合成函数の高階導函数

平成 21 年 1 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

多変数函数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と一変数函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の合成函数 $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の高階導函数を f と g の高階導函数を用いて具体的に表示する方法を纏めて置こう。ここでは多重指数の記法は自由に用いるものとし函数は必要な滑らかさを持つものと仮定する。

1. 一般の場合

$\alpha \neq 0$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し α を越えない 0 でない多重指数の全体を $\Lambda(\alpha)$ とする：

$$\Lambda(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}; 0 \neq \beta \leq \alpha\}$$

$\Lambda(\alpha)$ に属す β の各成分 β_j の各成分 β_j を取り得る範囲は $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ であり $(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (0, \cdots, 0)$ は排除されるので $\sharp\Lambda(\alpha) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j + 1) - 1$ である。

$$J(\alpha) = \{(j_\beta)_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \in \mathbb{Z}^{\Lambda(\alpha)}_{\geq 0}; \sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} j_\beta \beta = \alpha\}$$

と置く。また $1 \leq k \leq |\alpha|$ なる k に対し

$$I_k(\alpha) = \{(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}) \ \in (\Lambda(\alpha))^k \ ; \ \alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(k)} = \alpha\}$$

と置く。$I_1(\alpha) = \{\alpha\}, \ I_{|\alpha|}(\alpha) = \{(\underbrace{e_1, \cdots, e_1}_{\alpha_1}, \cdots, \underbrace{e_j, \cdots, e_j}_{\alpha_j}, \cdots, \underbrace{e_n, \cdots, e_n}_{\alpha_n})\}$ となる。ここに (e_j) は $\mathbb{R}^n$ の標準単位ベクトルである。

定理 1　$\alpha \neq 0$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha(f \circ g) \\
&= \sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}) \in I_k(\alpha)} \frac{1}{k!}(f^{(k)} \circ g) \prod_{\ell=1}^{k} \frac{\partial^{\alpha^{(\ell)}} g}{\alpha^{(\ell)}!} \\
&= \sum_{(j_\beta)_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \in J(\alpha)} \frac{1}{\displaystyle\prod_{\beta \in \Lambda(\alpha)} j_\beta!}(f^{(\sum_{\beta \in \Lambda(\alpha)} j_\beta)} \circ g) \prod_{\beta \in \Lambda(\alpha)} \left(\frac{\partial^\beta g}{\beta!}\right)^{j_\beta}
\end{aligned}$$

(証明)　一点 $a \in \mathbb{R}^n$ での $f \circ g$ のテイラー展開を考える。先ず $f : \mathbb{R} \ni y \mapsto f(y) \in \mathbb{R}$ の $g(a) \in \mathbb{R}$ に於ける m 次迄のテイラー展開に $y = g(x)$ を代入すると

$$f(g(x)) - f(g(a)) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(g(a))(g(x) - g(a))^k + o(|x-a|^m)$$

が従う。ここで $g(x) - g(a) = O(|x-a|)$ を用いた。一方

$$g(x) - g(a) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha g)(a)(x-a)^\alpha + o(|x-a|^m)$$

であるから $k \geq 1$ に対し

$$(g(x) - g(a))^k = \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha g)(a)(x-a)^\alpha \right)^k + o(|x-a|^{mk})$$

を得る。右辺の和の k 乗の展開を二通りに表示しよう。初めに (α の重複を許して) 直接展開し各因子から現れる多重指数を $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}$ と表すと

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \cdots \sum_{1 \leq |\alpha^{(k)}| \leq m} \left(\prod_{\ell=1}^{k} \frac{(\partial^{\alpha^{(\ell)}})(a)}{\alpha^{(\ell)}!} \right) (x-a)^{\alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(k)}}$$

となる。次に $N = \sharp \left(\bigcup_{|\alpha| \leq m} \Lambda(\alpha) \right)$ として

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha g)(a)(x-a)^\alpha = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha^{(j)}!} (\partial^{\alpha^{(j)}} g)(a)(x-a)^{\alpha^{(j)}}$$

と表し多項展開を用いると

$$\sum_{j_1 + \cdots + j_N = k} \frac{k!}{j_1! \cdots j_N!} \left(\prod_{\ell=1}^{N} \left(\frac{(\partial^{\alpha^{(\ell)}} g)(a)}{\alpha^{(\ell)}!} \right)^{j_\ell} \right) (x-a)^{j_1 \alpha^{(1)} + \cdots + j_N \alpha^{(N)}}$$

