) = y(y^{-1}(s)),\ 1 = y'(y^{-1}(s))(y^{-1})'(s),$
$dt = (y^{-1})'(s)ds = \frac{1}{y'(y^{-1}(s))}ds, y(T_0) = ((p+1)E(0))^{1/(p+1)}, y(0) = \|x_0\|$ より

$$T_0 = \int_0^{T_0} dt = \int_{y(0)}^{y(T_0)} \frac{1}{y'(y^{-1}(s))} ds = \int_{\|x_0\|}^{((p+1)E(0))^{1/(p+1)}} \frac{1}{\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}s^{p+1})}} ds$$

が従う。(T_0, T_1) 上 $y'(t) < 0$ であるので (3.5) より

$$y'(t) = -\sqrt{2(E(0) - \tfrac{1}{p+1}|y(t)|^{p+1})}$$

となる。$(T_0,T_1) \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ の逆函数を $y^{-1} : y((T_0,T_1)) \ni s \mapsto y^{-1}(s) \in \mathbb{R}$ とすれば $y'(y^{-1}(s))) = -\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})},\ \ dt = \frac{1}{y'(y^{-1}(s))}ds,$
$y(T_1) = -((p+1)E(0))^{1/(p+1)}, y(2T_0) = y(0) = \|x_0\|$ より

$$T_1 - 2T_0 = \int_{2T_0}^{T_1} dt = \int_{y(2T_0)}^{y(T_1)} \frac{1}{y'(y^{-1}(s))} ds = \int_{-((p+1)E(0))^{1/(p+1)}}^{\|x_0\|} \frac{1}{\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})}} ds$$

が従う。以上より

$$T = 2(T_1 - T_0) = 2\left(\int_{-((p+1)E(0))^{1/(p+1)}}^{\|x_0\|} + \int_{\|x_0\|}^{((p+1)E(0))^{1/(p+1)}}\right) \frac{1}{\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})}} ds$$

$$= \sqrt{2}\int_{-((p+1)E(0))^{1/(p+1)}}^{((p+1)E(0))^{1/(p+1)}} \frac{1}{\sqrt{E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1}}} ds$$

$$= \int_{0}^{((p+1)E(0))^{1/(p+1)}} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{E(0) - \frac{1}{p+1}s^{p+1}}} ds$$

を得る。

(b) $y'(0) \leq 0$ **の場合：** $(0, T_0)$ 上 $y'(t) > 0$ であるので (3.5) より

$$y'(t) = -\sqrt{2(E(0) - \tfrac{1}{p+1}|y(t)|^{p+1})}$$

が成立つ。$(0, T_0) \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ の逆函数を $y^{-1} : y((0, T_0)) \ni s \mapsto y^{-1}(s) \in \mathbb{R}$ とすれば $y'(y^{-1}(s)) = -\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})}$, $dt = \frac{1}{y'(y^{-1}(s))} ds, y(T_0) = -((p+1)E(0))^{1/(p+1)}$, $y(0) = \|x_0\|$ より

$$T_0 = \int_0^{T_0} dt = \int_{y(0)}^{y(T_0)} \frac{1}{y'(y^{-1}(s))} ds = \int_{-((p+1)E(0))^{1/(p+1)}}^{\|x_0\|} \frac{1}{\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})}} ds$$

が従う。(T_0, T_1) 上 $y'(t) > 0$ であるので (3.5) より

$$y'(t) = \sqrt{2(E(0) - \tfrac{1}{p+1}|y(t)|^{p+1})}$$

となる。$(T_0, T_1) \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ の逆函数を $y^{-1} : y((T_0, T_1)) \ni s \mapsto y^{-1}(s) \in \mathbb{R}$ とすれば $y'(y^{-1}(s))) = \sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})}$, $dt = \frac{1}{y'(y^{-1}(s))} ds$, $y(T_1) = ((p+1)E(0))^{1/(p+1)}$, $y(2T_0) = y(0) = \|x_0\|$ より

$$T_1 - 2T_0 = \int_{y(2T_0)}^{y(T_1)} \frac{1}{y'(y^{-1}(s))} ds = \int_{\|x_0\|}^{((p+1)E(0))^{1/(p+1)}} \frac{1}{\sqrt{2(E(0) - \frac{1}{p+1}|s|^{p+1})}} ds$$

