回転数

平成 21 年 1 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

複素平面の閉曲線の (その閉曲線の上に載っていない) 一点に関する回転数は平面の集合の位相的性質と対数函数の存在領域等の解析的性質とを繋ぐ重要な概念である。ここでは回転数に関する基礎的事項を纏めて置こう。

定理 1. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間とする。$\gamma : I \to \mathbb{C}$ を連続とし γ の像 $\gamma(I)$ に入らない一点 $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ を取る。このとき

(1) $\varepsilon > 0$ 及び連続函数 $\phi : I \times B(z_0; \varepsilon) \to \mathbb{C}$ が存在して次の性質を満たす：

  (i) $B(z_0; \varepsilon) \cap \gamma(I) = \emptyset$

  (ii) 任意の $(t, z) \in I \times B(z_0; \varepsilon)$ に対し $\exp(\phi(t, z)) = \gamma(t) - z$

(2) $\varepsilon > 0$ 及び連続函数 $\phi_j : I \times B(z_0; \varepsilon) \to \mathbb{C},\ j = 1, 2,$ が存在し次の性質を満たすものとする：

  (i) $B(z_0; \varepsilon) \cap \gamma(I) = \emptyset$

  (ii) 任意の $(t, z) \in I \times B(z_0; \varepsilon)$ に対し $\exp(\phi_j(t, z)) = \gamma(t) - z, j = 1, 2$

このとき唯一つの $n \in \mathbb{Z}$ が存在し任意の $(t, z) \in I \times B(z_0; \varepsilon)$ に対し

$$\phi_1(t, z) - \phi_2(t, z) = 2\pi i n$$

(3) γ は区分的に C^1 ならば (1) の (i)(ii) を満たす任意の連続函数 $\phi : I \times B(z_0; \varepsilon) \to \mathbb{C}$ 及び任意の $z \in B(z_0; \varepsilon)$ に対し

$$\phi(\cdot, z) : I \ni t \mapsto \phi(t, z) \in \mathbb{C}$$

は区分的に C^1 であり区分的に次の等式が成立つ：

$$\partial_t \phi(t, z) = \gamma'(t)/(\gamma(t) - z)$$

(4) $\gamma(a) = \gamma(b)$ ならば (1) の (i)(ii) を満たす任意の連続函数
$\phi : I \times B(z_0; \varepsilon) \to \mathbb{C}$ に対し

$$\frac{\phi(b, z) - \phi(a, z)}{2\pi i}$$

は $z \in B(z_0; \varepsilon)$ に依存しない一定の整数となる。

定義　$I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ を有界閉区間、$\gamma:I\to\mathbb{C}$ を $\gamma(a)=\gamma(b)$ なる連続函数、$z\in\mathbb{C}\setminus\gamma(I)$ に対し定理 1(4) で与えられる整数を γ の z に関する回転数 winding number 又は指数 index と謂い

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\frac{\phi(b,z)-\phi(a,z)}{2\pi i}$$

と表す。ここに ϕ は定理 1(1) の (i)(ii) を満たす任意の連続函数とする。

定理 1 の証明には次の補題を用いる。

補題 1　任意の $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して $B(c;|c|)$ 上の解析函数 L_c が存在し任意の $z\in B(c;|c|)$ に対し等式 $\exp(L_c(z))=z$ が成立する。

(証明)　冪級数

$$\ell(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

は $B(0;1)$ に於いて広義一様に絶対収束するので解析函数 $\ell:B(0;1)\ni z\mapsto\ell(z)\in\mathbb{C}$ が定まる。項別微分により $B(0;1)$ 上

$$\ell'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$$

を得るので $B(0;1)$ 上

$$\frac{d}{dz}(\exp(\ell(z))(1-z))=\exp(\ell(z))[\ell'(z)(1-z)-1]=0$$

が成立つ。従って任意の $z\in B(0;1)$ に対し

$$\exp(\ell(z))(1-z)=\exp(\ell(0))(1-0)=\exp(\ell(0))=1$$

即ち

$$1-z=\exp(-\ell(z))$$

を得る。さて $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し

$$\begin{aligned}z\in B(c;|c|)&\Leftrightarrow|z-c|<|c|\\&\Leftrightarrow|(z-c)/c|<1\\&\Leftrightarrow(c-z)/c\in B(0,1)\end{aligned}$$

であるから $z\in B(c;|c|)$ に対し $\ell((c-z)/c)$ が定まり等式

$$\exp(-\ell((c-z)/c))=1-(c-z)/c=z/c$$

が成立つ。即ち任意の $z\in B(c;|c|)$ に対し

$$z=c\exp(-\ell((c-z)/c))$$

が成立つ。$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \exp(\mathbb{C})$ であるから $b \in \mathbb{C}$ が存在し $c = e^b$ となるので等式

$$z = \exp(b - \ell((c-z)/c))$$

を得る。よって

$$L_c(z) = b - \ell\left(\frac{c-z}{c}\right) = b - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{c-z}{c}\right)^n$$

と置く事により $B(c;|c|)$ 上の解析函数 L_c が定まり $B(c;|c|)$ 上

$$\exp \circ L_c = id$$

が成立つ。

定理 1 の証明

(1) 二つのコンパクト集合 $\{z_0\}, \gamma(I)$ は共通部分を持たないので $\varepsilon > 0$ が存在して $B(z_0;2\varepsilon) \cap \gamma(I) = \emptyset$ とする事が出来る。γ はコンパクト集合上の連続函数故一様連続。よって