となる。

　よって $f \circ g$ のテイラー展開は初めの方法を用いると

$$\begin{aligned} & f(g(x)) - f(g(a)) \\ &= \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(k)} = \alpha \\ \alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)} \neq 0}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(g(a)) \prod_{\ell=1}^{k} \frac{(\partial^{\alpha^{(\ell)}} g)(a)}{\alpha^{(\ell)}!} \right) (x-a)^\alpha + o(|x-a|^m) \end{aligned}$$

となり次の方法を用いると

$$
\begin{aligned}
&f(g(x))-f(g(a))\\
&=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j_1+\cdots+j_N=k}\frac{1}{j_1!\cdots j_N!}f^{(k)}(g(a))\prod_{\ell=1}^{N}\left(\frac{(\partial^{\alpha^{(\ell)}}g)(a)}{\alpha^{(\ell)}!}\right)^{j_\ell}\right)(x-a)^{j_1\alpha^{(1)}+\cdots+j_N\alpha^{(N)}}\\
&\quad+o(|x-a|^m)\\
&=\sum_{1\le|\alpha|\le m}\left(\sum_{j_1\alpha^{(1)}+\cdots+j_N\alpha^{(N)}=\alpha}\frac{1}{j_1!\cdots j_N!}f^{(j_1+\cdots+j_N)}(g(a))\prod_{\ell=1}^{N}\left(\frac{(\partial^{\alpha^{(\ell)}}g)(a)}{\alpha^{(\ell)}!}\right)^{j_\ell}\right)(x-a)^{\alpha}\\
&\quad+o(|x-a|^m)
\end{aligned}
$$

となる。夫々のテイラー展開の $(x-a)^\alpha$ の係数はテイラー展開の一意性により

$$\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha(f\circ g)(a)$$

に等しいので定理の等式が従う。

2. 一次元の場合

前節の特別な場合として一次元の問題を考える。$m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\Lambda(m)=\{k\in\mathbb{Z};1\le k\le m\},\quad \sharp\Lambda(m)=m$$

であるから

$$J(m)=\{(j_1,\cdots,j_m)\in\mathbb{Z}_{\ge0}^m;\ \sum_{\ell=1}^{m}\ell j_\ell=j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m\}$$

となり $1\le k\le m$ なる $k\in\mathbb{Z}$ に対し

$$I_k(m)=\{(i_1,\cdots,i_k)\in\mathbb{Z}_{>0}^k;\ i_1+\cdots+i_k=m\}$$

となる。従って定理 1 は次の様に書き換えられる。

定理 2　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m!}(f\circ g)^{(m)}\\
&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1,\cdots,i_k\neq0}}\frac{1}{k!}(f^{(k)}\circ g)\prod_{\ell=1}^{k}\frac{g^{(i_\ell)}}{i_\ell!}\\
&=\sum_{\substack{j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m\\ j_1,j_2,\cdots,j_m\ge0}}\frac{1}{j_1!\cdots j_m!}(f^{(j_1+\cdots+j_m)}\circ g)\prod_{\ell=1}^{m}\left(\frac{g^{(\ell)}}{\ell!}\right)^{j_\ell}
\end{aligned}
$$

3. 応用例

ここでは幾つかの応用例を挙げよう。

命題 1　$\alpha \neq 0$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 及び $t > 0$ に対し

$$\sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}} \alpha!\ t^k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{|\alpha^{\ell}|!}{\alpha^{(\ell)}!} = |\alpha|!\ t(1+t)^{|\alpha|-1}$$

(証明)　$0 < s < 1$ に対し $U_s = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 + \cdots + x_n < 1 - s\}$ とし $g : U_s \to \mathbb{R},\ f : (-\infty, 1/s) \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1-(x_1+\cdots+x_n)}, \quad & x \in U_s, \\ f(y) &= \frac{1}{1-sy}, & y < 1/s \end{aligned}$$

で定める。このとき

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)} - s} = \frac{1-(x_1+\cdots+x_n)}{1-s-(x_1+\cdots+x_n)} \\ &= 1 + \frac{s}{1-s-(x_1+\cdots+x_n)} \end{aligned}$$

であるから

$$\partial^\alpha (f \circ g)(x) = |\alpha|!\ s(1-s-(x_1+\cdots+x_n))^{-|\alpha|-1}$$

となる。一方 $g(0) = 1$,

$$\begin{aligned} &f^{(k)}(y) = k!\ s^k (1-sy)^{-k-1}, \\ &(\partial^\beta g)(x) = |\beta|!\ (1-(x_1+\cdots+x_n))^{-|\beta|-1} \end{aligned}$$