が従う。(a) の場合と同様に T の表示を得る。

(2) $M = \mathrm{span}(v_0)$, $v_0 \neq 0$ **の場合:** $x(t) \in M = \mathrm{span}(v_0)$ であるから $x(t) = ((x(t)|v_0)/\|v_0\|^2)v_0$ と表される。$y(t) = (x(t)|v_0)/\|v_0\|$ と置くと y は $C^2([0, \infty); \mathbb{R})$ に属し

$$(\tilde{E})^p_- \begin{cases} y''(t) = -|y(t)|^{p-1}y(t) \\ \\ y(0) = (x_0|v_0)/\|v_0\|, \quad y'(0) = \|v_0\| \end{cases}$$

の解となっている。y に対して定理 7 と同様な命題が成立つ。但し $y'(0) > 0$ であるので (1) と (2) の (b) の主張は前半の場合のみ意味を持つ。

3. $\dim M = 2$ の場合

この場合 x_0 と v_0 は一次独立であり特に $\|x_0\| \neq 0, \|v_0\| \neq 0,\ 0 \leq |(x_0|v_0)| < \|x_0\|\|v_0\|$ となっている。$e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ を $|e_1| = |e_2| = 1,\ e_1 \cdot e_2 = 0$ なるものとする。ここに $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2,\ |u| = \sqrt{u \cdot u}$ であるとする。さて

$$T_\pm\left(\tfrac{x_0}{\|x_0\|}\right) = e_1,\ T_\pm\left(\tfrac{v_0}{\|v_0\|}\right) = \tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|\|v_0\|} e_1 \pm \left(1 - \left(\tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|\|v_0\|}\right)^2\right)^{1/2} e_2 \tag{3.6}$$

と定めると $M = \mathrm{span}(x_0, v_0) = \{\lambda x_0 + \mu v_0 \in H; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ 上で

$$T_\pm(\lambda x_0 + \mu v_0) = \left(\lambda\|x_0\| + \mu\tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|}\right) e_1 \pm \mu\left(1 - \left(\tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|\|v_0\|}\right)^2\right)^{1/2} \|v_0\| e_2 \tag{3.7}$$

なる線型写像 $T_\pm : M \to \mathbb{R}^2$ が定まる。Range $T_\pm = \mathrm{span}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$ より $T_\pm$ は全射で

$$\begin{aligned}
|T_\pm(\lambda x_0 + \mu v_0)|^2 &= \left(\lambda\|x_0\| + \mu\frac{(x_0 v_0)}{\|x_0\|}\right)^2 + \mu^2\left(1 - \left(\frac{(x_0 v_0)}{\|x_0\|\|v_0\|}\right)^2\right)\|v_0\|^2 \\
&= \lambda^2\|x_0\|^2 + 2\lambda\mu(x_0|v_0) + \mu^2\|v_0\|^2 \\
&= \|\lambda x_0 + \mu v_0\|^2
\end{aligned}$$

より $T_\pm$ は等距離特に単射であり $T_\pm$ は M と $\mathbb{R}^2$ との線型同型を与える。さて $y(t) = T_\pm x(t)$ と置くと $y \in C^2([0,\infty); \mathbb{R}^2)$ であり y は

$$y''(t) = T_\pm x''(t) = -\|x(t)\|^{p-1} T_\pm x(t) = -|y(t)|^{p-1} y(t), \tag{3.8}$$

$$y(0) = T_\pm x_0 = \|x_0\| e_1, \tag{3.9}$$

$$y'(0) = T_\pm v_0 = \tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|} e_1 \pm \left(1 - \left(\tfrac{(x_0 v_0)}{\|x_0\|\|v_0\|}\right)^2\right)^{1/2} \|v_0\| e_2 \tag{3.10}$$

を満たす。さて $y(t) \in \mathbb{R}^2$ を極座標表示し

$$\begin{aligned}
y(t) &= (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)) = r(t) e_\rho(t) \\
e_\rho(t) &= (\cos\theta(t), \sin\theta(t))
\end{aligned}$$