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

なる分点 $\{t_j\}_{j=0}^n$ を選んで各 $j \geq 1$ に対し

$$\text{任意の } t, s \in I_j \equiv [t_{j-1}, t_j] \text{ に対し } |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq \varepsilon$$

とする事が出来る。$B_0 = B(z_0;\varepsilon)$ とし $\Gamma : I \times B_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を

$$\Gamma(t,z) = \gamma(t) - z, \quad (t,z) \in I \times B_0$$

と定める。ε の取り方により任意の $t \in I$ に対し

$$|\Gamma(t,z_0)| = |\gamma(t) - z_0| \geq 2\varepsilon$$

が成立つ。これより $1 \leq j \leq n$ なる j に対し $B_j = B(\Gamma(t_{j-1},z_0);2\varepsilon)$ と置くと $z \in B_j$ ならば任意の $t \in I$ に対し

$$|z - \Gamma(t_j,z_0)| < 2\varepsilon \leq |\Gamma(t,z_0)|$$

となるから特に $z \in B(\Gamma(t_j,z_0);|\Gamma(t_j,z_0)|)$ が従う。よって

$$B_j \subset B(\Gamma(t_j,z_0);|\Gamma(t_j,z_0)|)$$

が従う。以上により

$$0 \notin \bigcup_{t \in I} B(\Gamma(t,z_0);|\Gamma(t,z_0)|) \supset \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

となる。補題 1 により各 j に対し連続函数 $L_j : B_j \to \mathbb{C}$ が存在して任意の $z \in B_j$ に対し等式

$$\exp(L_j(z)) = z$$

が成立つ。各 $j \geq 1$ に対し $(t, z) \in I_j \times B_0$ なら

$$|\Gamma(t, z) - \Gamma(t_{j-1}, z_0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(t_{j-1})| + |z - z_0| < 2\varepsilon$$

となるので $\Gamma(I_j \times B_0) \subset B_j$ が従う。よって任意の $z \in B_0$ に対し

$$\begin{aligned}\Gamma(t_j, z) &\in \Gamma([t_{j-1}, t_j] \times B_0) \cap \Gamma([t_j, t_{j+1}] \times B_0) \\ &= \Gamma(I_j \times B_0) \cap \Gamma(I_{j+1} \times B_0) \subset B_j \cap B_{j+1}\end{aligned}$$

となり $L_j : B_j \to \mathbb{C},\ L_{j+1} : B_{j+1} \to \mathbb{C}$ の性質により

$$\exp(L_j(\Gamma(t_j, z))) = \Gamma(t_j, z) = \exp(L_{j+1}(\Gamma(t_j, z)))$$

が従う。これより任意の $z \in B_0$ に対し

$$L_j(\Gamma(t_j, z)) - L_{j+1}(\Gamma(t_j, z)) \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

を得るが $B_0 \ni z \mapsto L_j(\Gamma(t_j, z)) \in \mathbb{C},\ B_0 \ni z \mapsto L_{j+1}(\Gamma(t_j, z)) \in \mathbb{C}$ は連続で B_0 は連結なので $N_j \in \mathbb{Z}$ が唯一つ存在して任意の $z \in B_0$ に対し

$$L_j(\Gamma(t_j, z)) - L_{j+1}(\Gamma(t_j, z)) = 2\pi i N_j$$

となる。そこで $\phi : I \times B_0 \to \mathbb{C}$ を

$$\begin{aligned}&\phi|I_1 \times B_0 = L_1 \circ \Gamma, \\ &\phi|I_j \times B_0 = L_j \circ \Gamma + 2\pi i \sum_{k=1}^{j-1} N_k, \quad 2 \leq j \leq n\end{aligned}$$

と定めると $([t_0, t_1) \times B_0) \cup \bigcup_{j=2}^{n} ((t_{j-1}, t_j) \times B_j)$ 上の連続性は定義により従い $\bigcup_{j=2}^{n} (\{t_{j-1}\} \times B)$ 上の連続性は $\{N_j\}_{j=1}^{n-1}$ の性質により従う。よって $\phi : I \times B_0 \to \mathbb{C}$ は連続であり各 $I_j \times B_0$ 上で

$$\exp(\phi(t, z)) = \exp(L_j(\Gamma(t, z))) = \gamma(t) - z$$

が成立つ。

(2) 連続函数 $\phi_1 - \phi_2 : I \times B(z_0; \varepsilon) \to \mathbb{C}$ は任意の $(t, z) \in I \times B(z_0; \varepsilon)$ に対し

$$\exp(\phi_1(t, z) - \phi_2(t, z)) = 1$$

を満たす。これより (2) が従う。

(3) γ が区分的に C^1 であるとしその区間の一つを J とする。$z \in B(z_0; \varepsilon)$ 及び $t, t + h \in J$ なる $h \neq 0$ に対し

$$\frac{\phi(t + h, z) - \phi(t, z)}{h} = \frac{\gamma(t + h) - \gamma(t)}{h} \frac{\phi(t + h, z) - \phi(t, z)}{\exp(\phi(t + h, z)) - \exp(\phi(t, z))}$$