であるから定理 1 を適用し $x = 0$ とすると

$$|\alpha|!\ s(1-s)^{-|\alpha|-1} = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}} \alpha!\ \frac{s^k}{(1-s)^{k+1}} \prod_{\ell=1}^{k} \frac{|\alpha^{(\ell)}|!}{\alpha^{(\ell)}!}$$

となる。そこで

$$t = \frac{s}{1-s} \Leftrightarrow s = \frac{t}{1+t}$$

と置いて

$$\sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)} \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}} \alpha!\ t^k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{|\alpha^{(\ell)}|!}{\alpha^{(\ell)}!} = |\alpha|!\ s(1-s)^{-|\alpha|} = |\alpha|!\ s\left(\frac{t}{s}\right)^{|\alpha|}$$

$$= |\alpha|!\ t^{|\alpha|} s^{-|\alpha|+1} = |\alpha|!\ t^{|\alpha|}(t/(1+t))^{-|\alpha|+1} = |\alpha|!\ t(1+t)^{|\alpha|-1}$$

を得る。

命題 2　$s \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ に対し $\langle x\rangle^s = (1+|x|^2)^{s/2}$ と置く。このとき任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し次の不等式が成立つ：

$$|\partial^\alpha \langle x\rangle^s| \leq ((|s| \vee 2)+1)^{|\alpha|}|\alpha|!\ \langle x\rangle^{s-|\alpha|}$$

(証明)　$f(y) = (1+y)^{s/2},\ g(x) = |x|^2$ とすれば $f^{(k)}(y) = \left(\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{s}{2}-\ell\right)\right)(1+y)^{s/2-k}$, $\langle x\rangle^s = (f\circ g)(x)$ であるから定理 1 を用いると

$$\partial^\alpha\langle x\rangle^s = \sum_{k=1}^{|\alpha|}\sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}}\frac{\alpha!}{k!}\left(\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{s}{2}-\ell\right)\right)\langle x\rangle^{s-2k}\prod_{\ell=1}^{k}\frac{\partial^{\alpha^{(\ell)}}|x|^2}{\alpha^{(\ell)}!}$$

となる。ここで

$$\partial^{\alpha^{(\ell)}}|x|^2 = \begin{cases} 0 & (|\alpha^{(\ell)}| \geq 3) \\ 0\ \text{または}\ 2 & (|\alpha^{(\ell)}| = 2) \\ 2x^{\alpha^{(\ell)}} & (|\alpha^{(\ell)}| = 1) \end{cases}$$

であるから

$$|\partial^{\alpha^{(\ell)}}|x|^2| \leq 2|x|^{2-|\alpha^{(\ell)}|}$$

が成立ち $\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)} = \alpha$ であるから

$$\begin{aligned}\prod_{\ell=1}^{k}|\partial^{\alpha^{(\ell)}}|x|^2| &\leq 2^k|x|^{2k-(|\alpha^{(1)}|+\cdots+|\alpha^{(k)}|)} = 2^k|x|^{2k-|\alpha|} \\ &\leq 2^k\langle x\rangle^{2k-|\alpha|}\end{aligned}$$

を得る。さて $|s| \leq 2$ ならば

$$\left|\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{s}{2}-\ell\right)\right| \leq \prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\left|\frac{s}{2}\right|+\ell\right) \leq \prod_{\ell=0}^{k-1}(1+\ell) = k!$$

$|s| \geq 2$ ならば

$$\left|\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{s}{2}-\ell\right)\right| \leq \prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\left|\frac{s}{2}\right|+\ell\right) \leq \prod_{\ell=0}^{k-1}\left|\frac{s}{2}\right|(1+\ell) = \left|\frac{s}{2}\right|^k k!$$

と評価する事により

$$\left|\prod_{\ell=0}^{k-1}\left(\frac{s}{2}-\ell\right)\right| \leq \left(1\vee\left|\frac{s}{2}\right|\right)^k k!$$

を得る。以上より

$$
\begin{aligned}
|\partial^\alpha \langle x\rangle^s| &\le \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}} \alpha!\ (2\vee|s|)^k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\alpha^{(\ell)}!} \right) \langle x\rangle^{s-|\alpha|} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}} \alpha!\ (2\vee|s|)^k \prod_{\ell=1}^{k} \frac{|\alpha^{(\ell)}|!}{\alpha^{(\ell)}!} \right) \langle x\rangle^{s-|\alpha|} \\
&= |\alpha|!\ (2\vee|s|)(1+(2\vee|s|))^{|\alpha|-1} \langle x\rangle^{s-|\alpha|}
\end{aligned}
$$