と置く。$e_\rho(t)$ に垂直な単位ベクトルとして

$$e_\varphi(t) = (-\sin\theta(t), \cos\theta(t))$$

を取る。$e_\rho'(t) = \theta'(t) e_\varphi(t)$ 及び $e_\varphi'(t) = -\theta'(t) e_\rho(t)$ により

$$y'(t) = r'(t) e_\rho(t) + r(t)\theta'(t) e_\varphi(t), \tag{3.11}$$

$$y''(t) = (r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2) e_\rho(t) + (2r'(\theta)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)) e_\varphi(t) \tag{3.12}$$

$$|y(t)|^{p-1} y(t) = r(t)^p e_\rho(t) \tag{3.13}$$

となるので (3.8) は

$$\begin{cases} r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2 = -r(t)^p, & (3.14) \\ \\ 2r'(\theta)\theta'(t) + r(t)\theta''(t) = 0 & (3.15) \end{cases}$$

と同値となる。さて $e_1 = e_\rho(0), e_2 = e_\varphi(0)$ と定めると (3.9)-(3.11) より

$$r(0) = \|x_0\|,\ r'(0) = \tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|},\ \theta'(0) = \pm\left(1 - \left(\tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|\|v_0\|}\right)^2\right)^{1/2} \tfrac{\|v_0\|}{\|x_0\|} \tag{3.16}$$

が従う。特に

$$r(0) > 0,\ \theta'(0) \neq 0$$

であり $\ell = r(0)^2\theta'(0)$ と置くと $\ell \neq 0$ となる。(3.15) は

$$\frac{d}{dt}(r(t)^2\theta'(t)) = 0$$

と同値であり任意の $t \geq 0$ に対し

$$r(t)^2\theta'(t) = \ell \tag{3.17}$$

が成立つ。特に任意の $t \geq 0$ に対し $r(t) \neq 0, \theta'(t) \neq 0$ である事が分かる。
(3.17) により (3.14) は

$$r''(t) - \tfrac{\ell^2}{r(t)^3} = -r(t)^p \tag{3.18}$$

と書き換えられる。

定理 8　$x_0, v_0 \in H$ を一次独立とし $M = \mathrm{span}(x_0, v_0)$ とする。$\ell = \pm(\|x_0\|\|v_0\|)^2 - (x_0|v_0)^2)^{1/2}$ に対し微分方程式

$$(e)^p_- \begin{cases} r''(t) = \tfrac{\ell^2}{r(t)^3} - r(t)^p, \\ \\ r(0) = \|x_0\|, \quad r'(0) = \tfrac{(x_0|v_0)}{\|x_0\|} \end{cases}$$

は $r \in C^2([0,\infty);\mathbb{R})$ なる唯一つの正値解を持つ。更に次が成立つ。

(1) 有効エネルギー

$$E_{\mathrm{eff}}(t) = \frac{1}{2}(r'(t))^2 + \frac{1}{p+1}r(t)^{p+1} + \frac{\ell^2}{2r(t)^2}$$

は保存量である。

(2)　$T_0 > 0$ が存在し次を満たす。

(a)　$r'(T_0) = 0$

(b)　$r'(0) > 0$ なら任意の $t \in (0, T_0)$ に対し $r'(t) > 0$
$r'(0) \leq 0$ なら任意の $t \in (0, T_0)$ に対し $r'(t) < 0$

(3)　$T_1 > 2T_0$ が存在し次を満たす。

(a)　$r'(T_1) = 0$

(b)　$r'(0) > 0$ なら任意の $t \in (T_0, T_1)$ に対し $r'(t) < 0$
$r'(0) \leq 0$ なら任意の $t \in (T_0, T_1)$ に対し $r'(t) > 0$

(4)　r は周期 $T \equiv 2(T_1 - T_0)$ を持つ周期解である。即ち任意の $t \geq 0$ に対し

$$r(t+T) = r(t),\ r'(t+T) = r(t)$$

が成立つ。

(5)　T は次で与えられる：

$$T = \sqrt{2}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E_{\mathrm{eff}}(0) - \frac{1}{p+1}s^{p+1} - \frac{\ell^2}{2s^2}}}ds$$

但し $r_{\max}$，$r_{\min}$ は $E_{\mathrm{eff}}(0) = f(r)$ の $r_{\max} > r_{\min} > 0$ なる解とする。ここに $f(r) = \frac{1}{p+1}r^{p+1} + \frac{\ell^2}{2r^2}$ とする。