であり $h \to 0$ とするとき ϕ の連続性から $\phi(t+h,z) \to \phi(t,z)$ であるから右辺の第二因子は指数函数 $w \mapsto e^w$ の点 $w=\phi(t,z)$ での微分係数の逆数即ち $1/\exp(\phi(t,z)) = 1/(\gamma(t)-z)$ に収束し第一因子は仮定により $\gamma'(t)$ に収束する。よって $t \in J$ に対し微分係数 $\partial_t \phi(t,z)$ は存在し

$$\partial_t \phi(t,z) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$$

が成立つ。これより $J \ni t \mapsto \phi(t,z) \in \mathbb{C}$ は C^1 である。

(4) $\gamma(a)=\gamma(b)$ ならば

$$\exp(\phi(a,z)) = \gamma(a)-z = \gamma(b)-z = \exp(\phi(b,z))$$

となるから $\phi(b,z)-\phi(a,z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ となるが $\phi : I \times B(z_0;\varepsilon) \to \mathbb{C}$ は連続で B_0 は連結なので

$$\phi(b,z)-\phi(a,z) = 2\pi i N$$

を満たす $N \in \mathbb{Z}$ が唯一つ定まる。(1) の (i)(ii) を満たすもう一つの $\psi : I \times B(z_0;\varepsilon) \to \mathbb{C}$ に対しては (2) より任意の $(t,z) \in I \times B(z_0;\varepsilon)$ に対して

$$\psi(t,z)-\phi(t,z) = 2\pi i n$$

を満たす唯一つの n が定まるので

$$\psi(b,z)-\phi(b,z) = 2\pi i n = \psi(a,z)-\phi(a,z)$$

となる。これより

$$\psi(b,z)-\psi(a,z) = \phi(b,z)-\phi(a,z)$$

を得る。

定義　有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続函数 $\gamma : I \to \mathbb{C}$ を曲線 curve と謂い $\gamma(a)$ 及び $\gamma(b)$ を夫々 γ の始点及び終点と謂う。$\gamma(a)=\gamma(b)$ なるとき γ は閉曲線 closed curve, loop と謂う。I 上の閉曲線全体の成す集合を $\mathscr{L}(I)$ と表す：

$$\mathscr{L}(I) = \{\gamma \in C(I;\mathbb{C}); \gamma(a)=\gamma(b)\}$$

$\mathscr{L}(I)$ は函数の和とスカラー倍によりベクトル空間となる。$\gamma \in \mathscr{L}(I)$ に対し

$$\|\gamma\| = \sup\{|\gamma(t)|; t \in I\}$$

と定めると $\|\cdot\|$ は $\mathscr{L}(I)$ 上のノルムとなり $\|\cdot\|$ から定まる距離

$$d(\gamma_1,\gamma_2) = \|\gamma_1-\gamma_2\|$$

により $\mathscr{L}(I)$ は完備となる。

定理 2　$I=[a,b]$ を有界閉区間とする。

(1) 任意の $\gamma \in \mathscr{L}(I)$ に対し $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma(I) \ni z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ は連続であり $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ の各連結成分上一定の整数を取る。$\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ は非有界連結成分を唯一つ持ち、その非有界連結成分上 Ind_γ は 0 を取る。

(2) 一つの $\gamma_0 \in \mathscr{L}(I)$ と $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma_0(I)$ に対し

$$\mathrm{Ind}_\bullet(z_0) : \gamma \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$$

は γ_0 の或る近傍上一定の整数である。即ち γ_0, z_0 に依存した $\delta > 0$ を取って次が成立するように出来る。

$$\|\gamma_1 - \gamma_0\| < \delta \text{なる任意の} \gamma_1 \in \mathscr{L}(I) \text{ に対し } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma_1(I)$$

であり $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_0)$

(証明)

(1) 前半は定理 1 と Ind_γ の定義より従う。さて $|\gamma(t)| \leq \|\gamma\|$ であるから連結開集合 $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0;\|\gamma\|)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| > \|\gamma\|\}$ は $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ の部分集合であり、特に $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ の一つの連結成分に含まれる。$\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ のその他の連結成分は $B(0;\|\gamma\|)$ に含まれるから有界である。故に $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0;\|\gamma\|)}$ を含む $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ の連結成分は唯一つの非有界連結成分である。さて $-1 \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 1 の開円板 $B(-1;1)$ 上定義される連続対数函数 $L : B(-1;1) \to \mathbb{C}$ と取る。$z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(0;\|\gamma\|)}$ 及び $t \in I$ に対し $e^w = z$ となる $w \in \mathbb{C}$ を一つ取り

$$\phi(t) = w + L(z^{-1}\gamma(t) - 1)$$

と置く。このとき $\phi \in \mathscr{L}(I)$ であり

$$\begin{aligned}\exp(\phi(t)) &= \exp(w)\exp(L(z^{-1}\gamma(t) - 1)) = z(z^{-1}\gamma(t) - 1) \\ &= \gamma(t) - z\end{aligned}$$

となるので

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi i} = \frac{L(z^{-1}\gamma(b) - 1) - L(z^{-1}\gamma(a) - 1)}{2\pi i} = 0$$

を得る。よって Ind_γ は $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0;\|\gamma\|)}$ を含む唯一つの非有界連結成分上 0 となる。