が従う。最後の等式は命題 1 による。

命題 2 と同様の議論により次の不等式が成立つ。

$$
|\partial^\alpha |x|^s| \le ((|s|\vee 2)+1)^{|\alpha|}\ |\alpha|!\ |x|^{s-|\alpha|}
$$

これより特に次の不等式が従う：

$$
|\partial^\alpha |x|| \le 3^{|\alpha|}|\alpha|!\ |x|^{1-|\alpha|}, \quad |\partial^\alpha (|x|^{-1})| \le 3^{|\alpha|}\ |\alpha|!\ |x|^{-1-|\alpha|}
$$

命題 3　$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は零点を持たないものとすると $\alpha\neq 0$ なる $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ に対し

$$
\partial^\alpha \left(\frac{1}{f}\right) = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha \\ \alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\neq 0}} \frac{(-1)^k \alpha!}{\prod_{\ell=1}^{k} \alpha^{(\ell)}!}\ \frac{1}{f}\ \prod_{\ell=1}^{k} \frac{\partial^{\alpha^{(\ell)}} f}{f}
$$

(証明)　定理 1 の f を $f(y)=1/y$ とし、g を改めて f と書き直せば

$$
\frac{d^k}{dy^k}\frac{1}{y} = \frac{(-1)^k k!}{y^{k+1}}
$$

である事から系が従う。

命題 4

$$
\frac{d^m}{dx^m}\left(f\left(\frac{a}{x}\right)\right) = (-1)^m \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \frac{(m-1)!}{(m-j-1)!} \frac{a^{m-j}}{j!} x^{j-2m} f^{(m-j)}\left(\frac{a}{x}\right)
$$

系 1

$$
\frac{d^m}{dx^m} \exp\left(\frac{a}{x}\right) = \left[(-1)^m \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \frac{(m-1)!}{(m-j-1)!} \frac{a^{m-j}}{j!} x^j \right] \frac{1}{x^{2m}} \exp\left(\frac{a}{x}\right)
$$

系 2

$$\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\left[\sum_{\substack{0\le 2j\le m\\ 0\le k\le m-j-1}}\binom{m-j}{m-j-k}\frac{(-1)^{m-j-k}m!(m-j-1)!2^{m-2j}}{(m-2j)!j!k!(k-1)!}x^{m-2j}(1-x^2)^{k+2j}\right]$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{2m}}\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

(証明)　定理 2 を $g(x)=a/x$ として用いると $g^{(\ell)}(x)=(-1)^\ell \ell!\ ax^{-\ell-1}$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}\left(f\left(\frac{a}{x}\right)\right) &= \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1,\cdots,i_k\neq 0}} \frac{m!}{k!}f^{(k)}\left(\frac{a}{x}\right)\prod_{\ell=1}^k(-1)^{i_\ell}ax^{-i_\ell-1}\\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1,\cdots,i_k\neq 0}} \frac{m!}{k!}f^{(k)}\left(\frac{a}{x}\right)(-1)^m a^k x^{-m-k}\\
&= (-1)^m\sum_{k=1}^m\left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1,\cdots,i_k\neq 0}}1\right)\frac{m!}{k!}a^k x^{-m-k}f^{(k)}\left(\frac{a}{x}\right)\\
&= (-1)^m\sum_{k=1}^m\binom{m-1}{k-1}\frac{m!}{k!}a^k x^{-m-k}f^{(k)}\left(\frac{a}{x}\right)\\
&= (-1)^m\sum_{k=1}^m\frac{(m-1)!}{(m-k)!(k-1)!}\frac{m!}{k!}a^k x^{-m-k}f^{(k)}\left(\frac{a}{x}\right)\\
&= (-1)^m\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}\frac{(m-1)!}{(m-j-1)!}\frac{a^{m-j}}{j!}x^{j-2m}f^{(m-j)}\left(\frac{a}{x}\right)
\end{aligned}$$