(6)　$\theta_0 \in \mathbb{R}$ を任意に与え

$$e_1 = (\cos\theta_0,\ \sin\theta_0),\ e_2 = (-\sin\theta_0, \cos\theta_0)$$

と置き (3.6) で与えられる線型同型写像 $T_\pm : M \to \mathbb{R}^2$ を定める。このとき

$$x(t) = T_\pm^{-1}((r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)))$$
$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{\ell}{r(\tau)^2}d\tau$$

で与えられる x は $(E)_-^p$ の唯一つの解である。

註　$T_\pm$ の符号は、どちらでも構わない。符号を一つ定める事は平面の向きを指定する事と同値である。

(証明)　(1)：　$r(0) = \|x_0\| > 0,\ r'(0) = (x_0|v_0)/\|x_0\| \in [-\|v_0\|, \|v_0\|]$ に対し

$$E_{\mathrm{eff}}(0) = \frac{1}{2}(r'(0))^2 + \frac{1}{p+1}r(0)^{p+1} + \frac{\ell^2}{2r(0)^2},$$
$$R_p = ((p+1)E_{\mathrm{eff}}(0))^{1/(p+1)}, R_1 = (2E_{\mathrm{eff}}(0))^{1/2}$$

と置く。定義より

$$|\ell|/R_1 < r(0) < R_p,\ |r'(0)| < R_1$$

が従う。そこで $D = [|\ell|/R_1,\ R_p] \times [-R_1, R_1] \subset \mathbb{R}^2$ と置くと D は $(r(0), r'(0)) \subset D$ なる $\mathbb{R}^2$ の有界閉部分集合となる。また

$$f : D \ni (r, v) \mapsto (v, \frac{\ell^2}{r^2} - r^p) \in \mathbb{R}^2$$

は有界でリプシッツ連続写像となる。よって $(e)^p_-$ は一意的な時間局所解 $r \in C^2([0,T];\mathbb{R})$ を持つ。ここに T は D を特徴付けるパラメタ $R_1, R_p, |\ell|$ にのみ依存する (f の D 上の最大値もそうである)。さて $r \in C^2([0,T];\mathbb{R})$ は $[0,T]$ 上 $E_{\mathrm{eff}}(t) = E_{\mathrm{eff}}(0)$ を満たす。従って $(r(T), r'(T)) \in \mathrm{Int}D$ となり、これを初期値として r は $[T, 2T]$ 上に延長される。以下同様にして $(e)^p_-$ は $r \in C^2([0,\infty);\mathbb{R})$ なる解を持ち任意の $t \geq 0$ に対し $(r(t), r'(t)) \in \mathrm{Int}D$ 特に $r(t) > |\ell|/R_1$ となっている事が分かる。

(2)：先ず「任意の $t > 0$ に対し $r'(t) > 0$」であると仮定し矛盾を導こう。$r(t)$ は上に有界で単調増加となるので極限 $R = \lim_{t\to\infty} r(t) \in (0,\infty)$ が存在する。このとき $V \geq 0$ が定まり極限

$$\lim_{t\to\infty}(r'(t))^2 = 2E_{\mathrm{eff}}(0) - \frac{2}{p+1}R^{p+1} - \frac{\ell^2}{R^2} = V^2,\ \lim_{t\to\infty} r'(t) = V$$

が定まる。$V > 0$ ならば $t_0 > 0$ が存在し任意の $t \geq t_0$ に対し $r'(t) \geq V/2$ となり

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t r'(s)ds \geq r(t_0) + \frac{V}{2}(t - t_0)$$

より右辺は非有界となり矛盾が導かれるので $V = 0$ となる。従って等式

$$E_{\mathrm{eff}}(0) = \frac{1}{p+1}R^{p+1} + \frac{\ell^2}{2R^2}$$

が成立つ。さてここで $R^{p+3} > \ell^2$ であるとすると $t_1 > 0$ が存在し任意の $t \geq t_1$ に対し $R^{p+3} \geq r(t)^{p+3} > \ell^2$ となり r は単調増加であるから

$$\begin{aligned} r'(t) &= r'(t_1) + \int_{t_1}^t r''(s)ds = r'(t_1) - \int_{t_1}^t (r(s)^p - \frac{\ell^2}{r(s)^3})ds \\ &\leq r'(t_1) - (r(t_1)^p - \frac{\ell^2}{r(t_1)^3})(t - t_1) \end{aligned}$$