(2) $\{z_0\} \cap \gamma_0(I) = \emptyset$ であるから

$$\delta \equiv \inf\{|\gamma_0(t) - z_0|; t \in I\} > 0$$

となる。このとき $\|\gamma_1 - \gamma_0\| < \delta$ なる任意の $\gamma_1 \in \mathscr{L}(I)$ と任意の $t \in I$ に対し

$$|(\gamma_0(t) - z_0) - (\gamma_1(t) - z_0)| \leq \|\gamma_1 - \gamma_0\| < \delta \leq |\gamma_0(t) - z_0|$$

となるから

$$|\gamma_1(t) - z_0| > 0$$

即ち $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma_1(I)$ を得る。さて $\gamma : I \to \mathbb{C}$ を

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - z_0}{\gamma_0(t) - z_0}$$

で定めると $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathscr{L}(I)$ より $\gamma \in \mathscr{L}(I)$ となり

$$|\gamma(t) - 1| = \left| \frac{(\gamma_1(t) - z_0) - (\gamma_0(t) - z_0)}{\gamma_0(t) - z_0} \right| < 1$$

より $\gamma(I) \subset B(1;1)$ を得る。$\mathbb{C} \setminus B(1,1)$ は $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ の非有界連結成分の部分集合で 0 を含むので (1) により

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$$

が成立する。任意の $t \in I$ に対し $\gamma(t) = \exp(\phi(t))$ 及び $\gamma_0(t) - z_0 = \exp(\phi_0(t))$ を満たす $\phi, \phi_0 : I \to \mathbb{C}$ を取ると任意の $t \in I$ に対し

$$(\gamma_0(t) - z_0)\gamma(t) = \exp(\phi(t) + \phi_0(t))$$

となる。このとき

$$(\gamma_0(t) - z_0)\gamma(t) = \gamma_1(t) - z_0$$

であるから $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0)$ は定義により

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) &= \frac{(\phi(b) + \phi_0(b)) - (\phi(a) + \phi_0(a))}{2\pi i} \\ &= \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi i} + \frac{\phi_0(b) - \phi_0(a)}{2\pi i} \\ &= \mathrm{Ind}_\gamma(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_0) \end{aligned}$$

と計算される。

定理 3　$I = [a, b]$ を有界閉区間とし $\gamma : I \to \mathbb{C}$ を区分的に C^1 である閉曲線とする。このとき任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ に対し

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

(証明)　定理 1 の (3) により I の分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

が存在し各 $j \geq 1$ に対し $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ 及び $\phi(\cdot, z) : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{C}$ は C^1 であり
任意の $t \in [t_{j-1}, t_j]$ に対し

$$\partial_t \phi(t, z) = \gamma'(t)/(\gamma(t) - z)$$

が成立つ。従って

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \partial_t \phi(t,z)dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n (\phi(t_j,z) - \phi(t_{j-1},z)) \\
&= \frac{1}{2\pi i}(\phi(t_n,z) - \phi(t_0,z)) = \mathrm{Ind}_\gamma(z)
\end{aligned}
$$

が成立つ。

定義　$I=[a,b]$ を有界閉区間、$U \subset \mathbb{C}$ を部分集合とする $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathscr{L}(I)$ に対し

(1) γ_0 と γ_1 は U 内でホモロジー同値 (homologous in U) であるとは次の二つが成立つ事を謂う：

  (a) $\gamma_0(I) \cup \gamma_1(I) \subset U$

  (b) $\mathbb{C} \setminus U$ 上 $\mathrm{Ind}_{\gamma_0} = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}$
  即ち任意の $z \in \mathbb{C} \setminus U$ に対し $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$

(2) U 内でホモロジー同値な γ_0, γ_1 に対し、特に γ_1 が定数であるとき γ_0 は U 内で 0 にホモロジー同値であると謂う。即ち次の二つが成立つ事を謂う：

  (a) $\gamma_0(I) \subset U$

  (b) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus U$ に対し $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = 0$

(3) γ_0 と γ_1 は U 内でホモトピー同値 (homotopic in U) であるとは次の二つが成立つ事を謂う：

  (a) $\gamma_0(I) \cup \gamma_1(I) \subset U$

  (b) 連続函数 $H : [0,1] \times I \ni (\theta, t) \mapsto H(\theta,t) \in \mathbb{C}$ が存在して

  - $H([0,1] \times I) \subset U$
  - $H(0,t) = \gamma_0(t),\ t \in I$
  - $H(1,t) = \gamma_1(t),\ t \in I$
  - $H(\theta,a) = H(\theta,b),\ \theta \in [0,1]$

  が成立つ。

(4) U 内でホモトピー同値な γ_0, γ_1 に対し、特に γ_1 が定数であるとき γ_0 は U 内で 0 にホモトピー同値であると謂う。即ち次の二つが成立つ事を謂う：

  (a) $\gamma_0(I) \subset U$

  (b) 連続函数 $H : [0,1] \times I \ni (\theta, t) \mapsto H(\theta,t) \in \mathbb{C}$ 及び $z_0 \in U$ が存在して

  - $H([0,1] \times I) \subset U$

- $H(0,t)=\gamma_0(t),\ t\in I$
- $H(1,t)=z_0,\ t\in I$
- $H(\theta,a)=H(\theta,b),\ \theta\in[0,1]$

