中間値の定理

平成 20 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

「有界閉区間 $I=[a,b]$ 上の実数値連続函数は両端点での値 $f(a)$ と $f(b)$ との中間の任意の値を取る」と云う命題を**中間値の定理** Intermediate Value Theorem と謂う。これは $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 y に対し

「方程式 $f(x)=y$ を解け」

と云う問題に対する肯定的解答を与えるものである。函数 f には具体的な形が与えられている訳ではなく、連続性のみを手掛かりとして方程式 $f(x)=y$ を解く事が要求されているのである。それがこの問題の特徴である。ここでは中間値の定理の代表的な証明法を纏めて置こう。$f(a)=f(b)$ の場合は自明である (a または b とすれば良い) ので $f(a)<f(b)$ 及び $f(a)>f(b)$ の場合を考えれば良い。以下では簡単の為、前者の場合を考える。後者の場合も同様である。$f(a)<y<f(b)$ なる y を一つ取り $f(x)=y$ なる $x\in I$ の存在を証明しよう。

中間値の定理の証明　その１ (区間縮小法による証明)

$I=[a,b]$ の中点を c とする：$c=(a+b)/2$
このとき $f(c)>y$ または $f(c)\le y$ のどちらか一方が成立つ。

- $f(c)>y$ のとき $a_1=a,\ b_1=c$ とし $I_1=[a,c]$, 即ち I の左半分とする。
- $f(c)\le y$ のとき $a_1=c,\ b_1=b$ とし $I_1=[c,b]$, 即ち I の右半分とする。
  $I_0=I,\ a_0=a,\ b_0=b,\ c_0=c$ と置く。
  $I_1=[a_1,b_1]$ の中点を c_1 とする：$c_1=(a_1+b_1)/2$
  このとき $f(c)>y$ または $f(c_1)\le y$ のどちらか一方が成立つ。
- $f(c_1)>y$ のとき $a_2=a_1,\ b_1=c_1$ とし $I_2=[a_1,c_1]$, 即ち I_1 の左半分とする。
- $f(c_1)\le y$ のとき $a_2=c_1,\ b_2=b_1$ とし $I_2=[c_1,b_1]$, 即ち I_1 の右半分とする。

以下同様に $I_n=[a_n,b_n]$ まで定義されたとし、その中点を c_n とする：
$c_n=(a_n+b_n)/2$
このとき $f(c_n)>y$ または $f(c_n)\le y$ のどちらか一方が成立つ。

- $f(c_n)>y$ のとき $a_{n+1}=a_n,\ b_{n+1}=c_n$ とし $I_{n+1}=[a_n,c_n]$, 即ち I_n の左半分とする。
- $f(c_n)\le y$ のとき $a_{n+1}=c_n,\ b_{n+1}=b_n$ とし $I_{n+1}=[c_n,b_n]$, 即ち I_n の右半分とする。

こうして $I_n = [a_n, b_n]$ が定まり任意の n に対し次を満たす：

(1) $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$

(2) $b_n - a_n = (b-a)/2^n$

(3) $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$

(1) の証明: $f(c_{n-1}) > y$ なら $a_n = a_{n-1},\ b_n = c_{n-1} = (a_{n-1}+b_{n-1})/2 \left\{ \begin{array}{l} < b_{n-1} \\ > a_{n-1} \end{array} \right\}$,
となり $f(c_{n-1}) \leq y$ なら $a_n = c_{n-1} = (a_{n-1} + b_{n-1})/2 \left\{ \begin{array}{l} < b_{n-1} \\ > a_{n-1} \end{array} \right\},\ b_n = b_{n-1}$
となるから何れの場合でも $a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}$

(2) の証明： $n = 0, 1$ の場合は定義より従う。I_n の長さは I_{n-1} の長さの半分なので帰納法により (2) が従う。

(3) の証明： $n = 0, 1$ の場合は定義より従う。
$f(a_{n-1}) \leq y \leq f(b_{n-1})$ を仮定する。

- $f(c_{n-1}) > y$ のとき $a_n = a_{n-1},\ b_n = c_{n-1}$ だから
  $f(a_n) = f(a_{n-1}) \leq y < f(c_{n-1}) = f(b_n)$
- $f(c_{n-1}) \leq y$ のとき $a_n = c_{n-1},\ b_n = b_{n-1}$ だから
  $f(a_n) = f(c_{n-1}) \leq y \leq f(b_{n-1}) = f(b_n)$

何れの場合にも $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ となり帰納法が完結する。

さて $x \in I$ を $\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = x$ なる点とする。このとき f の連続性と (3) により

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq y \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x)$$

となり $f(x) = y$ が従う。

中間値の定理の証明　その２ (上限の存在定理による証明)