となり左辺は下に非有界となり矛盾する。故に $R^{p+3} \leq \ell^2$ が成立つ。一方
$f(r) = \frac{1}{p+1}r^{p+1} + \frac{\ell^2}{2r^2}$ で定まる函数 $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は $(0, \ell^{2/(p+3)}]$ 上単射で単調減少であり任意の $t \geq 0$ に対し $r(t) \geq R \geq \ell^{2/(p+3)}$ であるから

$$E_{\mathrm{eff}}(0) = \frac{1}{p+1}R^{p+1} + \frac{\ell^2}{2R^2} \leq \frac{1}{p+1}r(t)^{p+1} + \frac{\ell^2}{2r(t)^2} \leq E_{\mathrm{eff}}(t) = E_{\mathrm{eff}}(0)$$

より $r'(t) = R$ が任意の $t \geq 0$ に対し成立つ事になる。これより $r'(t) = 0$ となり矛盾が得られる。

次に「任意の $t > 0$ に対し $r'(t) < 0$」であると仮定し矛盾を導こう。$r(t)$ は下に有界で単調減少となるので極限 $R = \lim_{t\to\infty} r(t) \in (0,\infty)$ が存在する。このとき $V \leq 0$ が定まり極限

$$\lim_{t\to\infty}(r'(t))^2 E_{\text{eff}}(0) - \frac{2}{p+1}R^{p+1} - \frac{\ell^2}{R^2} = V^2,\ \lim_{t\to\infty} r'(t) = V$$

が定まる。$V < 0$ ならば上と同様 $r(t) \geq R$ に矛盾するので $V = 0$ となり等式

$$E_{\text{eff}}(0) = \frac{1}{p+1}R^{p+1} + \frac{\ell^2}{2R^2}$$

が成立つ。ここで $R^{p+3} > \ell^2$ であるとすると任意の $t \geq 0$ に対し $r(t)^{p+3} \geq R^{p+3} > \ell^2$ となり r は単調減少であるから

$$\begin{aligned} r'(t) &= r'(0) + \int_0^t r''(s)ds = r'(0) - \int_0^t (r(s)^p - \frac{\ell^2}{r(s)^3})ds \\ &\leq r'(0) - (R^p - \frac{\ell^2}{R^3})(t) \end{aligned}$$

となり左辺は下に非有界となり矛盾する。故に $R^{p+3} \leq \ell^2$ が成立つ。もし $R \leq r(t) \leq \ell^{2/(p+3)}$ なる $t \geq 0$ が存在したとすると上と同様な議論で $r(t) = R$ でなければならないので $r(t) > R$ を満たす任意の t に対し不等式 $R \leq \ell^{2/(p+3)} < r(t)$ が成立つ事となる。そこで $t \to \infty$ とすると $R = \ell^{2/(p+3)}$ が成立つ。さて $f : [R,\infty) \to R$ は単射で単調増加であり任意の $t \geq 0$ に対し $R \leq r(t)$ であるから

$$E_{\text{eff}}(0) = \frac{1}{p+1}R^{p+1} + \frac{\ell^2}{2R^2} \leq \frac{1}{p+1}r(t)^{p+1} + \frac{\ell^2}{2r(t)^2} \leq E_{\text{eff}}(t) = E_{\text{eff}}(0)$$

より $r(t) = R$ が任意の $t \geq 0$ に対し成立つ事になる。これより $r'(t) = 0$ となり矛盾が得られる。

以上の議論と定理７の (1) の証明に於ける議論により (2) の結論が従う。

(3)　(2) 及び定理７の (2) の証明に於ける議論により従う。

(4)　定理７の (3) の証明と同様である。

(5)　定理７の (4) の証明と同様である。

(6)　θ に就いての方程式 (3.17) を解き $(e)_-^p$ の解 r と共に

$$y(t) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$$

に代入し線型同型写像 $T_\pm : M \to \mathbb{R}^2$ の逆写像 $T_\pm^{-1} : \mathbb{R}^2 \to M$ で $M \subset H$ に戻せば良い。

参考文献：

大谷光春，理工基礎　常微分方程式論，サイエンス社
ゴールドスタイン，新版　古典力学，吉岡書店