が成立つ。

定理 4　$I=[a,b],\ U\subset\mathbb{C}$ とする。$\gamma_0,\gamma_1\in\mathscr{L}(I)$ に対し

$$\gamma_0\text{と}\gamma_1\text{は}U\text{ 内でホモトピー同値}\Rightarrow\ \gamma_0\text{と}\gamma_1\text{は}U\text{ 内でホモロジー同値}$$

(証明)　連続函数 $H:[0,1]\times I\ni(\theta,t)\mapsto H(\theta,t)\in\mathbb{C}$ が存在して

- $H([0,1]\times I)\subset U$
- $H(0,t)=\gamma_0(t),\ t\in I$
- $H(1,t)=\gamma_1(t),\ t\in I$
- $H(\theta,a)=H(\theta,b),\ \theta\in[0,1]$

が成立つ。$\theta\in[0,1]$ に対し $\gamma_\theta(t)=H(\theta,t),t\in I$ と置くと $\gamma_\theta:I\ni t\mapsto\gamma_\theta(t)\in\mathbb{C}$ は連続で $\gamma_\theta(a)=H(\theta,a)=H(\theta,b)=\gamma_\theta(b)$ であるから $\gamma_\theta\in\mathscr{L}(I)$ となる。また $H:[0,1]\times I\to\mathbb{C}$ は一様連続であるから

$$\begin{aligned}\sup_{|\theta-\theta'|\le\delta}\|\gamma_\theta-\gamma_{\theta'}\|&=\sup_{|\theta-\theta'|\le\delta}\sup_{t\in I}|\gamma_\theta(t)-\gamma_{\theta'}(t)|\\&=\sup_{|\theta-\theta'|\le\delta}\sup_{t\in I}|H(\theta,t)-H(\theta',t)|\\&\le\sup_{|(\theta,t)-(\theta',t')|\le\delta}|H(\theta,t)-H(\theta',t')|\end{aligned}$$

に於いて $\delta\to0$ とするとき右辺は 0 に収束する。よって $[0,1]\ni\theta\mapsto\gamma_\theta\in\mathscr{L}(I)$ は連続となる。従って定理 2 の (2) により各 $z\in\mathbb{C}\setminus U$ に対し $[0,1]\ni\theta\mapsto\mathrm{Ind}_{\gamma_\theta}(z)\in\mathbb{Z}$ は連続で [0,1] は連結なので $\mathrm{Ind}_{\gamma_\theta}(z)$ は $\theta\in[0,1]$ に依らない整数となる。よって $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z)=\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$ が従う。$z\in\mathbb{C}\setminus U$ は任意であったから定理が従う。

定理 5　$\gamma_0,\gamma_1\in\mathscr{L}(I),\ I=[a,b]$ に対し次は同値：

(1) γ_0 と γ_1 は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ でホモトピー同値

(2) γ_0 と γ_1 は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ でホモロジー同値

(証明)
(1) $\Rightarrow$ (2) :　定理 4 による。

(2) ⇒ (1)： I はコンパクト故 $\gamma_j(I)$ もそうであり特に有界である。また仮定により $\gamma_j(I)$ は 0 を含まないでの定理 1 により連続函数 $\phi_j : I \to \mathbb{C}$ が存在し任意の $t \in I$ に対し

$$\exp(\phi_j(t)) = \gamma_j(t)$$

が成立つ。そこで

$$H(\theta, t) = \exp(\theta\phi_1(t) + (1-\theta)\phi_0(t))$$

と置くと連続函数 $H : [0,1] \times I \to \mathbb{C}$ が定まり

- $H([0,1] \times I) \subset \gamma_0(I) \cup \gamma_1(I) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $H(0,t) = \exp(\phi_0(t)) = \gamma_0(t),\ t \in I$
- $H(1,t) = \exp(\phi_1(t)) = \gamma_1(t),\ t \in I$

が成立つ。

そこで任意の $\theta \in [0,1]$ に対し $H(\theta, a) = H(\theta, b)$ を示せば良い。その為には

$$[\theta\phi_1(b) + (1-\theta)\phi_0(b)] - [\theta\phi_1(a) + (1-\theta)\phi_0(a)] \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

を示せば充分であるが、これは回転数の定義と仮定 (2) より

$$\begin{aligned}
&[\theta\phi_1(b) + (1-\theta)\phi_0(b)] - [\theta\phi_1(a) + (1-\theta)\phi_0(a)] \\
&= \theta[\phi_1(b) - \phi_1(a)] + (1-\theta)[\phi_0(b) - \phi_0(a)] \\
&= 2\pi i\theta\ \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) + 2\pi i(1-\theta)\ \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) \\
&= 2\pi i\theta\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) + 2\pi i(1-\theta)\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = 2\pi i\ \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

となる事から従う。

定理 6 $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とする。零を取らない U 上の連続函数 $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し次は同値である。

(1) f は U 内に連続対数を持つ。即ち連続函数 $L : U \to \mathbb{C}$ が存在して $\exp \circ L = f$ が成立つ。

(2) U 内の任意の閉曲線 γ に対し $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = 0$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dotted, "L"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\
& \mathbb{C} \setminus \{0\}
\end{tikzcd}$$

(証明)

(1) ⇒ (2)： $I = [a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) \in U$ を $\gamma(a) = \gamma(b)$ なる連続函数とすると

$$f \circ \gamma : I \ni t \mapsto f(\gamma(t)) \in \mathbb{C}$$

も閉曲線であり $0 \in \mathbb{C} \setminus (f \circ \gamma)(I)$ となり任意の $t \in I$ に対し

$$\exp((L \circ \gamma)(t)) = (f \circ \gamma)(t)$$

が成立つ。よって

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{(f\circ\gamma)(b)-(f\circ\gamma)(a)}{2\pi i} = 0$$