$S = \{\xi \in [a, b]; f(\xi) < y\}$ と置く。$a \in S$ 故 $S \neq \emptyset$ であり任意の $\xi \in S$ に対し $\xi \leq b$ 故 S は上に有界である。従ってワイエルストラスの上限存在定理より S の上限が存在する。そこで $x = \sup S$ とする。上限の性質より任意の $n \geq 1$ に対し $x_n \in S$ が存在し $x - 1/n < x_n \leq x$ となる。$x_n \in S$ であるから $f(x_n) < y$ となり、$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と f の連続性より $f(x) \leq y$ が従う。一方、任意の $\xi \in (x, b]$ に対し $f(\xi) \geq y$ である (もし $f(\xi) < y$ なる $\xi > x$ が存在すれば x が S の上限である事に反する)。従って f の連続性より $f(x) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi) \geq y$ となる。以上より $f(x) = y$ が従う。

中間値の定理の証明　その３ (コンパクト性による証明)

集合 $f^{-1}([f(a), y])$ は I の部分集合故有界であり、閉集合 $[f(a), y]$ の連続函数による逆像として閉集合である。よって $f^{-1}([f(a), y])$ は最大値を持つ。それを $x \in I$ とすると定義より $f(x) \leq y$ であり、$\xi > x$ なる任意の $\xi \in I$ に対し $f(\xi) > y$ となる。よって $\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} f(\xi) \geq y$ となり f の連続性によって $f(x) \geq y$ となる。以上より $f(x) = y$ が従う。

中間値の定理の証明　その４ (連結性による証明)

任意の $x \in I$ に対し $f(x) \neq y$ であると仮定する。$U = \{\xi \in I; f(\xi) < y\}$, $V = \{\xi \in I; f(\xi) > y\}$ と置く。定義により $U \cap V = \emptyset$ となる。f の連続性より $U = f^{-1}((-\infty, y))$, $V = f^{-1}((y, \infty))$ は I の開集合であり $a \in U, b \in V$ より U も V も空でない。仮定より $I = U \cup V$ となるがこれは I の連結性に反する。

注１．区間縮小法による証明の考え方

$f(a) < y < f(b)$ なので左端は y より小さく右端は y より大きい。中点に於ける f の値を考える。y より大きければこれを右端として左半分の区間を選び y より小さければこれを左端として右半分の区間を選ぶ。こうして新しい部分区間を、その区間幅を半分としつつ、両端点に於ける f の値と y との大小関係を保つよう選ぶ事が出来る。これを繰返す事により両端点に於ける f の値と y との大小関係を保つ縮小区間列が構成される。縮小区間列の共通部分は一点になり両端点の成す二つの数列の極限となる。f の連続性により両端点に於ける f の値は y に収束する。

注２．上限の存在定理による証明とコンパクト性による証明の比較

両者は本質的には同じものである。順序構造の入る設定に於ける特殊な事情と考えられる。

注３．連結性による証明について

最も簡単で本質を捉えていると考えられるが「区間の連結性」を証明する必要がある。

注４．中間値の性質を持つ不連続函数の例

$f(x) = \sin(1/x), x \neq 0,\ f(0) = 0$ とすると $I = [a, b],\ a \leq 0 < b,$ なる形の任意の区間 I 上 f は不連続であるが、$[-1, 1]$ の任意の値を取る：$f(I) = [-1, 1]$

注意４の通り、中間値の性質は連続函数を特徴付けるものではないが、位相空間の連結性はその上の連続函数の空間により特徴付ける事が出来る：

定理　位相空間 X に対し次は同値である。

(1) X は連結である。

(2) 任意の $f \in C(X;\mathbb{R})$ に対し $f(X)$ は $\mathbb{R}$ の連結部分集合である。

(証明) **(1)⇒(2):** $f(X)$ は連結でないと仮定する。開集合 $U, V \subset \mathbb{R}$ が在って $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, $f(X) = U \cup V$ となる。このとき：

- f の連続性によって $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ は X の開集合である。
- $\emptyset \neq U \subset f(X)$, $\emptyset \neq V \subset f(X)$ であるから $a, b \in X$ が存在して $f(a) \in U$, $f(b) \in V$ となる。これより $a \in f^{-1}(U)$, $b \in f^{-1}(V)$ となり $f^{-1}(U) \neq \emptyset$, $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ である。
- $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- 任意の $x \in X$ に対し $f(x) \in f(X) = U \cup V$ なので $x \in f^{-1}(U)$ または $x \in f^{-1}(V)$ となる。即ち $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$

上の４つの条件は X の連結性に反する。

(2)⇒(1): X は連結でないと仮定する。開集合 $U, V \subset X$ が在って $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$ となる。このとき $\chi_U \in C(X;\mathbb{R})$ である。実際、任意の開集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対し

- $0, 1 \in I$ ならば $\chi_U^{-1}(I) = X$
- $0 \in I$, $1 \notin I$ ならば $\chi_U^{-1}(I) = V$
- $0 \notin I$, $1 \in I$ ならば $\chi_U^{-1}(I) = U$
- $0 \notin I$, $1 \notin I$ ならば $\chi_U^{-1}(I) = \emptyset$

となるからである。

$\chi_U(X) = \{0, 1\}$ は $\mathbb{R}$ の連結集合ではなく (2) に反する。

参考文献： 藤原松三郎、數學解析第一編、微分積分學第一巻、内田老鶴圃、1934
S. Lang, *Analysis I*, Addison-Wesley
L. Schwartz, *Analyse I*, Hermann