を得る。この等式を $f(x)=e^x$ に対して用いたものが系 1 である。次に $f(y)=\exp(-1/y),\ g(x)=$

$1-x^2$ として定理 2 を用いると $\ell \geq 3$ ならば $g^{(\ell)} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dx^m}\left(\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)\right) \\
&= \sum_{j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m} \frac{m!}{j_1!\cdots j_m!} f^{(j_1+\cdots+j_m)}(g(x)) \prod_{\ell=1}^{m} \left(\frac{g^{(\ell)}(x)}{\ell!}\right)^{j_\ell} \\
&= \sum_{j_1+2j_2=m} \frac{m!}{j_1!j_2!} f^{(j_1+j_2)}(g(x)) \left(\frac{-2x}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{-2}{2!}\right)^{j_2} \\
&= \sum_{0\leq 2j\leq m} \frac{(-1)^{m-j} m! 2^{m-2j}}{(m-2j)!1!} x^{m-2j} f^{(m-j)}(g(x))
\end{aligned}$$

が成立つ。$f^{(m-j)}(g(x))$ を系 1 を用いて表すと

$$f^{(m-j)}(g(x)) = \left[(-1)^{m-j} \sum_{k=0}^{m-j-1} \binom{m-j}{m-j-k} \frac{(m-j-1)!}{(k-1)!} \frac{(-1)^{m-j-k}}{k!} (g(x))^k\right] \frac{f(g(x))}{(g(x))^{2(m-j)}}$$

$$= (-1)^{m-j} \left[\sum_{k=0}^{m-j-1} \binom{m-j}{m-j-k} \frac{(m-j-1)!}{(k-1)!} \frac{(-1)^{m-j-k}}{k!} (1-x^2)^{k+2j}\right] \frac{1}{(1-x^2)^{2m}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

となる。以上より系 2 が従う。

注　系 1、系 2 は

$$\begin{aligned}
&\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(\frac{a}{x}\right) = P_{m-1}(x)\frac{1}{x^{2m}}\exp\left(\frac{a}{x}\right), \\
&\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = Q_{3m-2}(x)\frac{1}{(1-x^2)^{2m}}\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right),
\end{aligned}$$

$P_{m-1}(x)$ は $(m-1)$ 次の多項式、$Q_{3m-2}(x)$ は $(3m-2)$ 次の多項式

の形の表示を具体的に書き下したものである。

命題 5

$$\frac{d^m}{dx^m}(f(ax^2)) = \sum_{0\leq 2j\leq m} \frac{m! 2^{m-2j}}{(m-2j)!j!} a^{m-j} x^{m-2j} f^{(m-j)}(ax^2)$$

系 1

$$\frac{d^m}{dx^m}(\exp(ax^2)) = \left[\sum_{0\leq 2j\leq m} \frac{m! 2^{m-2j}}{(m-2j)!j!} a^{m-j} x^{m-2j}\right] \exp(ax^2)$$

(証明)　定理 2 を $g(x) = ax^2$ として用いると

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}(f(ax^2)) &= \sum_{j_1+2j_2+\cdots+mj_m=m} \frac{m!}{j_1!\cdots j_m!} f^{(j_1+\cdots+j_m)}(g(x)) \prod_{\ell=1}^{m} \left(\frac{g^{(\ell)}(x)}{\ell!}\right)^{j_\ell} \\
&= \sum_{j_1+2j_2=m} \frac{m!}{j_1!j_2!} f^{(j_1+j_2)}(g(x)) \left(\frac{2ax}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{2a}{2!}\right)^{j_2} \\
&= \sum_{j_1+2j_2=m} \frac{m!2^{j_1}}{j_1!j_2!} a^{j_1+j_2} x^{j_1} f^{(j_1+j_2)}(g(x)) \\
&= \sum_{0\le 2j\le m} \frac{m!2^{m-2j}}{(m-2j)!j!} a^{m-j} x^{m-2j} f^{(m-j)}(ax^2)
\end{aligned}$$

を得る。この等式を $f(x) = e^x$ に対して用いたものが系 1 である。

参考文献：　森口繁一、宇田川銈久、一松信、数学公式 I 、岩波全書

藤原大輔、一般化された Bell 多項式、『数学』第 42 巻第 1 号 (1990)、89-90.

L. Schwartz, *Analyse II*, Hermann

K. Kajitani, *Global real analytic solutions of the Cauchy problem for linear partial differential equations*, Comm. PDE **11** (1986), 1489-1513.

付記 (平成 21 年 3 月)

藤原大輔先生に次の論文をご紹介して戴きました。

L.S. Dederick, *Successive derivatives of a function of several derivatives*, Ann. of Math., **27**(1926), 385-394.

A. Dresden, *The derivatives of composite functions*, Amer. Math. Monthly, **50**(1943), 9-12.

M. Sugihara and K. Murota, *Multi-dimensional Bell polynomials*, Utilitas Mathematica, **22**(1982), 265-291.

この場を借りて感謝致します。