(2) ⇒ (1)： U の全ての連結成分を $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とし $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ と表したとき (2) は次と同値である：

任意の $\lambda\in\Lambda$ と U 内の任意の閉曲線 γ に対し $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = 0$ が成立つ。

一方 (1) は次と同値である：

任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し f は U_λ 内に $\exp\circ L_\lambda = f|U_\lambda$ なる連続対数 $L_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{C}$ を持つ。(このとき任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $L|U_\lambda = L_\lambda$ が成立つ。)

よって (2) ⇒ (1) を示す為には U の一つの連結成分上で議論すれば充分である。以下では一般性を失う事無く U は (弧状) 連結と仮定する。

さて一点 $z_0\in U$ を取り固定する。$f(z_0)\in\mathbb{C}\setminus\{0\} = \exp(\mathbb{C})$ であるから或る $w_0\in\mathbb{C}$ に対し $f(z_0) = e^{w_0}$ と表せる。U の弧状連結性により任意の $z\in U$ に対し $\gamma_z\in C([0,1];U)$ が存在し $\gamma_z(0) = z_0, \gamma_z(1) = z$ となる。$f\circ\gamma_z : [0,1]\to\mathbb{C}$ は有界閉区間上の零を取らない連続函数なので定理 1 により連続函数 $\phi_z : [0,1]\to\mathbb{C}$ が存在し任意の $t\in[0,1]$ に対し

$$f(\gamma_z(t)) = \exp(\phi_z(t))$$

が成立つ。特に $t = 0, 1$ として

$$f(z_0) = f(\gamma_z(0)) = \exp(\phi_z(0)),$$
$$f(z) = f(\gamma_z(1)) = \exp(\phi_z(1))$$

を得る。$f(z_0) = \exp(w_0)$ であったから或る $m(z)\in\mathbb{Z}$ に対し

$$w_0 - \phi_z(0) = 2\pi i m(z)$$

となる。そこで $z\in U$ に対し

$$L(z) = \phi_z(1) + 2\pi i m(z)$$

と置くと

$$\exp(L(z)) = \exp(\phi_z(1)) = f(\gamma_z(1)) = f(z)$$

即ち $L : U\ni z\mapsto L(z)\in\mathbb{C}$ は $\exp\circ L = f$ を満たす。よって $L : U\to\mathbb{C}$ の連続性を示せば (2) の証明が完結する。そこで任意の一点 $z_1\in U$ を取り z_1 の或る近傍での L の連続性を示そう。f は z_1 で連続であり $B(f(z_1);|f(z_1)|) = \{w\in\mathbb{C}; |w-f(z_1)| < |f(z_1)|\}$ は $f(z_1)$ の開近傍であるから $r>0$ が存在し $B(z_1;r)\subset U$,

$$f(B(z_1;r))\subset B(f(z_1);|f(z_1)|)$$

とする事が出来る。これより $\overline{B(z_1;r/2)}\subset U$,

$$f(\overline{B(z_1;r/2)})\subset B(f(z_1);|f(z_1)|)$$

が従う。補題 1 で与えられる連続対数を $\ell_{z_1} : B(f(z_1); |f(z_1)|) \to \mathbb{C}$ とすると

$$\exp(\ell_{z_1}(f(z_1))) = f(z_1) = f(\gamma_{z_1}(1)) = \exp(\phi_{z_1}(1))$$

となるので或る $n(z_1) \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\ell_{z_1}(f(z_1)) - \phi_{z_1}(1) = 2\pi i n(z_1)$$

が成立つ。さて任意の $z \in B(z_1; r/2)$ に対し

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_z(1-3t), & t \in [0,1/3] \\ \gamma_{z_1}(3t-1), & t \in [1/3,2/3] \\ (3-3t)z_1 + (3t-2)z, & t \in [2/3,1] \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_z(1-3t), & t \in [0,1/3] \\ \phi_{z_1}(3t-1) + 2\pi i(m(z_1) - m(z)), & t \in [1/3,2/3] \\ \ell_{z_1}(f((3-3t)z_1 + (3t-2)z)) + 2\pi i(m(z_1) - m(z) - n(z_1)), & t \in [2/3,1] \end{cases}$$

と置くと

$$\begin{aligned} &\gamma_z(0) = z_0 = \gamma_{z_1}(0), \\ &\gamma_{z_1}(1) = z_1, \\ &z = \gamma_z(1) \end{aligned}$$

より $\gamma \in \mathscr{L}(I)$ となり

$$\begin{aligned} \phi_z(0) &= w_0 - 2\pi i m(z) = (\phi_{z_1}(0) + 2\pi i m(z_1)) - 2\pi i m(z) \\ &= \phi_{z_1}(0) + 2\pi i(m(z_1) - m(z)), \\ \phi_{z_1}&(1) + 2\pi i(m(z_1) - m(z)) \\ &= \ell_{z_1}(f(z_1)) - 2\pi i n(z_1) + 2\pi i(m(z_1) - m(z)) \\ &= \ell_{z_1}(f(z_1)) + 2\pi i(m(z_1) - m(z) - n(z_1)) \end{aligned}$$

