C_0 半群の生成作用素に関する補間不等式

平成 20 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

X をバナッハ空間、$\{T(t); t \geq 0\}$ を X 上の有界線型作用素の成す一径数強連続半群 (C_0 半群)、A をその生成作用素、 $D(A)$ を A の定義域とする。

定理１.　C_0 半群 $\{T(t); t \geq 0\} \subset B(X)$ は一様有界であるとする：

$$\sup_{t \geq 0} \|T(t)\| (\equiv M) < \infty$$

このとき任意の $f \in D(A^2)$ に対し不等式

$$\|Af\|^2 \leq 2M(M+1)\|A^2 f\|\|f\|$$

が成立つ。

定理２.　C_0 群 $\{T(t); t \in \mathbb{R}\} \subset B(X)$ は一様有界であるとする：

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(t)\| (\equiv M) < \infty$$

このとき任意の $f \in D(A^2)$ に対し不等式

$$\|Af\|^2 \leq 2M^2\|A^2 f\|\|f\|$$

が成立つ。

注.　$M = 1$ の場合、定理１の補間不等式は

$$\|Af\|^2 \leq 4\|A^2 f\|\|f\|$$

となり、定理２の補間不等式は

$$\|Af\|^2 \leq 2\|A^2 f\|\|f\|$$

となる。

定理１の証明　$f \in D(A), t \geq 0$ に対し

$$T(t)f - f = \int_0^t T(t')Af dt' \tag{1}$$

であるから $f \in D(A^2),\ t \geq 0$ に対し

$$T(t)Af - Af = \int_0^t T(t')A^2 f dt' \tag{2}$$

が成立つ。(1) の右辺の積分に (2) を用いて

$$\begin{aligned}
\int_0^t T(t')Afdt' &= \int_0^t (Af + \int_0^{t'} T(t'')A^2 fdt'')dt' \\
&= \int_0^t Afdt' + \int_0^t \left(\int_0^{t'} T(t'')A^2 fdt'' \right) dt' \\
&= tAf + \int_0^t \left(\int_{t''}^t T(t'')A^2 fdt' \right) dt'' \\
&= tAf + \int_0^t (t - t'')T(t'')A^2 fdt'' \qquad (3)
\end{aligned}$$

を得る。(1) と (3) より

$$tAf = T(t)f - f - \int_0^t (t - t')T(t')A^2 fdt' \tag{4}$$

となるので X で評価し

$$\begin{aligned}
t\|Af\| &\leq (M+1)\|f\| + \int_0^t (t - t')M\|A^2 f\|dt' \\
&= (M+1)\|f\| + \frac{t^2}{2}M\|A^2 f\|
\end{aligned}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned}
\|Af\| &\leq \inf \left\{ \frac{M+1}{t}\|f\| + \frac{t}{2}M\|A^2 f\|;\ t > 0 \right\} \\
&= \sqrt{2M(M+1)}\|A^2 f\|^{1/2}\|f\|^{1/2}
\end{aligned}$$

が従う。

定理２の証明　$\{T(t); t \in \mathbb{R}\}$ は群を成すので (4) は $t \in \mathbb{R}$ に対して成立つ。特に $t \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}
tAf &= -\,T(-t)f + f + \int_0^{-t} (-\,t - t')T(t')A^2 fdt' \\
&= -\,T(-t)f + f - \int_0^t (-\,t + t')T(-t')A^2 fdt' \\
&= -\,T(-t)f + f + \int_0^t (t - t')T(-t')A^2 fdt \qquad (5)
\end{aligned}$$

が成立つので (4) と (5) の両辺を加えると

$$2tAf = (T(t) - T(-t))f - \int_0^t (t - t')(T(t') - T(-t'))A^2 fdt' \tag{6}$$

を得る。これより

$$
\begin{aligned}
2t\|Af\| &\leq 2M\|f\| + 2M\int_0^t (t-t')\|A^2f\|dt' \\
&= 2M\|f\| + t^2M\|A^2f\|, \\
\|Af\| &\leq \inf\left\{\frac{M}{t}\|f\| + \frac{t}{2}M\|A^2f\|;\ t>0\right\} \\
&= \sqrt{2}M\|A^2f\|^{1/2}\|f\|^{1/2}
\end{aligned}
$$

が従う。

例１.

$$
\begin{aligned}
&X = BUC([0,\infty);\mathbb{C}) \\
&\quad = \{f \in L^\infty(0,\infty;\mathbb{C}); f \text{ は } [0,\infty) \text{ 上一様連続 }\}, \\
&\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [0,\infty)\}, \\
&(T(t)f)(x) = f(x+t), \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

と置くと $\{T(t); t \geq 0\}$ はバナッハ空間 X 上の有界線型作用素の成す C_0 半群であり、その作用素ノルムは 1 である。定理 1 により

$$
\|f'\|_\infty \leq 2\|f''\|_\infty^{1/2}\|f\|_\infty^{1/2}
$$

例２.

$$
\begin{aligned}
&X = BUC(\mathbb{R};\mathbb{C}) \\
&\quad = \{f \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}); f \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上一様連続 }\}, \\
&\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}, \\
&(T(t)f)(x) = f(x+t), \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

と置くと $\{T(t); t \in \mathbb{R}\}$ はバナッハ空間 X 上の有界線型作用素の成す C_0 半群であり、その作用素ノルムは 1 である。定理 2 により

$$
\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2}\|f''\|_\infty^{1/2}\|f\|_\infty^{1/2}
$$

参考文献： ディュドネ，現代解析の基礎，東京図書
M. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Mathematical Series 34
A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Science 44, Springer

追記（平成 27 年 1 月）：次の文献の 59 頁に関連した記述が見られる。

K.-J. Engel and R. Nagel, *One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer

定理 2 とほぼ同様の内容が次の論文に在る。

Z. Ditzian, “Some remarks on inequalities of Landau and Kolmogorov,” Aequationes Math., **12** (1975), 145-151.