より $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ は連続となる。$0 \in \mathbb{C} \setminus (f \circ \gamma)([0,1])$ であり

$$\exp(\phi(t)) = (f \circ \gamma)(t), \ t \in [0,1]$$

となるから定義により

$$\begin{aligned} 2\pi i \ \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) &= \phi(1) - \phi(0) \\ &= \ell_{z_1}(f(z)) + 2\pi i(m(z_1) - m(z) - n(z_1)) - \phi_z(1) \end{aligned}$$

であり仮定 (1) によりこの両辺は零となる。

故に任意の $z \in B(z_1; r/2)$ に対し等式

$$\begin{aligned} L(z) &= \phi_z(1) + 2\pi i m(z) \\ &= \ell_{z_1}(f(z)) + 2\pi i(m(z_1) - n(z_1)) \end{aligned}$$

が成立する。$f : B(z_1; r/2) \to B(f(z_1), |f(z_1)|)$ 及び $\ell_{z_1} : B(f(z_1); |f(z_1)|) \to \mathbb{C}$ の連続性により $L : B(z_1; r/2) \to \mathbb{C}$ は連続となる。これが示すべき事であった。

定理 6 の系 1. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 内の任意の閉曲線は 0 にホモトピー同値であるとすると零を取らない U 上の任意の複素数値連続函数は連続対数を持つ。即ち

$\gamma(I) \subset U,\ I = [a, b]$ なる任意の $\gamma \in \mathscr{L}(I)$ に対して $H \in C([0,1] \times I; \mathbb{C})$ 及び $z_0 \in U$ が存在して

- $H([0,1] \times I) \subset U$
- $H(0,t) = \gamma(t),\ t \in I$
- $H(1,t) = z_0,\ t \in I$
- $H(\theta, a) = H(\theta, b),\ \theta \in [0,1]$

が成立つものと仮定する。このとき任意の $f \in C(U; \mathbb{C} \setminus \{0\})$ に対して $L \in C(U; \mathbb{C})$ が存在して $\exp \circ L = f$ が成立つ。

(証明) $h = f \circ H$ と置くと $h \in C([0,1] \times I; \mathbb{C} \setminus \{0\})$ であり

- $h([0,1] \times I) \subset f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- $h(0,t) = (f \circ \gamma)(t),\ t \in I$
- $h(1,t) = f(z_0) \in \mathbb{C} \setminus \{0,\}, t \in I$
- $h(\theta, a) = f(H(\theta, a)) = f(H(\theta, b)) = h(\theta, b),\ \theta \in [0,1]$

となるので h は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内の閉曲線 $f \circ \gamma$ と閉曲線である定値函数 $\gamma_0 : I \ni t \mapsto z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とのホモトピー同値性を与える。よって定理 4 により $\mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0)$ となる。回転数の定義により $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = 0$ となるので $\mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(0) = 0$ が従う。よって定理 6 により系 1 が従う。

定理 6 の系 2.

(1) $K = \{z \in \mathbb{C}; |\mathrm{Re}\ z| \le 1,\ |\mathrm{Im}\ z| \le 1\}$ とすると任意の $f \in C(K; \mathbb{C} \setminus \{0\})$ に対し $L \in C(K; \mathbb{C})$ が存在して $\exp \circ L = f$ が成立つ。

(2) $K = \overline{B(0;1)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \le 1\}$ とすると任意の $f \in C(K; \mathbb{C} \setminus \{0\})$ に対し $L \in C(K; \mathbb{C})$ が存在して $\exp \circ L = f$ が成立つ。

(証明)

(1) $U=\{z\in\mathbb{C};|\mathrm{Re}\ z|<1,\ |\mathrm{Im}\ z|<1\}$ と置く。ティーツェ・ウリソンの拡張定理により $f\in C(K;\mathbb{C}\setminus\{0\})$ に対し $F|K=f$ なる $F\in C(\mathbb{C};\mathbb{C}\setminus\{0\})$ が存在する。ここで $\inf_{z\in\mathbb{C}}|F(z)|=\inf_{z\in K}|f(z)|=\min_{z\in K}|f(z)|>0$ に注意する。さて $F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ は $\mathbb{C}$ の開集合で

$$\begin{aligned} z\in K &\Rightarrow F(z)=f(z)\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ &\Rightarrow z\in F^{-1}(F(z))\subset F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \end{aligned}$$

であるから $K\subset F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ となる。このとき $K\cap(\mathbb{C}\setminus F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})=\emptyset$ であるから $\delta\equiv d(K,\mathbb{C}\setminus F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}))>0$ となる。よって

$$K\subset(1+\delta/2)U\subset F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

が成立つ。$(1+\delta/2)U$ の任意の閉曲線は 0 にホモトピー同値である事は任意の $\gamma\in\mathscr{L}(I)$ に対し $H(\theta,t)=(1-\theta)\gamma(t),\ t\in I$ とすれば分かる。そこで定理 6 の系 1 により得られる $L\in C((1+\delta/2)U;\mathbb{C})$ を K に制限したものが求めるものとなる。

(2) $U=B(0;1)=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ として (1) と同様にすれば良い。

定理 7　コンパクト集合 $K\subset\mathbb{C}$ で定義された零を取らない連続函数 $f:K\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対し次は同値である：

(1) f は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内で定数にホモトピー同値である。即ち連続函数

$$H:[0,1]\times K\ni(\theta,z)\mapsto H(\theta,z)\in\mathbb{C}$$

及び一点 $w_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在して次を満たす：

- $H([0,1]\times K)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$
- $H(0,z)=f(z),\ z\in K$
- $H(1,z)=w_0,\ z\in K$

(2) f は零を取らない連続拡張を $\mathbb{C}$ 上に持つ。即ち連続函数 $\tilde{f}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在して $\tilde{f}|K=f$ が成立つ。

(3) f は連続対数を持つ。即ち連続函数 $L:K\to\mathbb{C}$ が存在して $\exp\circ L=f$ が成立つ。

(証明)　証明には次の補題を用いる。

補題 2　(X,d) を距離空間、K を X のコンパクト集合、F を X の閉集合で $K\subset F$ であるとする。零を取らない二つの複素数値連続函数が夫々K 及び F で与えられており定義域を K に制限するとそれらは $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内でホモトピー同値であるとする。即ち $f\in C(K;\mathbb{C}\setminus\{0\})$, $g\in C(F;\mathbb{C}\setminus\{0\}), H\in C([0,1]\times K;\mathbb{C}\setminus\{0\})$ が存在し

- $H(0,x) = f(x),\ x \in K$
- $H(1,x) = g(x),\ x \in K$

が成立つものとする。このとき $f : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は零を取らない連続函数として F に拡張される。即ち連続函数 $\tilde{f} : F \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して $\tilde{f}|K = f$ となる。

(補題 2 の証明)　直積空間 $[0,1] \times X$ は距離空間となり $C = ([0,1] \times K) \cup (\{1\} \times F)$ はその閉部分集合となる。連続函数 $H : [0,1] \times K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は $H|(\{1\} \times F) = g$ と定める事により C 上の連続函数に拡張される。これを再び $H : C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と表す。ティーツェ・ウリソンの定理を $\mathrm{Re}\ H, \mathrm{Im}\ H$ に夫々適用すれば $H : C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は連続函数 $\tilde{H} : [0,1] \times X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に拡張される。このとき $\tilde{H}(C) = H(C) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であるので $\tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ は C を含む $[0,1] \times X$ の開集合となる。包含関係 $[0,1] \times K \subset C \subset \tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ により $[0,1] \times X$ のコンパクト集合 $[0,1] \times K$ と $[0,1] \times X$ の閉集合 $([0,1] \times X) \setminus \tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ の交わりは空であり $\mathrm{dist}([0,1] \times K, ([0,1] \times X) \setminus \tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) \equiv \delta > 0$ となる。さて $j \geq 1$ に対し $K_j \equiv \{x \in X; \mathrm{dist}(x,K) \leq 1/j\}$ と置くと $[0,1] \times K = [0,1] \times \bigcap_{j \geq 1} K_j \subset C \subset \tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ となるので $j \geq 2/\delta$ とすると

$$[0,1] \times K_j \subset \tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

が成立つ。このとき $x \in F$ に対し

$$\mathrm{dist}(x,K) \leq 1/j \Rightarrow x \in K_j$$

であるので

$$\begin{aligned}&\bigcup \{(\min(1, j\mathrm{dist}(x,K)), x) \in [0,1] \times X; x \in F\}\\ \subset&([0,1] \times K_j) \cup (\{1\} \times F) \subset \tilde{H}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})\end{aligned}$$

が成立つ。そこで $x \in F$ に対し

$$\tilde{f}(x) = \tilde{H}(\min(1, j\ \mathrm{dist}(x,K)), x)$$

と置くと

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\mathrm{dist}(\bullet{,}K)"] \arrow[ddrrr, "id"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "j\times"] & \mathbb{R} \arrow[r, "1\wedge\bullet"] & {[0,1]} \arrow[dr] & & \\
 & & & & {[0,1] \times F} \arrow[r, "\tilde{H}"] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\
 & & & F \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

なる連続写像の合成として $\tilde{f}$ は連続であり定義により

$$\tilde{f}|K = \tilde{H}|(\{0\} \times K) = f$$

が成立つので $\tilde{f}$ は f の拡張となっている。

(定理 7 の証明)

(1) ⇒ (2) : 補題 2 を $X = F = \mathbb{C},\ g : \mathbb{C} \ni z \mapsto w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に適用すれば良い。

(2) ⇒ (3) : $\mathbb{C}$ 内の任意の閉曲線は 0 にホモトピー同値である。実際 $\gamma \in \mathscr{L}(I)$ に対し $H(\theta, t) = (1-\theta)\gamma(t), t \in I$ とすれば H は γ と $0 \in \mathbb{C}$ とのホモトピーを与える。よって定理 6 の系 1 を $U = \mathbb{C}, \tilde{f} \in C(\mathbb{C}; \mathbb{C} \setminus \{0\})$ に対して適用すれば (3) が従う。

(3) ⇒ (1) : $H(\theta, z) = \exp((1-\theta)L(z)),\ \theta \in [0,1],\ z \in K$ と置くと $H : [0,1] \times K \to \mathbb{C}$ は f と $w_0 = 1$ とのホモトピーを与える。

参考文献： Robert B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis Vol.1*, Pure and Applied Mathematics 82, Academic Press.

高橋礼司、[新版] 複素解析、東京大学出版会

H. カルタン、複素函数論、岩波書店